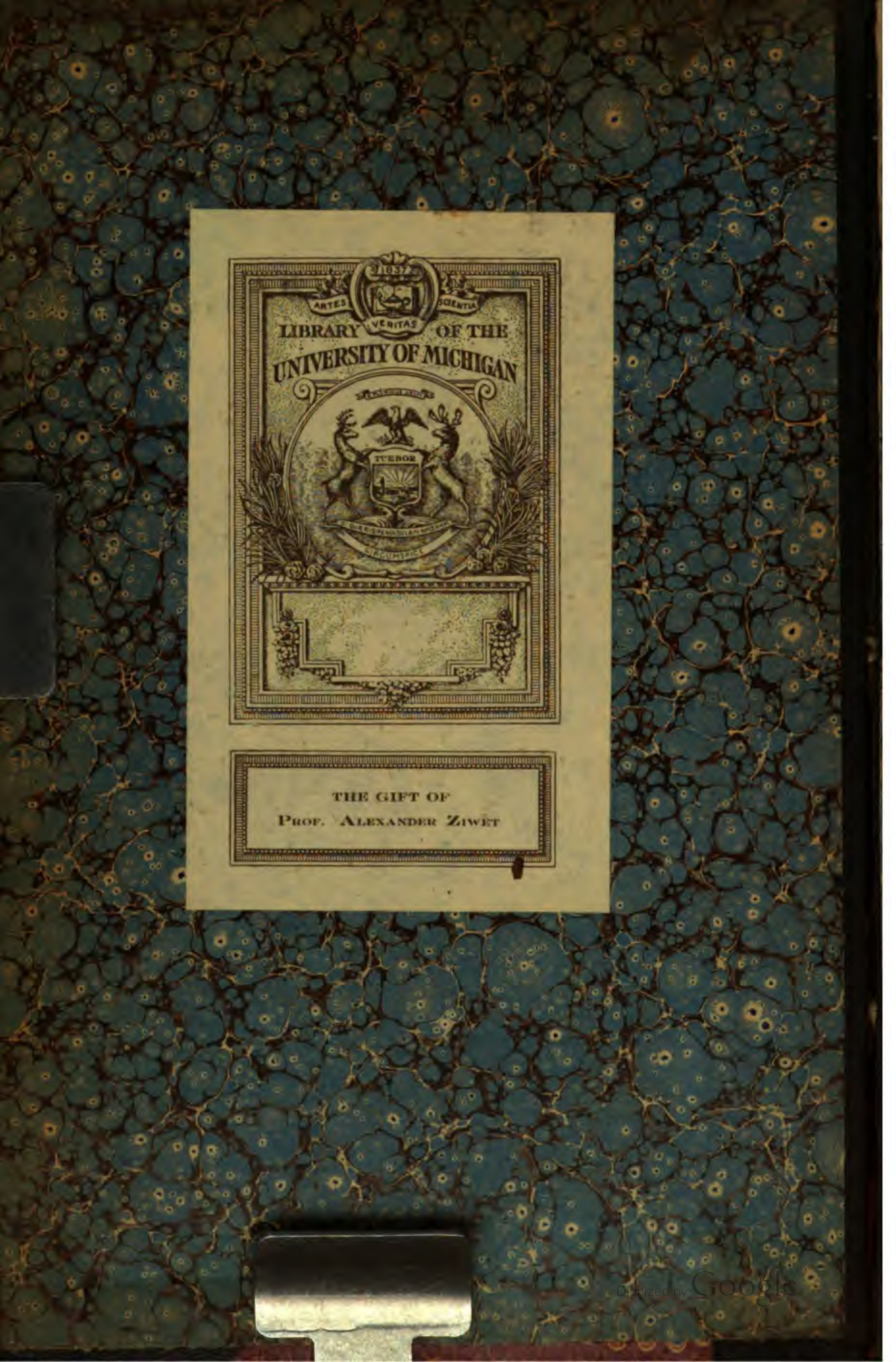
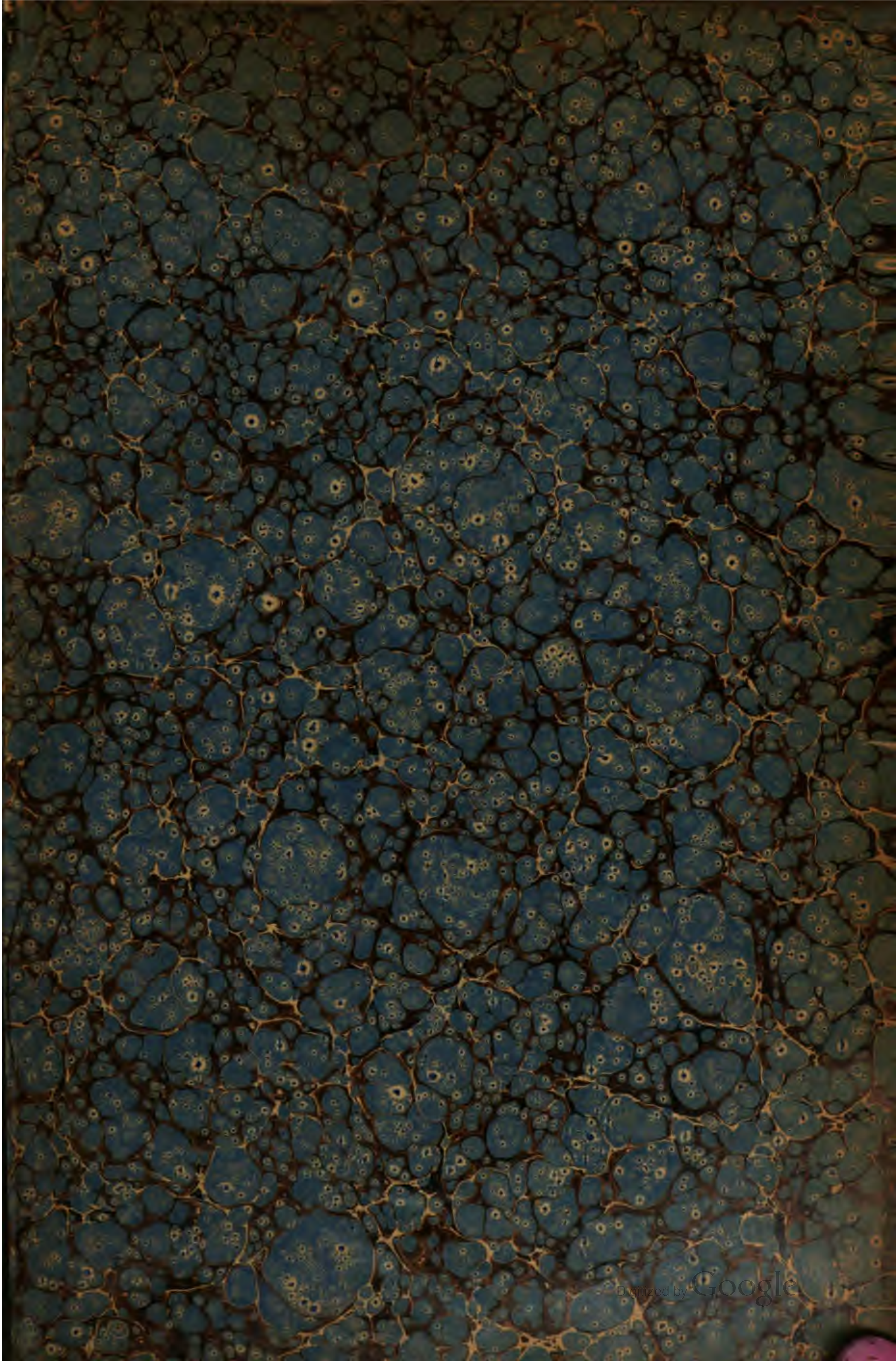




1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR



Dr. PAUL GORDAN'S VORLESUNGEN

ÜBER

INVARIANTENTHEORIE.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. GEORG KERSCHENSTEINER.

ERSTER BAND:

DETERMINANTEN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1885.

Prof. Alex. Ziwet
gt.
1-22-1923

HERRN

CHARLES HERMITE

WIDMET

ALS ZEICHEN SEINER VEREHRUNG

DIESE VORLESUNG

PAUL GORDAN.

Matrix I p. 18
8

Resultante I p. 102

Vorwort.

Vor wenigen Jahren wurde die deutsche mathematische Litteratur durch eine Bearbeitung von Faà di Bruno's „Einleitung in die Theorie der binären Formen“ bereichert, so dass wir nunmehr im Besitze dreier Werke sind — Salmon, Clebsch und Faà di Bruno —, deren Inhalt sich über die moderne Theorie der In- und Covarianten verbreitet. Das vorliegende Werk steht im engen Anschlusse an Clebsch, ja es ist aus jenen Ideen hervorgegangen, die schon damals, als jenes Buch erschien, Gordan in demselben niedergelegt hatte. Was aber zu dieser Zeit als coordinirte Frage auftrat, ist nunmehr zum Hauptziel dieses Werkes geworden; ich meine nämlich die grundlegenden Untersuchungen über die Endlichkeit des Formensystems und die damit eng verknüpften Fragen über die Relationen zwischen den einzelnen Formen. Das ist der fundamentale Standpunkt dieser Vorlesungen geworden, um den sich alle andern invariantentheoretischen Fragen gruppiren und von dem aus sie hier ihre Beleuchtung und Bedeutung erhalten sollen. Derselbe hat sich in jeder Richtung als sehr fruchtbar erwiesen. Durch ihn aber wurden andererseits die Grenzen bestimmt, inwieweit das vorliegende Werk eine Theorie der Invarianten werden, d. h. inwieweit die sich nun bereits mannigfach gliedernde Disciplin eine erschöpfende Behandlung erfahren soll.

Es ist hiebei natürlich, dass bei dem unverrückten Festhalten gerade dieses Zieles sich Gordan bei all seinen Untersuchungen der von Aronhold begründeten Symbolik bediente, und diese Vorlesungen sich somit auch der Form nach an das treffliche Werk von Clebsch anschliessen. Seit dem Tode dieses Meisters ist die Invariantentheorie aber völlig selbständig geworden. Während sie sich nach ihrem Entstehen aus der Zahlentheorie zunächst an die analytische Geometrie der Ebene anschloss, ist heute ihre Bedeutung wesentlich gewachsen. Sie ist sich selbst zum Zwecke geworden, und darf somit heute als jene Disciplin angesehen werden, welche die rein formalen Gesetze der

Algebra zum Ausdrucke bringt. Dies möge festgehalten werden, wenn im vorliegenden Werke die Gesetze der Invariantentheorie vorzugsweise nur auf Fragen der Lehre von den algebraischen Gleichungen Anwendung finden, insoweit nicht, wie im dritten Bande, die Theorie der ternären Formen hin und wieder zu geometrischen Interpretationen Veranlassung giebt, oder die Theorie der Primformen diese Gesetze mit der Lehre von den Differentialgleichungen in Verbindung setzt. Ihr Zusammenhang mit Problemen der Variationsrechnung und gewissen Aufgaben der Physik konnte natürlich um so weniger berührt werden, als ja auch alle die wesentlichen Dienste, welche sie der Geometrie geleistet hat, in diesen Vorlesungen keine Erörterungen erfahren.

Insoweit aber die Vorlesungen sich in den so markirten Grenzen bewegen, werden sie nicht nur eine Einführung in die Theorie der Invarianten sein, sondern den Leser bis zu dem heutigen Standpunkte geleiten, zu welchem diese Disciplin durch die hervorragenden Arbeiten von **Hermite** und **Brioschi**, **Cayley**, **Sylvester** und **Salmon**, **Aronhold**, **Clebsch** und **Gordan** gefördert wurde.

Von jenen Fragen aber, die hier nicht berücksichtigt werden konnten, sind die wichtigeren in Salmon's „Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen“ aufgenommen, so dass beide Vorlesungen zusammen ein vollständiges Bild der Entwicklungsstufe liefern, auf welcher sich die Invariantentheorie gegenwärtig befindet.

Der *erste* Theil dieses Werkes, der sich mit der Lehre von den Determinanten beschäftigt, möge als Vorbereitung für die beiden andern Theile angesehen werden. Die symbolischen Methoden legen das Bedürfniss nach einer vorauszuschickenden Theorie der Determinanten unabweisbar nahe, und anderntheils sind es gerade Determinantenbeziehungen, welche zum öftern zu Relationen zwischen Formen Veranlassung geben.

Dieses Ziel des ersten Theiles, mit den Mitteln vertraut zu machen, die in der Theorie der Invarianten vorausgesetzt werden müssen, legte für denselben einige Beschränkung im Stoffe auf; dafür fand aber die Rechnung mit Matrices eine weit eingehendere Behandlung als in andern Determinantenwerken. Der Disposition nach steht dieser erste Theil in innigem Zusammenhange mit dem längst anerkannten gleichbenannten Werke Baltzer's. Das letztere geht jedoch in vielen Untersuchungen weiter, wie es das Ziel des Baltzer'schen Werkes, das sich allgemeinere Aufgaben stellt, erheischt.

Hier werden in dem theoretischen Theile nur die Determinanten im Allgemeinen behandelt und deren Eigenschaften vollzählig entwickelt; specielle Determinanten aber, wie z. B. symmetrische und

Kettenbruchdeterminanten, finden keine eingehende Besprechung. Ihren Abschluss findet die Theorie in der Betrachtung correspondirender Matrices, die gerade in einigen neuesten invariantentheoretischen Arbeiten eine bemerkenswerthe Rolle spielen.

Auch der Anwendung der Theorie waren natürlich mit Rücksicht auf den Zweck dieses Theiles feste Grenzen gesteckt. Eine eingehende Behandlung erfährt nur die Theorie der linearen Gleichungen, die Eigenschaften der Functionaldeterminanten und der Resultanten wegen ihrer hervorragenden Bedeutung für die Invariantentheorie. Von den ursprünglich geplanten Quellencitaten musste ich im Allgemeinen absehen; es liegt auch nicht mehr das grosse Bedürfniss vor, nachdem für die Determinanten in **Baltzer**'s und **Günther**'s diesbezüglichen Werken und für die Invarianten in den Lehrbüchern **Salmon**'s und der deutschen Bearbeitung **Faà di Bruno**'s diese Quellen in ausführlicher Weise angegeben sind.

Ich möchte diese einleitenden Bemerkungen damit schliessen, dass ich Herrn Professor Gordan meinen wärmsten Dank ausspreche, mich zur Herausgabe seiner Vorlesungen aufgefordert zu haben. Ich habe mich einer freien selbständigen Bearbeitung derselben mit aller Beschränkung des eigenen Ich's unterzogen und bin zufrieden, wenn es mir gelungen ist, die Ideen, welche seine Vorlesungen beherrschen, zum klaren Ausdruck zu bringen, sei es durch die Anordnungen und die Entwicklungen selbst, oder durch die zahlreichen Beispiele und Anwendungen, die ich nach meinem Bedürfniss in dieselben eingeflochten habe.

Nürnberg, im Juli 1885.

Georg Kerschensteiner.

Inhaltsverzeichniss.

Erster Theil.

Theorie der Determinanten.

§ 1. Permutation und Substitution.

§ 2. Begriff der Determinanten.

§ 3. Unterdeterminanten erster Ordnung.

§ 4. Partialdeterminanten höherer Ordnung.

§ 5. Entwicklung der Determinante in eine Summe von Producten correspondirender Determinanten.

(Satz von Laplace.)

§ 6. Multiplication von Determinanten.

§ 7. Adjungirte Determinanten und correspondirende Matrices.

Zweiter Theil.

Anwendungen der Determinantentheorie.

§ 8. Systeme linearer Gleichungen und deren Auflösung.

§ 9. Functionaldeterminanten.

§ 10. Der grösste gemeinsame Factor.

§ 11. Eigenschaften der Resultante $R_{f,\varphi}$ zweier Functionen $f(\overset{m}{x})$ und $\varphi(\overset{n}{x})$.

Erster Theil.

Theorie der Determinanten.

§ 1. Permutation und Substitution.

1. *Permutation.* Wenn man in einer Gruppe von n Elementen — wir wollen sie mit a, b, c .... h bezeichnen — alle möglichen Vertauschungen dieser Elemente vornimmt, so entsteht eine Reihe neuer Gruppen oder Complexionen, die sich nur durch die Anordnung ihrer Elemente unterscheiden, und die man bekanntlich Permutationen nennt. Die Anzahl dieser Permutationen ist $N = n(n-1) \dots 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = n!$, wie sich leicht erkennen lässt, wenn man bedenkt, dass jede Permutation von n Elementen erhalten wird, indem man jedes der n Elemente mit den sämmtlichen Permutationen von den übrigen $(n-1)$ Elementen verbindet. Dabei sieht man auch, dass von diesen N Permutationen $(n-1)!$ mit a, ebenso viele mit b, c u. s. w. beginnen, und wir wollen dahin übereinkommen, dass wir jede Permutation, die mit dem nämlichen Element beginnt, auch zur nämlichen Klasse rechnen, so dass wir dadurch die sämmtlichen Permutationen in n Klassen getheilt haben.

2. *Derangement.* Anstatt die Elemente einer Permutation mit a, b, $c \dots h$ zu bezeichnen, zieht man es vor, die Ausdrücke a_1, a_2, $a_3 \dots a_n$ einzuführen, oder noch einfacher die dem Buchstaben a angehängten Zahlen 1, 2, 3 .... n, welche Indices oder Suffixe genannt werden. Wir nennen dann eine Permutation, in welcher kein höherer Index links vor einem niedern steht, gut geordnet. Wenn dagegen in einer Permutation ein höherer Index links vor einem niedrigeren sich befindet, so sagt man, dieselbe enthält eine Inversion oder ein Derangement, und zwar ist die Zahl dieser Derangements so gross, als die Zahl, welche angiebt, wie oft rechts von einem höhern Index sich niedrigere befinden. So sind z. B. die Permutationen

$$(pqrs), \quad (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$$

gut geordnet; dagegen enthält die Permutation

$$(7\ 4\ 1\ 2\ 3\ 6\ 5) \text{ Derangements: } 6 + 3 + 1 = 10$$

nämlich 6, von dem Index 7 herrührend, 3 in Folge der Stellung von 4, und 1 in Folge der Stellung des Index 6. Ebenso enthält die Permutation (3 5 4 1 2) die Derangements 3 1, 3 2, 5 4, 5 1, 5 2, 4 1 und 4 2, also im Ganzen 7 an der Zahl.

3. *Abzählung der Derangements in einer Permutation durch Theilung.* Um in einer Permutation die Zahl der Derangements rasch zu bestimmen, kann man sich manchmal mit Vortheil folgender Methode bedienen, besonders wenn die Permutation viele Elemente enthält.

Wir theilen die Permutation in 2 beliebige Theile:

$$\left.\begin{array}{l}\text{die erste Gruppe enthalte der Reihe nach die Indices } i_1\, i_2 \ldots i_\mu \\ \text{die zweite Gruppe enthalte der Reihe nach die Indices } k_1\, k_2 \ldots k_\nu\end{array}\right\} \nu + \mu = n.$$

Dann bildet sich die Zahl sämmtlicher Derangements

1) aus jenen, welche von der Gruppe der i allein herrühren,

2) aus jenen, welche von der Gruppe der k allein herrühren,

3) aus jenen, welche die Elemente i in Bezug auf die k bilden.

Für die Anzahl der Derangements dritter Gattung lässt sich nun eine einfache Formel angeben; addiert man hiezu sodann die Anzahl der Inversionen erster und zweiter Gattung, die, weil sie die betreffenden Gruppen weniger Elemente enthalten, leichter sich finden lassen, als die der ganzen Permutation, so erhält man die Gesammtzahl. Diese Summenformel liefert aber der Satz:

> „Die Anzahl der Derangements dritter Gattung ist gleich der Summe aller Indices der Gruppe der i weniger der Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis μ, wo μ die Anzahl der Elemente der ersten Gruppe bedeutet."

Beweis: Die Anzahl dieser Derangements dritter Gattung ändert sich nicht, wenn ich zunächst die Gruppe der i und die Gruppe der k unter sich gut ordne. Die erste Gruppe sei dann $(J_1\, J_2 \ldots J_\mu)$, die zweite $(K_1\, K_2 \ldots K_\nu)$, also die Permutation gleich:

$$(J_1\, J_2 \ldots J_\mu \mid K_1\, K_2 \ldots K_\nu) \qquad (\nu + \mu = n).$$

Diese neue Permutation hat einerseits in den J_ϱ, andererseits in den K_ϱ keine Derangements; dagegen noch alle Derangements dritter Gattung. Die Zahl derselben zerfällt in solche die von J_1, in solche die von J_2 u. s. w., bis in solche die von J_μ herrühren. Der erste Theil ist offenbar gleich $J_1 - 1$, da J_1 mit *allen* kleineren Indices Inversionen bildet; der zweite Theil gleich $J_2 - 2$, da J_2 Inversionen bildet mit allen kleineren Indices, ausgenommen mit dem vorhergehenden J_1;

ebenso endlich der μ^{te} Theil gleich $J_\mu - \mu$; die Gesammtzahl wird also:

$$Z = J_1 + J_2 + J_3 \cdots + J_\mu - (1 + 2 + \cdots \mu)$$
$$= i_1 + i_2 + i_3 \cdots + i_\mu - \frac{\mu(\mu + 1)}{2}.$$

Beispiele: α) Sei gegeben die Permutation

$$(3\ 7\ 9\ 8\ 1\ 5\ 2\ 6\ 4).$$

Wir theilen sie beliebig durch einen Verticalstrich in zwei Gruppen:

$$(3\ 7\ 9\ 8 \mid 1\ 5\ 2\ 6\ 4) = (i_1\ i_2\ i_3\ i_4 \mid k_1\ k_2\ k_3\ k_4\ k_5)$$

und machen jede derselben gut geordnet:

$$(3\ 7\ 8\ 9 \mid 1\ 2\ 4\ 5\ 6) = (J_1\ J_2\ J_3\ J_4 \mid K_1\ K_2\ K_3\ K_4\ K_5).$$

Nun ist

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 3 + 7 + 8 + 9 = 27,$$
$$\frac{\mu(\mu + 1)}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10,$$

also die Zahl der Inversionen $Z = 27 - 10 = 17$, wie man auch durch directes Abzählen findet. Zählt man hierzu die eine Inversion in der Gruppe der i, die drei in der Gruppe der k, so ist die Gesammtzahl $= 21$.

β) Sei gegeben die Permutation:

$$(7\ 3\ 6\ 2\ 4\ 1\ 5);$$

wir theilen sie in zwei Theile:

$$(7\ 3\ 6 \mid 2\ 4\ 1\ 5),$$

dann ist die Summe $7 + 3 + 6 = 16$, die Zahl der Elemente $= 3$. Also die Zahl der Derangements dritter Gattung gleich:

$$16 - \frac{3 \cdot 4}{2} = 10.$$

In der That, wenn wir gut ordnen, so erhalten wir:

$$(3\ 6\ 7 \mid 1\ 2\ 4\ 5),$$

also 2 Derangements von 3 herrührend, 4 von 6 herrührend und $7 - 3 = 4$ von 7 herrührend, in Summa 10. Hierzu addirt die Derangements der $i = 2$, die der $k = 2$, liefert die Gesammtsumme 14.

4. *Begriff der Substitution.* Die Ueberführung von einer Permutation in eine andere geschieht durch eine Operation, die man *Substitution* nennt. Soll z. B. die Permutation (5 1 2 4 3) übergeführt werden in (4 5 1 3 2), so geschieht dies durch eine Operation, die wir bezeichnen mit:

$$S = \begin{pmatrix} 5\ 1\ 2\ 4\ 3 \\ 4\ 5\ 1\ 3\ 2 \end{pmatrix},$$

welche die Wirkung hat, dass das Element 5 durch 4, das Element 1 durch 5, 2 durch 1, 4 durch 3 und 3 durch 2 ersetzt wird. Sie ist von der Permutation, auf welche sie angewendet wird, vollständig unabhängig, und die nämliche Substitution S, die wir oben mit

$$\begin{pmatrix} 5\,1\,2\,4\,3 \\ 4\,5\,1\,3\,2 \end{pmatrix}$$

bezeichneten, wird genau ebenso zum Ausdruck gebracht durch

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\,1\,2\,3\,4 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 3\,2\,1\,4\,5 \\ 2\,1\,5\,3\,4 \end{pmatrix} \text{ u. s. w.}$$

Daraus erkennt man, dass die verschiedenen Ausdrücke ein und derselben Substitution das eine Gemeinsame besitzen, dass die *unter* einander stehenden Zahlenpaare ungeändert bleiben.

Das Zeichen

$$S = \begin{pmatrix} 5\,1\,2\,4\,3 \\ 4\,5\,1\,3\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\,1\,2\,3\,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,2\,1\,4\,5 \\ 2\,1\,5\,3\,4 \end{pmatrix}$$

ist also so zu nehmen, dass, welche Permutation wir auch anschreiben, über denselben Zahlen immer wieder die einmal festgesetzten Zahlen stehen.

Man kann die Substitutionen insbesondere auf zwei Arten anschreiben, indem man entweder die obere oder aber auch die untere Permutation in dem Ausdrucke S gut ordnet, also z. B.

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\,1\,2\,3\,4 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 2\,3\,4\,5\,1 \\ 1\,2\,3\,4\,5 \end{pmatrix}.$$

Rechnet man die specielle Substitution

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,2\,3\,4\,5 \end{pmatrix},$$

wobei alles ungeändert bleibt, mit, so erkennt man, *dass es bei n Elementen ebenso viele Substitutionen als Permutationen von n Elementen* giebt; denn ordnet man irgend einer Permutation eine andere zu, so kann diese Zuordnung als Ausdruck einer Substitution angesehen werden. Den n oben erwähnten Klassen von Permutationen entsprechen also auch ebenso viele Klassen von Substitutionen; doch werden wir von dieser Eintheilung wenig Gebrauch machen.

Das wichtigste Eintheilungsprincip für die Substitutionen liefert in der Lehre von den Determinanten das Differenzenproduct:

$$\begin{array}{r} (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4) \cdots\cdots (a_1 - a_n) \times \\ (a_2 - a_3)(a_2 - a_4) \cdots\cdots (a_2 - a_n) \times \\ (a_3 - a_4) \cdots\cdots (a_3 - a_n) \times \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{n-2} - a_n)(a_{n-2} - a_n) \times \\ (a_{n-1} - a_n). \end{array}$$

Da nämlich dasselbe durch Vertauschung irgend zweier oder mehrerer seiner Elemente entweder sich gar nicht ändert oder nur sein Vorzeichen, so können wir alle Substitutionen in *zwei Hauptklassen* theilen. In die erste Klasse kommen jene Substitutionen, welche dasselbe nicht ändern, in die zweite Klasse jene, welche es ändern.

5. *Arten der Substitutionen.* Die Substitutionen sind entweder uneigentliche oder eigentliche. Die ersteren werden so genannt, weil sie abhängig sind von der speciellen Permutation, auf welche sie angewendet werden, während die eigentlichen, wie schon früher erwähnt, es nicht sind. Zu den uneigentlichen Substitutionen gehört

α) *die einfache Vertauschung*, d. h. die Vertauschung zweier neben einander stehender Elemente einer bestimmten Permutation. So wird die Permutation (4 5 1 2 6 3) in (4 5 1 6 2 3) übergeführt durch die einfache Vertauschung (2 6), wobei diese Vertauschung speciell nur für die vorliegende Permutation zu denken ist. Ebenso gehen die Permutationen (7 3 2 5), (6 1 4 9) durch die einfachen Vertauschungen (3 2), (4 9) in die Permutationen (7 2 3 5), (6 1 9 4) über.

β) *der einfache Cyclus*, der entweder vorschreitend oder rückschreitend sein kann. Vertauscht man nämlich *k neben einander* stehende Elemente einer bestimmten Permutation in der Weise, dass an Stelle des ersten Elementes das zweite, an Stelle des zweiten das dritte u. s. w., an Stelle des letzten wieder das erste tritt, dann bilden diese Vertauschungen einen vorschreitenden Cyclus; rückt dagegen das vorletzte Element an Stelle des letzten, das zweitvorletzte an Stelle des vorletzten u. s. w. und das letzte an die erste Stelle, so hat man einen rückschreitenden Cyclus vor sich. So stellen z. B. die Ausdrücke

$$\begin{pmatrix}2\,4\,3\,5\\4\,3\,5\,2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\,7\,6\,4\,8\,3\\7\,6\,4\,8\,3\,1\end{pmatrix}$$

vorschreitende, die Ausdrücke

$$\begin{pmatrix}2\,4\,3\,5\\5\,2\,4\,3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\,7\,6\,4\,8\,3\\3\,1\,7\,6\,4\,8\end{pmatrix}$$

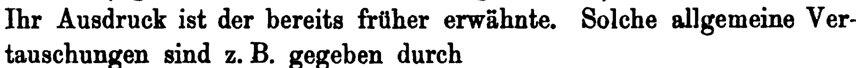
rückschreitende Cyclen dar, welche z. B. die speciellen Permutationen (1 2 4 3 5 6), (9 2 0 5 1 7 6 4 8 3) überführen im ersten Falle in (1 4 3 5 2 6), (9 2 0 5 7 6 4 8 3 1), im zweiten Falle in (1 5 2 4 3 6), (9 2 0 5 3 1 7 6 4 8).

Man kann sich einen *einfachen* Cyclus am besten in der Weise klar machen, dass man sich etwa die sechs Elemente 1 7 6 4 8 3 symmetrisch auf zwei concentrische Kreisringe in nebenstehender Weise

angeordnet denkt. Dreht man den inneren Ring (oder auch den äusseren) um 60^0 nach links, so charakterisirt die neue Lage beider Ringe einen vorschreitenden, bei einer gleichen Drehung nach rechts einen rückschreitenden einfachen Cyclus.

Zu den eigentlichen Substitutionen gehört:

α) *die gewöhnliche allgemeine Vertauschung* beliebig zweier Elemente einer Permutation von n Elementen (eigentliche Substitution im engern Sinne). Ihr Ausdruck ist der bereits früher erwähnte. Solche allgemeine Vertauschungen sind z. B. gegeben durch



$$S_1 = \begin{pmatrix} 1\,5\,2\,6\,3\,4 \\ 1\,2\,5\,6\,3\,4 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 3\,4\,6\,7\,5\,1\,2 \\ 3\,1\,6\,7\,5\,4\,2 \end{pmatrix}$$

und man kann die nämlichen Substitutionen S_1 und S_2 durch eine ganze Reihe anderer Ausdrücke darstellen, z. B.

$$S_1 = \begin{pmatrix} 4\,5\,6\,3\,2\,1 \\ 4\,2\,6\,3\,5\,1 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 3\,4\,1\,6\,7\,5\,2 \\ 3\,1\,4\,6\,7\,5\,2 \end{pmatrix},$$

worauf wir schon früher aufmerksam gemacht haben.

β) *Der allgemeine Cyclus*, durch welchen k beliebige Elemente einer Permutation in der Weise wie beim einfachen Cyclus ihre Plätze ändern. Ist z. B. die Permutation (3 5 6 2 1 4) von 6 Elementen gegeben, so schreiben wir zunächst, um den Ausdruck eines allgemeinen Cyclus zu erhalten, einen einfachen an, etwa

$$\begin{pmatrix} 2\,4\,1\,3 \\ 4\,1\,3\,2 \end{pmatrix}.$$

Wenden wir dann diese Substitutionen auf die obige Permutation an, so erhalten wir den allgemeinen Cyclus

$$\begin{pmatrix} 3\,5\,6\,2\,1\,4 \\ 2\,5\,6\,4\,3\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,3\,4\,5\,1\,2 \\ 6\,2\,1\,5\,3\,4 \end{pmatrix} = \text{u. s. w.}$$

Anmerkung 1. Einfacher Cyclus sowohl als einfache Vertauschung erhalten den allgemeinen Charakter der eigentlichen Substitutionen, sobald wir die Beschränkung fallen lassen, dass sie nur für eine bestimmte Permutation gelten sollen.

So werden wir unter (3 5) eine einfache Vertauschung, angewendet etwa auf (4 2 3 5 1), verstehen, dagegen die allgemeine darstellen durch

$$\begin{pmatrix} 4\,2\,3\,5\,1 \\ 4\,2\,5\,3\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,4\,1\,5\,2 \\ 5\,4\,1\,3\,2 \end{pmatrix} = \text{u. s. w.}$$

So wird auch

$$\begin{pmatrix} 6\,1\,4\,3 \\ 1\,4\,3\,6 \end{pmatrix}$$

den einfachen Cyclus bedeuten, der auf die Permutation (5 2 6 1 4 3) anzuwenden ist, während der allgemeine charakterisirt ist durch

$$\begin{pmatrix}5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3\\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 6 & 5 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3\end{pmatrix} = \text{u. s. w.}$$

Anmerkung 2. Eine *beliebige Substitution* S verlangt, abgesehen von der einen $S = \begin{pmatrix}1\,2\,3\ldots n\\ 1\,2\,3\ldots n\end{pmatrix}$, die Alles ungeändert lässt, allgemeine gewöhnliche, oder auch, wie wir gleich sehen werden, allgemeine cyclische Vertauschungen.

6. *Herstellung der uneigentlichen Substitutionen durch einander.* Der einfache Cyclus lässt sich herstellen durch einfache Vertauschungen.

Beispiel 1. Sei gegeben der einfache Cyclus

$$\begin{pmatrix}2 & 5 & 3 & 1\\ 5 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Lassen wir nun das Element 2 successive nach rechts wandern, dann entsteht aus (2 5 3 1) durch die einfache Vertauschung (2 5) zuerst (5 2 3 1), die nächste einfache Vertauschung (2 3) führt zu (5 3 2 1), endlich die letzte (2 1) zum gesuchten Resultat (5 3 1 2); also lässt sich ein einfacher Cyclus von 4 Elementen durch 3 einfache Vertauschungen ersetzen.

Beispiel 2. Der einfache Cyclus sei

$$\begin{pmatrix}4 & 6 & 5 & 8 & 7 & 3\\ 6 & 5 & 8 & 7 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Wir lassen wieder das erste Element 4 der Permutation wandern.

Einfache Vertauschung.	Permutation.
(4 6)	6 4 5 8 7 3
(4 5)	6 5 4 8 7 3
(4 8)	6 5 8 4 7 3
(4 7)	6 5 8 7 4 3
(4 3)	6 5 8 7 3 4

An Stelle des einfachen Cyclus von 6 Elementen treten somit 5 einfache Vertauschungen.

Man erkennt also leicht die Richtigkeit des Satzes:

„Ist die Differenz der Stellenzahl des ersten und letzten Elementes eines einfachen Cyclus ν, so kann man denselben durch ν einfache Vertauschungen ersetzen; es spielen dann $\nu + 1$ Elemente im Cyclus mit."

7. *Die allgemeine Vertauschung lässt sich durch zwei einfache Cyclen herstellen.* Sei gegeben 1) die allgemeine Vertauschung

$$S = \begin{pmatrix} 2\ 4\ 1\ 5\ 3\ 6 \\ 6\ 4\ 1\ 5\ 3\ 2 \end{pmatrix},$$

dann liefert der einfache Cyclus (gebildet aus allen 6 Elementen)

$$\begin{pmatrix} 2\ 4\ 1\ 5\ 3\ 6 \\ 4\ 1\ 5\ 3\ 6\ 2 \end{pmatrix}$$

zunächst die Permutation (4 1 5 3 6 2).

Wendet man auf diese den einfachen Cyclus

$$\begin{pmatrix} 4\ 1\ 5\ 3\ 6 \\ 6\ 4\ 1\ 5\ 3 \end{pmatrix}$$

an, gebildet aus fünf Elementen, so führt er zum gesuchten Resultat (6 4 1 5 3 2).

Beispiel 2. Die Substitution

$$S = \begin{pmatrix} 5\ 7\ 8\ 2\ 4\ 1\ 3\ 6 \\ 5\ 4\ 8\ 2\ 7\ 1\ 3\ 6 \end{pmatrix}$$

lässt sich spalten in den einfachen vorschreitenden Cyclus von vier Elementen

$$\begin{pmatrix} 7\ 8\ 2\ 4 \\ 8\ 2\ 4\ 7 \end{pmatrix}.$$

Durch ihn wird in der Permutation (5 7 8 2 4 1 3 6) zunächst das Element 7 an die durch S angedeutete Stelle gebracht, so dass man erhält (5 8 2 4 7 1 3 6). Wendet man hierauf den rückschreitenden einfachen Cyclus von drei Elementen $\begin{pmatrix} 8\ 2\ 4 \\ 4\ 8\ 2 \end{pmatrix}$ an, so erhält man das gewünschte Resultat (5 4 8 2 7 1 3 6). Die weiteren Beispiele werden wohl ohne weitere Erklärung verständlich sein.

3) Allgemeine Vertauschung: $S = \begin{pmatrix} 3\ 0\ 2\ 7\ 1\ 5\ 6\ 4 \\ 3\ 0\ 2\ 5\ 1\ 7\ 6\ 4 \end{pmatrix}$.

Erster Cyclus: $\begin{pmatrix} 7\ 1\ 5 \\ 1\ 5\ 7 \end{pmatrix}$; Resultat: (3 0 2 1 5 7 6 4).

Zweiter Cyclus: $\begin{pmatrix} 1\ 5 \\ 5\ 1 \end{pmatrix}$; Resultat: (3 0 2 5 1 7 6 4).

4) Allgemeine Vertauschung: $S = \begin{pmatrix} 5\ 3\ 7\ 8\ 9\ 1\ 2\ 4\ 6 \\ 5\ 4\ 7\ 8\ 9\ 1\ 2\ 3\ 6 \end{pmatrix}$.

Erster Cyclus: $\begin{pmatrix} 3\ 7\ 8\ 9\ 1\ 2\ 4 \\ 7\ 8\ 9\ 1\ 2\ 4\ 3 \end{pmatrix}$; Resultat: (5 7 8 9 1 2 4 3 6).

Zweiter Cyclus: $\begin{pmatrix} 7\ 8\ 9\ 1\ 2\ 4 \\ 4\ 7\ 8\ 9\ 1\ 2 \end{pmatrix}$; Resultat: (5 4 7 8 9 1 2 3 6).

Aus diesen vier Beispielen lässt sich leicht folgendes Gesetz abstrahiren: „Ist die Differenz der Stellenzahl der beiden zu vertauschenden Elemente gleich ν, dann spielen beim ersten Cyclus $\nu + 1$ Elemente, beim

zweiten ν Elemente mit. Daher besteht nach dem vorigen Satze der erste Cyclus aus ν einfachen Vertauschungen, der zweite Cyclus aus $\nu - 1$. Wenn man also auf *diesem* Wege die allgemeine Vertauschung in einfache zerlegt, so ist Gesammtsumme der letzteren $2\nu - 1$, also eine ungerade Zahl.“ Es sei hierbei bemerkt, dass diese Zahl $2\nu - 1$ lediglich von dem oben eingeschlagenen Wege abhängig ist. Irgend ein systematisches oder auch willkürliches anderes Verfahren, die allgemeine Vertauschung auf einfache zurückzuführen, wird im Allgemeinen auf eine andere Zahl führen.

8. *Herstellung des allgemeinen Cyclus aus der allgemeinen Vertauschung.* Wir bestimmen den zum allgemeinen Cyclus gehörigen einfachen Cyclus, lösen diesen in seine einfachen Vertauschungen auf, und bilden alsdann die entsprechenden allgemeinen Vertauschungen. Diese ersetzen gerade den allgemeinen Cyclus.

Beispiel 1. Es sei gegeben der allgemeine Cyclus

$$S = \begin{pmatrix} 4\,3\,5\,1\,6\,2 \\ 1\,2\,5\,3\,6\,4 \end{pmatrix}.$$

Der zugehörige einfache ist $\begin{pmatrix} 4\,1\,3\,2 \\ 1\,3\,2\,4 \end{pmatrix}$, welcher selbst in die einfachen Vertauschungen (4 1), (4 3), (4 2) aufgelöst werden kann.

Hierzu bilden wir der Reihe nach die zugehörigen allgemeinen Vertauschungen und erhalten so entsprechend (4 1)

$$S_1 = \begin{pmatrix} 4\,3\,5\,1\,6\,2 \\ 1\,3\,5\,4\,6\,2 \end{pmatrix}, \text{ daraus entsprechend } (4\;3)$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1\,3\,5\,4\,6\,3 \\ 1\,4\,5\,3\,6\,2 \end{pmatrix}, \text{ daraus entsprechend } (4\;2)$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1\,4\,5\,3\,6\,2 \\ 1\,2\,5\,3\,6\,4 \end{pmatrix},$$

womit das gewünschte Resultat erreicht ist.

Beispiel 2. Es ist der allgemeine Cyclus

$$S = \begin{pmatrix} 3\,5\,7\,9\,8\,2\,6\,4\,1 \\ 7\,5\,8\,9\,6\,2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}$$

in allgemeine Vertauschungen zu zerlegen. Wir bestimmen aus S den einfachen Cyclus

$$\begin{pmatrix} 3\,7\,8\,6\,1 \\ 7\,8\,6\,1\,3 \end{pmatrix}.$$

Ihm entsprechen die einfachen Vertauschungen:

$$(3\;7),\quad (3\;8),\quad (3\;6),\quad (3\;1).$$

Also zerfällt S in die vier allgemeinen Vertauschungen

$$S_1 = \begin{pmatrix} 3\,5\,7\,9\,8\,2\,6\,4\,1 \\ 7\,5\,3\,9\,8\,2\,6\,4\,1 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 7\,5\,3\,9\,8\,2\,6\,4\,1 \\ 7\,5\,8\,9\,3\,2\,6\,4\,1 \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 7\,5\,8\,9\,3\,2\,6\,4\,1 \\ 7\,5\,8\,9\,6\,2\,3\,4\,1 \end{pmatrix}, \qquad S_4 = \begin{pmatrix} 7\,5\,8\,9\,6\,2\,3\,4\,1 \\ 7\,5\,8\,9\,6\,2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}.$$

Man erkennt aus diesen Beispielen, dass der allgemeine Cyclus sich genau in derselben Weise in allgemeine Vertauschungen auflösen lässt, wie der einfache Cyclus in einfache Vertauschungen. Spielen daher beim allgemeinen Cyclus $\nu + 1$ Elemente mit, so kann man ihn in ν allgemeine Vertauschungen auflösen. (Im Beispiel 1 waren die Elemente des Cyclus an Zahl 4, die allgemeinen Vertauschungen 3; im Beispiel 2 spielten 5 Elemente im Cyclus mit, also ergaben sich 4 allgemeine Vertauschungen.)

9. *Herstellung einer beliebigen Substitution durch allgemeine Cyclen.* Sei z. B. die gegebene Substitution

$$S = \begin{pmatrix} 9\,0\,8\,4\,3\,5\,2\,1\,7\,6 \\ 1\,6\,5\,0\,9\,2\,8\,3\,4\,7 \end{pmatrix}.$$

Wir können sie uns entstanden denken dadurch, dass zunächst 9 durch 1, 1 durch 3, 3 wieder durch 9 ersetzt, d. h. dass die obere Permutation zuerst dem allgemeinen Cyclus:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{9}\,0\,8\,4\,\mathbf{3}\,5\,2\,\mathbf{1}\,7\,6 \\ \mathbf{1}\,0\,8\,4\,\mathbf{9}\,5\,2\,\mathbf{3}\,7\,6 \end{pmatrix}$$

unterworfen wurde. In dem Resultat dieser Substitution, d. h. in der untern Permutation dieses Ausdruckes S_1, trat hierauf an Stelle der 0 der Index 6, an Stelle von 6 der Index 7, an Stelle von 7 der Index 4, endlich an Stelle von 4 wieder der Index Null, d. h. sie wurde einer Veränderung unterworfen, bewirkt durch den allgemeinen Cyclus:

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1\,\mathbf{0}\,8\,\mathbf{4}\,9\,5\,2\,3\,\mathbf{7}\,\mathbf{6} \\ 1\,\mathbf{6}\,8\,\mathbf{0}\,9\,5\,2\,3\,\mathbf{4}\,\mathbf{7} \end{pmatrix}.$$

Aus der untern Permutation der Substitution S_2 gelangt man endlich zur gesuchten untern Permutation im Ausdrucke S, indem man 8 durch 5, 5 durch 2 und 2 wieder durch 8 ersetzt, also auf sie den allgemeinen Cyclus anwendet:

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1\,6\,\mathbf{8}\,0\,9\,\mathbf{5}\,\mathbf{2}\,3\,4\,7 \\ 1\,6\,\mathbf{5}\,0\,9\,\mathbf{2}\,\mathbf{8}\,3\,4\,7 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen somit, die allgemeine Substitution S lässt sich ersetzen durch die drei allgemeinen Cyclen S_1, S_2, S_3.

Die Anzahl der Cyclen, die für eine allgemeine Substitution eintreten können, lässt sich nicht von vornherein angeben; sie lässt sich aber rasch ermitteln, wenn man, etwa von der ersten Ziffer links ausgehend, nach der im vorstehenden Beispiele dreimal angegebenen Methode verfährt. Jedesmal wenn wir auf diese Weise zur Ausgangsziffer zurückkehren, ist der erste Cyclus geschlossen, und die Ermitt-

lung des zweiten Cyclus kann dann mit dem nächsten Index, der nicht schon im ersten enthalten ist, begonnen werden.

Es kann natürlich eintreten, dass überhaupt nur Ein Cyclus auftritt, d. h. dass die allgemeine Substitution selbst einen einzigen Cyclus darstellt, wie in dem Beispiele:

$$S = \begin{pmatrix} 5\,9\,8\,2\,3\,4\,1\,7\,6 \\ 9\,2\,5\,1\,4\,6\,3\,8\,7 \end{pmatrix} \tag{2}$$

oder aber auch, dass S Cyclen enthält mit einem einzigen Elemente, wie z. B. die Substitution

$$S = \begin{pmatrix} 5\,1\,8\,2\,3\,4\,7\,6 \\ 2\,1\,5\,4\,3\,6\,8\,7 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Sie zerfällt in den Cyclus $\begin{pmatrix} 5\,2\,4\,6\,7\,8 \\ 2\,4\,6\,7\,8\,5 \end{pmatrix}$ mit sechs Elementen und in die beiden eingliedrigen Cyclen (1), (3).

Hat man nun auf die angegebene Art die Zahl ν der Cyclen ermittelt, welche eine allgemeine Substitution vertreten können, so erhält man die Zahl der allgemeinen Vertauschungen in folgender Weise. Sei die Zahl der Elemente des ersten Cyclus α_1, die des zweiten $\alpha_2 \ldots$ u. s. w., die des ν^{ten} α_ν, dann ist, weil ja alle Elemente durch alle Cyclen erschöpft sein müssen, $\Sigma\alpha_\varrho = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_\nu = n$. Nun besteht aber nach Nr. 8 der allgemeine Cyclus von α_ϱ Elementen aus $\alpha_\varrho - 1$ Vertauschungen, daher ist die Summe aller allgemeinen Vertauschungen, welche die allgemeine Substitution ersetzen können, gleich

$$\Sigma\alpha_\varrho - (1 + 1 + \cdots \nu \text{ mal}) = n - \nu.$$

Es mag hier nochmals erwähnt werden, dass diese Anzahl lediglich abhängig ist von der hier eingeschlagenen Methode, sie zu ermitteln.

10. *Bestimmung der Hauptklasse* (siehe Nr. 4), *der eine Substitution angehört.* Diese Aufgabe könnte am Besten am Differenzenproduct direct erledigt werden, indem man an demselben der Reihe nach die einzelnen Vertauschungen vornimmt. Doch möchte sie vielleicht unter Berücksichtigung einzelner Merkmale der Substitutionen, die wir nun besprochen haben, leichter zu lösen sein. Wir sehen nämlich Folgendes:

α) Da sich die einfache Vertauschung auf eine einzige bestimmte, wenn auch willkürlich gegebene Permutation bezieht, so können wir der Einfachheit halber annehmen, diese willkürlich gegebene sei die *gut geordnete* Permutation. Dies vorausgesetzt, kann eine einfache Vertauschung zweier Nachbarindices α_ϱ und $\alpha_{\varrho+1}$, die also natürlich nur mehr um 1 verschieden sein können, angewendet auf das Differenzenproduct der Indices, nur das Vorzeichen der einzigen Differenz $(\alpha_\varrho - \alpha_{\varrho+1})$ ändern, da in allen übrigen Differenzen der Abstand der



Indices von dem Index α_ϱ bezw. $\alpha_{\varrho+1}$ mindestens zwei Einheiten beträgt, also eine Veränderung des Minuenden oder Subtrahenden um 1 keine Vorzeichenänderung zur Folge haben kann. Demnach ändert mit diesem einzelnen Factor $(\alpha_\varrho - \alpha_{\varrho+1})$ das ganze Product sein Zeichen, d. h.: „Die einfache Vertauschung gehört der zweiten Hauptklasse an.“ Damit ist aber auch die Classification der übrigen Substitutionen gewonnen.

β) Der einfache Cyclus von $\nu + 1$ Elementen gehört nach (6) der ersten oder zweiten Hauptklasse an, je nachdem ν (= der Zahl seiner einfachen Vertauschungen) gerade oder ungerade ist.

γ) Die allgemeine Vertauschung gehört immer der zweiten Hauptklasse an, da sie nach Nr. 7 aus $2\nu - 1$, also einer ungeraden Zahl einfacher Vertauschungen besteht.

δ) Der allgemeine Cyclus verhält sich wie der einfache, da ja die allgemeinen Vertauschungen, durch welche ersterer ersetzt werden kann, wie die einfachen Vertauschungen zur zweiten Hauptklasse gehören.

ε) Die beliebige Substitution endlich besteht aus $n - \nu$ allgemeinen Vertauschungen, wo n gleich der Zahl der Elemente und ν gleich der Zahl der die Substitution ersetzenden allgemeinen Cyclen ist. Je nachdem diese Differenz also gerade oder ungerade ist, gehört die Substitution zur ersten oder zweiten Hauptklasse.

11. Wir wenden diese Merkmale auf die bereits behandelten Beispiele an.

α) In der Permutation (5 3 4 2 1) ändert die einfache Vertauschung (2 1) das Vorzeichen des Differenzenproductes

$$\begin{array}{rrrr}(1-2)\,(1-3)\,(1-4)\,(1-5) = P \\ (2-3)\,(2-4)\,(2-5) \\ (3-4)\,(3-5) \\ (4-5)\end{array}$$

denn in ihm ändert nur der erste Factor sein Zeichen, die übrigen gehen ineinander über; man erhält

$$\begin{array}{r}(2-1)\,(2-3)\,(2-4)\,(2-5) = -P. \\ (1-3)\,(1-4)\,(1-5) \\ (3-4)\,(3-5) \\ (4-5).\end{array}$$

β) Der erste einfache Cyclus in Nr. 6:

$$\begin{pmatrix}2\,5\,3\,1\\5\,3\,1\,2\end{pmatrix}$$

setzte sich zusammen aus drei einfachen Vertauschungen (2 5), (2 3), (2 1),



also gehört er der zweiten Klasse an, während z. B. der einfache Cyclus

$$\begin{pmatrix}2\,5\,3\,1\,4\\2\,3\,1\,4\,2\end{pmatrix},$$

da er aus den vier einfachen Vertauschungen (2 5), (2 3), (2 1), (2 4) besteht, unter die erste Hauptklasse zu rechnen ist.

γ) Die allgemeine Vertauschung

$$S = \begin{pmatrix}2\,4\,1\,5\,3\,6\\6\,4\,1\,5\,3\,2\end{pmatrix} \text{ Nr. 7, Beispiel 1,}$$

wurde ersetzt durch die beiden einfachen Cyclen

$$S_1 = \begin{pmatrix}2\,4\,1\,5\,3\,6\\4\,1\,5\,3\,6\,2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_2 = \begin{pmatrix}4\,1\,5\,3\,6\\6\,4\,1\,5\,3\end{pmatrix};$$

der erste besteht aus fünf, der zweite aus vier einfachen Vertauschungen. Da die Summe derselben $= 9$ ist, so gehört S zur zweiten Klasse der Substitutionen; die Behauptung läſst sich leicht direct am Differenzenproduct verificiren.

δ) Die Substitution Nr. 7, Beispiel 2,

$$S = \begin{pmatrix}5\,7\,8\,2\,4\,1\,3\,6\\5\,4\,8\,2\,7\,1\,3\,6\end{pmatrix}$$

zerfiel in die Cyclen

$$S_1 = \begin{pmatrix}7\,8\,2\,4\\8\,2\,4\,7\end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix}8\,2\,4\\4\,8\,2\end{pmatrix},$$

deren erster aus den drei einfachen Vertauschungen (7 8), (7 2), (7 4), deren zweiter aus den zwei Vertauschungen (8 2), (8 4) besteht, ihre Summe ist $= 5$, also wiederum eine ungerade Zahl.

ε) Der allgemeine Cyclus

$$S = \begin{pmatrix}4\,3\,5\,1\,6\,2\\1\,2\,5\,3\,6\,4\end{pmatrix}$$

in Nr. 8 wurde zerlegt in die drei allgemeinen Vertauschungen

$$S_1 = \begin{pmatrix}4\,3\,5\,1\,6\,2\\1\,3\,5\,4\,6\,2\end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix}1\,3\,5\,4\,6\,2\\1\,4\,5\,3\,6\,2\end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix}1\,4\,5\,3\,6\,2\\1\,2\,5\,3\,6\,4\end{pmatrix}.$$

Für S_1 ist die Differenz der zu vertauschenden Stellenzahlen $\nu_1 = 3$, daher die zugehörige Zahl der einfachen Vertauschungen $2\nu_1 - 1 = 5$. Ferner ist das zu S_2 gehörige $\nu_2 = 2$, die Zahl der einfachen Vertauschungen $2\nu_2 - 1 = 3$, endlich das zu S_3 gehörige $\nu_3 = 4$, die Zahl der einfachen Vertauschungen $2\nu_3 - 1 = 7$. Die Summe aller Vertauschungen ist also $5 + 3 + 7 = 15$.

Daher gehört S der zweiten Hauptklasse an.

Analysiren wir auf die gleiche Weise das im nämlichen Abschnitt gegebene zweite Beispiel, so finden wir

$$2\nu_1 - 1 = 3, \quad 2\nu_2 - 1 = 3, \quad 2\nu_3 - 1 = 3, \quad 2\nu_4 - 1 = 3.$$

Die Summe dieser vier ungeraden Zahlen giebt eine gerade, d. h. diese Substitution gehört der ersten Hauptklasse an.

ζ) Betrachten wir endlich die beliebige Substitution

$$S = \begin{pmatrix} 9\,0\,8\,4\,3\,5\,2\,1\,7\,6 \\ 1\,6\,5\,0\,9\,2\,0\,3\,4\,7 \end{pmatrix}$$

in Nr. 9. Wir zerlegten sie in die drei allgemeinen Cyclen

$$S_1 = \begin{pmatrix} 9\,0\,8\,4\,3\,5\,2\,1\,7\,6 \\ 1\,0\,8\,4\,9\,5\,2\,3\,7\,6 \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1\,0\,8\,4\,9\,5\,2\,3\,7\,6 \\ 1\,6\,8\,0\,8\,5\,2\,3\,4\,7 \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1\,6\,8\,0\,9\,5\,2\,3\,4\,7 \\ 1\,6\,5\,0\,9\,2\,8\,3\,4\,7 \end{pmatrix},$$

deren einfache sind

$$\begin{pmatrix} 9\,3\,1 \\ 1\,9\,3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0\,4\,7\,6 \\ 6\,0\,4\,7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 8\,5\,2 \\ 5\,2\,8 \end{pmatrix}.$$

Zum ersten Cyclus gehören also zwei, zum zweiten drei, zum dritten wieder zwei allgemeine Vertauschungen. Die Anzahl derselben ist somit $= 7$, und weil jede allgemeine Vertauschung nur in eine ungerade Zahl von einfachen aufgelöst werden kann, so ist die Klasse dieser Substitution die zweite.

η) Dagegen gehört die Substitution

$$S = \begin{pmatrix} 5\,6\,7\,3\,4\,2 \\ 3\,4\,6\,2\,7\,5 \end{pmatrix},$$

welche sich in zwei allgemeine Cyclen spaltet, denen die drei einfachen

$$\begin{pmatrix} 5\,3\,2 \\ 3\,2\,5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 6\,4\,7 \\ 4\,7\,6 \end{pmatrix}$$

entsprechen, zur ersten Hauptklasse, weil in den zwei allgemeinen Cyclen je drei Elemente mitspielen, so dafs dieselben zusammen durch $2 + 2 = 4$, d. i. eine gerade Anzahl allgemeiner Vertauschungen ersetzt werden können.

12. *Classification der Substitution durch Abzählung der Derangements.* Ein weiteres Mittel die Klasse einer Substitution S zu bestimmen, liefert auch die Abzählung der Derangements in den beiden Permutationen von S. Es gilt nämlich der Satz:

„Gehört eine Substitution der ersten Klasse an, so ist die Differenz der Derangements in der obern und untern Permutation eine gerade, gehört sie der zweiten Klasse an, eine ungerade Zahl.“

Wir können diese Behauptung mit den bisherigen Kriterien leicht in Einklang bringen. Jede einfache Vertauschung an der obern Permutation hat nämlich eine Vermehrung oder Verminderung der Anzahl der Derangements um eine und nur eine Einheit zur Folge. Lässt sich nun die Substitution durch p einfache Vertauschungen ersetzen, so wird auch die Zahl der Derangements bei successiver Anwendung dieser p Operationen stetig um eine Einheit immer vermehrt oder vermindert. Die algebraische Summe dieser Aenderungen ist also gleichzeitig mit p gerade oder ungerade; und damit ist die Behauptung erwiesen.

Um die Klasse zu charakterisiren, welcher eine Substitution angehört, führen wir die Gröfse ε_S ein, welche wir den *Modul* der Substitution nennen wollen. Wir bestimmen dann denselben so, dafs er, wenn S der ersten Klasse angehört, den Werth $\varepsilon_S = +1$, im andern Falle den Werth $\varepsilon_S = -1$ habe.

Die oben erwähnte Methode der Klassenbestimmung wollen wir noch am vorletzten Beispiel von Nr. 11 erläutern.

Die gegebene Substitution ist:

$$S = \begin{pmatrix} 9\,0\,8\,4\,3\,5\,2\,1\,7\,6 \\ 1\,6\,5\,0\,9\,2\,8\,3\,4\,7 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen zuerst durch die in (3) erwähnte Theilung die Anzahl der Derangements in der obern Permutation.

Trennen wir:

$$(9\,0\,8\,4\,3 \mid 5\,2\,1\,7\,6),$$

dann ist: (1.) die Zahl der Derangements vor dem Verticalstrich $4 + 2 + 1 = 7$; (2.) hinter demselben gleich $2 + 1 + 1 = 4$; (3.) die Zahl jener, welche die erste Gruppe in Bezug auf die zweite bildet, gleich $9 + 0 + 8 + 4 + 3 - \frac{5 \cdot 6}{2} = 8$; also die Summe aller $= 19$. Ebenso findet man die Zahl der Derangements in der untern Permutation $= 12$. Die Differenz beider Anzahlen ist 7, was mit der dort gefundenen Zahl allgemeiner Vertauschungen übereinstimmt. Die Substitution gehört also zur zweiten Klasse und hat somit den Modul $\varepsilon_S = -1$.

§ 2. Begriff der Determinanten.

13. *Verwendung der Substitutionen zur Herstellung aller Glieder einer Determinante.* Es seien gegeben die n^2 Elemente:

$$a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n};\ a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2n};\ \ldots a_{i1}, a_{i2} \ldots a_{ik} \ldots a_{in};\ \ldots a_{n1}, a_{n2} \ldots a_{nn},$$

die wir also durch *zwei* angehängte Zeiger, *Doppelindices* genannt, von einander unterscheiden wollen. Jeder Substitution, gebildet aus den

n einfachen Indices $1, 2, 3, \ldots n$, kann man ein Product G, gebildet aus n Elementen a_{ik} zuordnen, wie es die folgenden Beispiele lehren mögen.

α) Sei $n = 6$; die 36 Elemente sind alsdann:

$$a_{11}, a_{12} \ldots a_{16}; a_{21}, a_{22} \ldots a_{26}; \ldots a_{i1}, a_{i2} \ldots a_{i6}; \ldots a_{61}, a_{62} \ldots a_{66};$$

ferner sei gegeben die Substitution

$$S = \begin{pmatrix} 5\,6\,2\,1\,3\,4 \\ 3\,6\,2\,4\,1\,5 \end{pmatrix},$$

mit dem Modul

$$\varepsilon_S = -1,$$

da die Differenz der Derangements $9 - 8 = 1$ ist. Wir lassen der Substitution S das Product entsprechen

$$G = -a_{53}\, a_{66}\, a_{22}\, a_{14}\, a_{31}\, a_{45}.$$

Da die Doppelindices der ausgewählten Elemente a_{ik} gerade die untereinander stehenden Zahlenpaare der Substitution S sind, so ist klar, dass allen N Ausdrücken für ein und dieselbe Substitution immer ein und dasselbe Product G auf diese Art zugeordnet ist. Dasselbe hängt also lediglich von der Substitution ab und nicht von der speciellen Permutation, auf welche diese etwa angewendet wurde.

β) $n = 5$, $S = \begin{pmatrix} 4\,1\,2\,5\,3 \\ 1\,2\,5\,3\,4 \end{pmatrix}$, also $\varepsilon_S = +1$;

daher $\qquad G = +a_{41}\, a_{12}\, a_{25}\, a_{53}\, a_{34}.$

γ) $n = 7$, $S = \begin{pmatrix} 0\,1\,3\,6\,5\,4\,2 \\ 1\,0\,6\,4\,2\,3\,5 \end{pmatrix}$, also $\varepsilon_S = -1$;

daher $\qquad G = -a_{01}\, a_{10}\, a_{36}\, a_{64}\, a_{52}\, a_{43}\, a_{25}.$

Den beiden Hauptklassen der Substitutionen S entsprechen also auch zwei Hauptklassen von Producten G, die erste mit positivem Vorzeichen, die zweite mit negativem. Die Aufgabe, alle Producte G zu bilden, können wir lösen, indem wir zunächst alle Substitutionen S bestimmen. Dabei können wir unter anderm entweder die gut geordnete Permutation als die obere wählen — das liefert eine erste Art die Substitutionen aufzustellen; oder aber sie als die untere verwenden — das liefert eine zweite Art.

Haben wir alsdann den Modul ε_S jeder Substitution ermittelt, so ordnen wir endlich jeder das Product jener Elemente a_{ik} zu, deren Doppelindices gerade die untereinander stehenden Zahlenpaare in S bilden.

Wir wollen in den folgenden Beispielen die Producte G für $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ berechnen, indem wir dabei die Substitutionen nach der ersten Art aufstellen.

α) $n = 2$.

$$\begin{cases} \text{Substitutionen:} & \binom{1\,2}{1\,2}, & \binom{1\,2}{2\,1}. \\ \text{Modul } \varepsilon_S: & +1, & -1. \\ \text{Product } G: & +a_{11}\,a_{22}, & -a_{12}\,a_{21}. \end{cases}$$

β) $n = 3$.

Substitutionen: $\binom{1\,2\,3}{1\,2\,3}\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}\binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$.

Modul ε_S: $+1 \quad -1 \quad -1 \quad +1 \quad +1 \quad -1$.

Producte G: $+a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$, $-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$, $-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$, $+a_{12}\,a_{23}\,a_{31}$, $+a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$, $-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$.

γ) $n = 4$.

Substit.	Modul	Product G_i	Substit.	Modul	Product G_i
$\binom{1\,2\,3\,4}{1\,2\,3\,4}$	$+1$	$+a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}$	$\binom{1\,2\,3\,4}{3\,1\,2\,4}$	$+1$	$+a_{13}\,a_{21}\,a_{32}\,a_{44}$
$\binom{1\,2\,3\,4}{1\,2\,4\,3}$	-1	$-a_{11}\,a_{22}\,a_{34}\,a_{43}$	$\binom{1\,2\,3\,4}{3\,1\,4\,2}$	-1	$-a_{13}\,a_{21}\,a_{34}\,a_{42}$
$\binom{1\,2\,3\,4}{1\,3\,2\,4}$	-1	$-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}\,a_{44}$	$\binom{1\,2\,3\,4}{3\,2\,1\,4}$	-1	$-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}\,a_{44}$
$\binom{1\,2\,3\,4}{1\,3\,4\,2}$	$+1$	$+a_{11}\,a_{23}\,a_{34}\,a_{42}$	$\binom{1\,2\,3\,4}{3\,2\,4\,1}$	$+1$	$+a_{13}\,a_{22}\,a_{34}\,a_{41}$
$\binom{1\,2\,3\,4}{1\,4\,2\,3}$	$+1$	$+a_{11}\,a_{24}\,a_{32}\,a_{43}$	$\binom{1\,2\,3\,4}{3\,4\,1\,2}$	$+1$	$+a_{13}\,a_{24}\,a_{31}\,a_{42}$
$\binom{1\,2\,3\,4}{1\,4\,3\,2}$	-1	$-a_{11}\,a_{24}\,a_{33}\,a_{42}$	$\binom{1\,2\,3\,4}{3\,4\,2\,1}$	-1	$-a_{13}\,a_{24}\,a_{32}\,a_{41}$
$\binom{1\,2\,3\,4}{2\,1\,3\,4}$	-1	$-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}\,a_{44}$	$\binom{1\,2\,3\,4}{4\,1\,2\,3}$	-1	$-a_{14}\,a_{21}\,a_{32}\,a_{43}$
$\binom{1\,2\,3\,4}{2\,1\,4\,3}$	$+1$	$+a_{12}\,a_{21}\,a_{34}\,a_{43}$	$\binom{1\,2\,3\,4}{4\,1\,3\,2}$	$+1$	$+a_{14}\,a_{21}\,a_{33}\,a_{42}$
$\binom{1\,2\,3\,4}{2\,3\,1\,4}$	$+1$	$+a_{12}\,a_{23}\,a_{31}\,a_{44}$	$\binom{1\,2\,3\,4}{4\,2\,1\,3}$	$+1$	$+a_{14}\,a_{22}\,a_{31}\,a_{43}$
$\binom{1\,2\,3\,4}{2\,3\,4\,1}$	-1	$-a_{12}\,a_{23}\,a_{34}\,a_{41}$	$\binom{1\,2\,3\,4}{4\,2\,3\,1}$	-1	$-a_{14}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{41}$
$\binom{1\,2\,3\,4}{2\,4\,1\,3}$	-1	$-a_{12}\,a_{24}\,a_{31}\,a_{43}$	$\binom{1\,2\,3\,4}{4\,3\,1\,2}$	-1	$-a_{14}\,a_{23}\,a_{31}\,a_{42}$
$\binom{1\,2\,3\,4}{2\,4\,3\,1}$	$+1$	$+a_{12}\,a_{24}\,a_{33}\,a_{41}$	$\binom{1\,2\,3\,4}{4\,3\,2\,1}$	$+1$	$+a_{14}\,a_{23}\,a_{32}\,a_{41}$

14. *Definition der Determinante.* Man nennt nun die Summe aller Producte G, welche sich auf diese Weise durch die Substitutionen von n Indices bilden lassen: die Determinante des Systemes der n^2

Elemente a_{ik}. Eine solche Determinante, die wir mit Δ bezeichnen wollen, ist also dargestellt in dem Ausdrucke

$$(1) \qquad \Delta = \sum_{i=1}^{i=N} G_i,$$

wobei die G_i in der Weise gewonnen werden, dafs man zuerst alle möglichen Substitutionen der n Indices bildet, den zugehörigen Modul bestimmt, und nun jeder Substitution das entsprechende G zuordnet.

Statt nun aber eine Determinante durch die in (1) angegebene Summe auszudrücken, wählt man meist die folgende Schreibweise

$$(2) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

So ist die Determinante der in Beispiel 4 des vorigen Absatzes entwickelten Glieder gegeben durch

$$(3) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \Sigma G_i.$$

Der rechts befindliche Ausdruck ist nur ein Schema, eine Form für die Anordnung der Elemente, und als solche Form belegen wir sie nicht mit dem Namen Determinante, sondern mit dem Namen *Matrix*. Den wirklichen Werth derselben stellt dann der Ausdruck

$$(1) \qquad \Delta = \Sigma G_i$$

dar. Es ist nicht nöthig, dass in einem solchen Schema stets ebenso viele horizontale Zeilen von Elementen auftreten als verticale Reihen (Colonnen). So kann man auch die Matrix bilden

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m2} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

wo $m \lesseqgtr n$ ist; in ihr ordnen die Elemente sich in n Reihen, dagegen in m Zeilen. In diesem Fall aber repräsentirt die Matrix keinen numerischen Werth, während, wenn die Zahl der Zeilen mit denen der Colonnen übereinstimmt, dieselbe einen solchen besitzt, den man mittels der Summe (1) darstellen kann. Die Producte G_i nennt man Glieder,

ihre Factoren a_{ik} Elemente der Determinante. Der erste Index eines solchen Elementes zeigt an, welcher Zeile, der zweite, welcher Vertical-Reihe oder Colonne es angehört. Man sagt, die Determinante ist n-gliedrig oder n^{ter} Ordnung, so bald sie n^2 Elemente besitzt.

15. *Berechnung des Werthes einer Determinante aus ihrer Matrix.* Ist eine Matrix von n Zeilen und n Colonnen gegeben, so fragt sich, wie bestimmt man daraus den Werth derselben, also die zugehörige Determinante, d. h. wie findet man die einzelnen Glieder G_i einer solchen Summe

$$\Delta = \Sigma G_i. \tag{1}$$

Nun sieht man aber leicht — man vergleiche z. B. die 24 Glieder im Beispiel γ) Nr. 13 — dass, weil einmal alle ersten Indices der n Elemente eines Gliedes von einander verschieden sind, dann aber, weil auch keine zwei der zweiten Indices in einem Gliede übereinstimmen, jede Zeile und jede Colonne nur durch ein einziges Element in einem Gliede vertreten sein kann. Also hat man das Gesetz: Jedes Glied enthält ein und nur ein Element jeder Zeile und jeder Colonne, und wir erhalten also alle G_i, wenn wir sämmtliche Producte bilden, in denen dieses Gesetz beachtet ist. Wir haben aber bereits in Nr. 13 gesehen, wie man systematisch zu diesen Producten gelangen kann, und können nach dieser an den Beispielen α), β), γ) entwickelten Methode direct die Summe aller Glieder einer Determinante schematisch anschreiben. Es ist also:

α)
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{i=2!} \pm G_i = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

wenn wir die Glieder aus solchen Substitutionen ableiten, bei denen die gut geordnete Permutation sich oben befindet; oder:

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

wenn bei den entsprechenden Substitutionen die gut geordnete Permutation unten ist.

β)
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=3!} \pm G_i = + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

oder

$$= + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13},$$

wo wieder in der ersten Summe Substitutionen mit geordneter Permutation oben, in der zweiten Summe solche mit gutgeordneten Permutanten benutzt wurden.

γ)
$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{i=4!=24} \pm G_i .$$

Die Glieder dieser Summe, nach der ersten Art ermittelt, sind bereits in Beispiel γ) Nr. 13 angegeben.

Wir wollen sie hier noch in der Gestalt geben, wie sie die zweite Art liefert. Man erhält:

$$\begin{aligned} \Delta_4 = \Sigma \pm G_i = \; & a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} - a_{21} a_{12} a_{33} a_{44} + a_{31} a_{12} a_{23} a_{44} - a_{41} a_{12} a_{23} a_{34} \\ & - a_{11} a_{22} a_{43} a_{34} + a_{21} a_{12} a_{43} a_{34} - a_{31} a_{12} a_{43} a_{24} + a_{41} a_{12} a_{33} a_{24} \\ & - a_{11} a_{32} a_{23} a_{44} + a_{21} a_{32} a_{13} a_{44} - a_{31} a_{22} a_{13} a_{44} + a_{41} a_{22} a_{13} a_{34} \\ & + a_{11} a_{32} a_{43} a_{24} - a_{21} a_{32} a_{43} a_{14} + a_{31} a_{22} a_{34} a_{14} - a_{41} a_{22} a_{33} a_{14} \\ & + a_{11} a_{42} a_{23} a_{34} - a_{21} a_{24} a_{31} a_{43} + a_{31} a_{42} a_{13} a_{24} - a_{41} a_{32} a_{13} a_{24} \\ & - a_{11} a_{42} a_{33} a_{24} + a_{21} a_{34} a_{33} a_{41} - a_{31} a_{42} a_{23} a_{14} + a_{41} a_{32} a_{23} a_{14} . \end{aligned}$$

Dabei sind die Glieder, welche der nämlichen Permutationsklasse angehören, immer unter einander geschrieben.

Mit Hilfe dieser Formeln α), β), γ) können wir nun leicht den Werth einer 2-, 3- oder 4gliederigen Determinante bestimmen.

Beispiele:

1. $$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 3 \cdot 12 - 6 \cdot 5 = 6 .$$

2. $$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = 8 .$$

3. $$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 18 = -18 .$$

4. $$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} \begin{aligned} & = 2 \cdot 1 \cdot 7 - (-2 \cdot 3 \cdot 6) - 5 \cdot 4 \cdot 7 \\ & + 5 \cdot 6 \cdot 1 + (4 \cdot 4 \cdot -3) - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 14 \\ & + 36 - 140 + 30 - 48 - 4 = -112 . \end{aligned}$$

5. $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 2 = +4 .$$

6. $$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 12 \\ 1 & 5 & 03 \\ 2 & -2 & 16 \\ 0 & 4 & -53 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{llll}
= 3\cdot\ \ 5\cdot\ \ 1\cdot 3 & -1\cdot\ \ 1\cdot\ \ 1\cdot 3 & +2\cdot 1\cdot\ \ 0\cdot 3 & -0\cdot\ \ 1\cdot 0\cdot 6 \\
-3\cdot\ \ 5\cdot -5\cdot 6 & +1\cdot\ \ 1\cdot -5\cdot 6 & -2\cdot 1\cdot -5\cdot 3 & +0\cdot\ \ 1\cdot 1\cdot 3 \\
-3\cdot -2\cdot\ \ 0\cdot 3 & +1\cdot -2\cdot\ \ 1\cdot 3 & -2\cdot 5\cdot\ \ 1\cdot 3 & +0\cdot\ \ 5\cdot 1\cdot 6 \\
+3\cdot -2\cdot -5\cdot 3 & -1\cdot -2\cdot -5\cdot 2 & +2\cdot 5\cdot -5\cdot 2 & -0\cdot\ \ 5\cdot 1\cdot 2 \\
+3\cdot\ \ 4\cdot\ \ 0\cdot 6 & -1\cdot\ \ 4\cdot\ \ 1\cdot 6 & +2\cdot 4\cdot\ \ 1\cdot 3 & -0\cdot -2\cdot 1\cdot 3 \\
-3\cdot\ \ 4\cdot\ \ 1\cdot 3 & +1\cdot\ \ 4\cdot\ \ 1\cdot 2 & -2\cdot 4\cdot\ \ 0\cdot 2 & +0\cdot -2\cdot 0\cdot 2
\end{array}$$

$$= 45 + 450 + 90 - 36 - 3 - 30 - 6 - 20 - 24 + 8$$
$$+ 30 - 30 - 100 + 24 = 647 - 249 = 398.$$

7. $$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 5\cdot 2\cdot 1 \\ + 1\cdot 5\cdot 2\cdot 3 = 1 - 4 - 10 + 30 = 17. \end{array}$$

16. *Methode zur Aufstellung von Lehrsätzen über Determinanten.* Diese Art der Werthbestimmung einer Determinante ist indess im Allgemeinen noch ziemlich mühevoll. Zahlreiche Determinantenlehrsätze werden den Weg wesentlich abkürzen. Um aber zu diesen Lehrsätzen über Determinanten zu gelangen, werden wir stets zwei Matrices von derselben Elementenzahl

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots \ldots a_{2n} \\ a_{31}\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \ldots\ a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{vmatrix} b_{11}\ b_{12}\ b_{13} \ldots b_{1n} \\ b_{21}\ b_{22}\ \ldots \ldots b_{2n} \\ b_{31}\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}\ b_{n2}\ \ldots \ldots b_{nn} \end{vmatrix}$$

vergleichen. Beziehungen zwischen den einzelnen Elementen a_{ik} und b_{ik}, werden sodann auch Veranlassung geben zu einer Relation zwischen den Determinanten $\varDelta$ und D selbst.

17. *Die Transposition.* Setzen wir fest, dass die Elemente in D und $\varDelta$ durch die Bedingung $a_{ik} = b_{ki}$ mit einander verknüpft seien, also dass z. B. für $n = 3$ die 9 Relationen bestehen:

$$a_{11} = b_{11},\ a_{12} = b_{21},\ a_{13} = b_{31};\ a_{21} = b_{12},\ a_{22} = b_{22},\ a_{32} = b_{23};$$
$$a_{31} = b_{13},\ \ a_{32} = b_{23},\ \ a_{33} = b_{33},$$

so lässt sich die Frage stellen: In welcher Beziehung stehen dann die Werthe $\varDelta$ und D?

Um dieselbe zu erkennen, bilde ich einmal alle Glieder G_i von $\varDelta$, indem ich die Substitutionen zu Grunde lege mit gut geordneter Permutation oben; also für $n = 3$ die Substitutionen:

$$\binom{1\,2\,3}{1\,2\,3},\ \binom{1\,2\,3}{1\,3\,2},\ \binom{1\,2\,3}{2\,1\,3},\ \binom{1\,2\,3}{2\,3\,1},\ \binom{1\,2\,3}{3\,1\,2},\ \binom{1\,2\,3}{3\,2\,1};$$

und folglich die Glieder G_i:

$$+a_{11}\,a_{22}\,a_{33},\ -a_{11}\,a_{23}\,a_{32},\ -a_{12}\,a_{21}\,a_{33},\ +a_{12}\,a_{23}\,a_{31},$$
$$+a_{13}\,a_{21}\,a_{32},\ -a_{13}\,a_{22}\,a_{31}.$$

Sodann stelle ich die Glieder $\overline{G_i}$ von Δ auf unter Benützung der Substitutionen, welche die gut geordneten Permutationen unten haben; also die Substitutionen:

$$\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\,3\,2\\1\,2\,3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\,1\,3\\1\,2\,3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\,3\,1\\1\,2\,3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3\,1\,2\\1\,2\,3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3\,2\,1\\1\,2\,3\end{pmatrix},$$

und folglich die Glieder $\overline{G_i}$:

$$+b_{11}\,b_{22}\,b_{33},\ \ -b_{11}\,b_{32}\,b_{23},\ \ -b_{21}\,b_{12}\,b_{33},\ \ +b_{21}\,b_{32}\,b_{13},$$
$$+b_{31}\,b_{12}\,b_{23},\ \ -b_{31}\,b_{22}\,b_{13}.$$

Setzt man aber in diese Reihe der Glieder $\overline{G_i}$ die Werthe der $b_{ki}=a_{ik}$ ein, so stimmt dieselbe im Modul wie in den Doppelindices der Elemente gerade mit der Reihe der Glieder G_i überein, und es ist daher nothwendig

$$(1)\qquad \sum_1^6 G_i = \sum_1^6 \overline{G_i}.$$

Genau dieselbe Uebereinstimmung beider Reihen der G_i und $\overline{G_i}$ hinsichtlich der Aufeinanderfolge dieser Glieder, ihrer Modul und der Doppelindices ihrer Elemente liefert diese Methode auch im allgemeinen Falle, d. h. es ist

$$(2)\qquad \sum_1^N G_i = \sum_1^N \overline{G_i}.$$

Trägt man nun aber auch in die Matrix der Determinante D die aus den n^2 Relationen sich bietenden Werthe von b_{ik} ein, so kommt:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Vergleicht man diese Matrix mit der Matrix der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

so erkennt man, dass nur die in der Diagonale dieses Schemas befind-

lichen Elemente $a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$ ihre alten Plätze behalten haben, während alle übrigen an solchen Stellen in D stehen, die man aus ihrer alten Lage dadurch erhält, dass man die Matrix von $\varDelta$ um ihre erste Diagonale $a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$ umklappt. Dabei sind also die Colonnen zu Zeilen, die Zeilen zu Colonnen geworden, und eine solche Vertauschung der Elemente einer Matrix nennt man *Transposition* der Matrix. Also hat man in Verbindung mit Gleichung (1) den Satz:

„*Der Werth einer Determinante ändert sich nicht, wenn man ihre Matrix transponirt.*"

Beispiele:

1. $$\varDelta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 3 \cdot 12 - 5 \cdot 6 = 6.$$

2. Transponirt man die 4. Determinante unter den Beispielen zu Nr. 15, so findet man

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 7 \end{vmatrix} = -112.$$

3. $$\varDelta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ p & q & r & s \\ 0 & u & v & w \end{vmatrix} \begin{aligned} &= aerw - aevs - aqfw + aqvg \\ &+ aufs - aurg + pbfw - pbvg \\ &- pecw + pevd + pucg - pufd. \end{aligned}$$

Ganz ebenso liefert aber

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a & 0 & p & 0 \\ b & e & q & u \\ c & b & r & v \\ d & g & s & w \end{vmatrix} \begin{aligned} &= aerw - aesv - afqw + afsu \\ &+ agqv - agur + bfpw - bpvg \\ &- cepw + cgpu + depv - dfpu. \end{aligned}$$

18. *Andere übersichtliche Bezeichnungen für eine Determinante.* Die Elemente der *ersten Diagonale* $a_{11}, a_{22}, a_{33} \ldots a_{nn}$ behalten bei der Transposition, wie schon erwähnt, ihre Stellen bei. Sie bilden ein ausgezeichnetes Glied in der Summe ΣG_i, das man nach der Stellung seiner Elemente in der Matrix *Diagonalglied* oder auch *Hauptglied* nennt, aus dem alle andern Glieder durch Permutation aller ersten, oder auch der zweiten Indices abgeleitet werden können. Man schreibt daher eine Determinante auch in der Form

$$\varDelta = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \cdots a_{nn}.$$

Häufig macht man auch noch von einer andern Schreibweise Gebrauch, die gleichfalls in einer Auszeichnung des Diagonalgliedes beruht und insbesondere dann angewendet wird, wenn die Elemente einer Matrix

[illegible] sondern durch einfache auseinandergehalten [illegible] an Stelle eines zweiten Index ein anderer Buchstabe [illegible].

[illegible] man die Determinanten

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

[illegible] ihre Diagonale durch $\Delta = (a_1\, b_2)$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

[illegible] $\Delta = (a_1\, b_2\, c_3)$.

[illegible] Missverständniss eintreten, so lässt man selbst die [illegible] Indices weg, und schreibt beispielsweise statt

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1\, b_2 - b_1\, a_2,$$

[illegible]

$$\Delta = (ab).$$

10. *Vertauschung zweier Zeilen.* Seien wieder die beiden Determinanten Δ und D gegeben; zwischen den Elementen sollen alsdann die n^2 Relationen bestehen:

$$1)\ \begin{cases} a_{1i} = b_{2i}, \\ a_{2i} = b_{1i}, \end{cases}$$

$$2)\quad a_{ik} = b_{ik},\ i > 2,$$

d. h. es soll sein z. B. für $n = 3$

$$\begin{array}{llll} 1) & a_{11} = b_{21}, & a_{12} = b_{22}, & a_{13} = b_{23}; \\ 2) & a_{21} = b_{11}, & a_{22} = b_{12}, & a_{23} = b_{13}; \\ 3) & a_{31} = b_{31}, & a_{32} = b_{32}, & a_{33} = b_{33}. \end{array}$$

Wir bilden wiederum sowohl die Glieder G_i als die $\overline{G}_i$, und zwar die G_i unter Zugrundelegung der Substitutionen, deren obere Permutation die gut geordnete ist, die $\overline{G}_i$ aber durch Substitutionen, deren obere Permutation aus der gut geordneten durch die einfache Vertauschung (1 2) hervorgeht. So ist also in unserm Beispiel für $n = 3$ die Substitutionenreihe für die Glieder G_i:

$$\binom{1\,2\,3}{1\,2\,3},\ \binom{1\,2\,3}{1\,3\,2},\ \binom{1\,2\,3}{2\,1\,3},\ \binom{1\,2\,3}{2\,3\,1},\ \binom{1\,2\,3}{3\,1\,2},\ \binom{1\,2\,3}{3\,2\,1},$$

für die Glieder $\overline{G}_i$:

$$\binom{2\,1\,3}{1\,2\,3},\ \binom{2\,1\,3}{1\,3\,2},\ \binom{2\,1\,3}{2\,1\,3},\ \binom{2\,1\,3}{2\,3\,1},\ \binom{2\,1\,3}{3\,1\,2},\ \binom{2\,1\,3}{3\,2\,1}.$$

Bestimmt man nun zu jeder Substitution den Modul und bildet hierauf die entsprechenden Glieder G_i und $\overline{G}_i$, so bemerkt man, dass immer nur die beiden ersten Factoren a_{ik}, bezw. b_{ik} in ihren Doppelindices von einander abweichen bei je zwei Gliedern G_i und $\overline{G}_i$, welche dieselbe Permutation der zweiten Indices haben, und dass, weil die Anfangssubstitutionen schon verschiedene Moduln haben und alle späteren durch die nämliche Anzahl einfacher Vertauschungen entstehen, die Vorzeichen je zweier solcher Glieder entgegengesetzt sein müssen. So sind in unserm Beispiel die Glieder

$$G_i = + a_{11}\, a_{22}\, a_{33},\ - a_{11}\, a_{23}\, a_{32},\ - a_{12}\, a_{21}\, a_{33},\ + a_{12}\, a_{21}\, a_{31},$$
$$- a_{13}\, a_{21}\, a_{32},\ + a_{13}\, a_{22}\, a_{31},$$
$$\overline{G}_i = - b_{21}\, b_{12}\, b_{33},\ + b_{21}\, b_{13}\, b_{32},\ + b_{22}\, b_{11}\, b_{33},\ - b_{22}\, b_{13}\, b_{31},$$
$$+ b_{23}\, b_{11}\, b_{32},\ - b_{33}\, b_{12}\, b_{31}.$$

Trägt man aber in die Reihe der $\overline{G}_i$ die Werthe der b_{ik} gemäss den Bedingungen ein, so erhalten gerade die beiden ersten Factoren jedes Gliedes $\overline{G}_i$ gleichfalls dieselben Doppelindices, wie die entsprechenden Glieder G_i, nur die entgegengesetzten Vorzeichen bleiben; nach dieser Substitution besteht also allgemein die Relation

$$G_i = - \overline{G}_i,$$

und folglich auch

$$\sum G_i = - \sum \overline{G}_i,$$

oder

$$\varDelta = - D.$$

Ersetzt man nun aber auch in der Matrix D die Elemente b_{ik} durch ihre entsprechenden Elemente a_{ik}, so entsteht eine neue Matrix, die sich von der Matrix zu $\varDelta$ nur dadurch unterscheidet, dass die erste Zeile mit der zweiten vertauscht ist. Während also in unserm Beispiele

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ist, wird

$$D = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Wir sehen also: „Vertauscht man in einer Matrix die erste mit der zweiten Zeile, so ändert die Determinante ihr Vorzeichen.“ Ebenso kann man aber zeigen, dass die Vertauschung zweier beliebiger Zeilen, oder mit Rücksicht auf den ersten Lehrsatz (16) zweier beliebiger Colonnen die nämliche Wirkung haben muss. Daher der Lehrsatz:

„Vertauscht man in einer Matrix zwei beliebige Zeilen, oder zwei beliebige Colonnen, so ändert der Werth der zugehörigen Determinante nur das Vorzeichen."

Beispiel 1:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & q & r \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = pyc - pbz - xqc + xbr + aqz - ayr,$$

dagegen:

$$D = \begin{vmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = pbz - pyc - aqz + ayz + xqc - xbr = -\Delta.$$

Beispiel 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 & D \\ 0 & F & G & 0 \\ 0 & H & J & C \\ M & 0 & B & L \end{vmatrix} = AFJL - AFBC - AHGL - MFJD + MHGD.$$

Dagegen:

$$D = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 & D \\ 0 & G & F & 0 \\ 0 & J & H & C \\ M & B & 0 & L \end{vmatrix} = AGHL - AFJL + AFBC + MFJD - MHGD = -\Delta.$$

Zusatz: „Besitzt die Matrix zwei gleiche Reihen oder Zeilen, so ist der Werth der zugehörigen Determinante Null." Denn wenn man die beiden gleichen Zeilen oder Reihen vertauscht, so muss die Determinante ihr Zeichen ändern; die Matrix von Δ ändert sich aber nicht; folglich ist einmal $\Delta = +D$, nach der Vertauschung aber auch $\Delta = -D$; also $2\Delta = 0$, oder $\Delta = 0$.

20. *Iteration der Vertauschungen zweier Zeilen oder Colonnen.* Wenn man nun eine Reihe von Vertauschungen an einer Matrix Δ vorgenommen hat, bald von Zeilen mit Zeilen, bald von Colonnen mit Colonnen, ohne auf die Anzahl der Vertauschungen zu achten, so kann man gleichwohl aus dem Diagonalglied der zuletzt gewonnenen Matrix D sofort ermitteln, ob das Vorzeichen der ursprünglichen Determinante sich dabei geändert hat oder nicht. Wir haben eben gezeigt, dass durch eine einfache Vertauschung von Zeilen mit Zeilen, oder Colonnen mit Colonnen, beide Determinanten Glied um Glied noch übereinstimmen müssen, d. h. dass keine Glieder nach der Vertauschung entstehen, deren Zusammensetzung aus den Elementen a_{ik} eine andere

sein könnte, als die vor der Vertauschung. Was sich geändert hat, ist nur das Vorzeichen der Glieder und etwa die Aufeinanderfolge in der Reihe der Glieder. Diese Erscheinung wiederholt sich aber mit jeder Vertauschung, und so sehen wir, dass auch die Glieder der letzten Determinante, die wir erhalten, nicht anders zusammengesetzt sein können, als die der ersten. Beide Determinanten müssen bei geeigneter Anordnung Glied um Glied — vom Vorzeichen abgesehen — übereinstimmen. Und wenn daher irgend zwei entsprechende Glieder entgegengesetztes Vorzeichen haben, so besitzen es *alle* entsprechenden Glieder. Insbesondere wird das Diagonalglied $\overline{G}_1$ der Matrix D einem Glied G_i der Matrix $\varDelta$ entsprechen. Während aber $\overline{G}_1$ in D als Diagonalglied das Vorzeichen $+$ hat, wird G_i in $\varDelta$ im Allgemeinen den noch zu bestimmenden Modul ε_S besitzen. Ist dieser Modul $\varepsilon_S = +1$, dann ist auch $D = +\varDelta$; dagegen ist $D = -\varDelta$, wenn $\varepsilon_S = -1$.

Um aber die Substitution, welche demjenigen Gliede G_i in $\varDelta$ zugehört, das dem Hauptgliede $\overline{G}_1$ in D entspricht, zu bestimmen, und dadurch auch den betreffenden Modul, brauchen wir nur in $\overline{G}_1$ die Elemente b durch jene a_{ik} zu ersetzen, die ihnen vermöge ihrer ursprünglichen Plätze entsprechen; aus den Doppelindices des so erhaltenen Gliedes folgt die Substitution und daraus der Modul.

Beispiel. Es sei gegeben:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \varepsilon & \mu & \nu & \vartheta \\ \lambda & \varrho & \varkappa & \iota \\ \varphi & \psi & \chi & \tau \end{vmatrix}.$$

Durch eine Reihe von Vertauschungen habe man erhalten:

$$D = \begin{vmatrix} \vartheta & \varepsilon & \nu & \mu \\ \delta & \alpha & \gamma & \beta \\ \tau & \varphi & \chi & \psi \\ \iota & \lambda & \varkappa & \varrho \end{vmatrix}.$$

Das Diagonalglied in D ist:

$$\overline{G}_1 = +\vartheta\alpha\chi\varrho.$$

Dasselbe wird in der ursprünglichen Determinante repräsentirt durch:

$$G_i = \varepsilon_S \cdot a_{24}a_{11}a_{43}a_{32}.$$

Die zugehörige Substitution ist:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

sie zerfällt in den dreigliedrigen Cyclus der zum einfachen $\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$ gehört und den eingliedrigen (1). Die Zahl der allgemeinen Vertauschungen ist also $n-\nu=4-2=2$, d. h. $\varepsilon_S=+1$, und also $D=\Delta$.

21. *Anwendung: Ein beliebiges Element a_{ik} soll durch Vertauschungen an die Stelle von a_{11} befördert werden.* Die Aufgabe, eine Reihe von Vertauschungen zu machen, tritt insbesondere dann an uns heran, wenn wir gewisse Elemente an besondere Plätze der Matrix, etwa an die durch die Diagonale ausgezeichneten Stellen bringen wollen, ohne dabei — so weit es möglich ist — die andern Elemente aus ihrer gegenseitigen Lage und Anordnung zu bringen. Wir benutzen zu dem Zwecke die cyclische Vertauschung.

Haben wir zunächst nur ein Element a_{ik} an die erste bisher durch a_{11} ausgefüllte Stelle der Diagonalreihe zu bringen, dann vertauschen wir cyclisch die i^{te} Zeile mit der ersten, ebenso die k^{te} Colonne mit der ersten Colonne. Dabei ist in der That das Element a_{ik} zum ersten Element in der Diagonale geworden, während sowohl alle Reihen und Colonnen — je die erste ausgeschlossen —, als auch insbesondere die Elemente der Diagonale, abgesehen von a_{ik}, noch immer gut geordnet sind. Dem Diagonalglied entspricht also die Substitution

$$S=\begin{pmatrix}i & 1 & 2 & 3 \dots h\\ k & 1 & 2 & 3 \dots h\end{pmatrix},$$

deren erste Permutation $i-1$, deren zweite $k-1$ Derangements aufweist. Ihre Differenz ist $i-k$, daher der Modul $\varepsilon_S=(-1)^{i-k}$, oder besser, da $i-k$ gleichzeitig mit $i+k=\nu$ gerade oder ungerade ist,

$$\varepsilon_S=(-1)^{i+k}=(-1)^{\nu},$$

also:

$$\nu=i+k.$$

Es ist daher:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\dots a_{1h}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\dots a_{2h}\\ a_{31}a_{32}\\ \vdots\\ a_{h1}a_{h2}\quad\dots a_{hh}\end{vmatrix}=(-1)^{\nu}\begin{vmatrix} a_{ik} & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3}\dots & a_{i,k-1} & a_{i,k+1}\dots & a_{ih}\\ a_{1k} & a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1}\dots & a_{1h}\\ a_{2k} & a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1}\dots & a_{2h}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{i-1,k} & a_{i-1,1} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{i+1,k} & a_{i+1,1} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{hk} & a_{h1} & a_{h2} & \vdots & a_{h,k-1} & a_{h,k+1} & a_{hh}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+k}\,(a_{11}\,a_{22}\dots a_{i-1,\,i-1}\,a_{i+1,i}\,a_{i+2,\,i+1}\dots a_{k,\,k-1}\,a_{k+1,\,k+1}\dots a_{hh}),$$

wenn $i<k$, oder

$$=(-1)^{i+k}\,(a_{11}\,a_{22}\dots a_{i-1,\,i-1}\,a_{i,i+1}\,a_{i+1,\,i+2}\dots a_{k-1,\,k}\,a_{k+1,\,k+1}\dots a_{hh}),$$

wenn $k<i$.

22. *Wollen wir nun zwei Elemente a_{ik} und a_{rs} in die Diagonalreihe bringen*, und zwar a_{ik} an die Stelle von a_{11}, a_{rs} an die Stelle von a_{22}, so ist nöthig, dass $i \gtrless r$ und $k \gtrless s$ ist, d. h. dass die beiden Elemente weder derselben Zeile noch Colonne angehören. Ist dies der Fall, so haben wir zunächst die i^{te} Zeile mit der ersten Zeile und die k^{te} Colonne mit der ersten Colonne, dann die r^{te} Zeile mit der 2ten Zeile und die s^{te} Colonne mit der 2ten cyclisch zu vertauschen; die Elemente des übrigen Theiles der Matrix behalten dabei ihre gegenseitige Lage möglichst ungeändert bei; insbesondere sind im Diagonalglied, in welchem nun a_{ik} die erste und a_{rs} die zweite Stelle behauptet, die übrigen Elemente von a_{11} bis a_{hh} gut geordnet. Ihm entspricht also die Substitution

$$S = \begin{pmatrix} i\ r\ 1\ 2 \ldots h \\ k\ s\ 1\ 2 \ldots h \end{pmatrix}.$$

Die Derangements der ersten Permutation setzen sich zusammen (nach Nr. 3)

1) aus den von der Permutation (ir) herrührenden,

2) aus jenen, welche i und r mit $1\ 2 \ldots h$ bilden, das sind $i - 1 + r - 2$.

Ganz ebenso bestehen die Derangements der unteren Permutation

1) aus den von der Permutation (ks) herrührenden,

2) aus jenen, welche k und s mit $1\ 2 \ldots h$ bilden, d. s. $k - 1 + s - 2$.

Die Differenz derselben ist also, wenn wir mit (ir) und (ks) gleich die Zahl 0 oder 1 der zugehörigen Derangements bezeichnen:

$$(ir) - (ks) + i + r - k - s;$$

daher ist der Modul der Substitution dargestellt durch eine Potenz von (-1), welche diese Zahl zum Exponenten hat. Da aber dieselbe gleichzeitig mit

$$(ir) + (ks) + i + r + k + s = \nu$$

gerade oder ungerade ist, so können wir denselben in der Form $(-1)^\nu$ geben, wobei wir also unter ν stets diese Summe verstehen wollen. Es ist also:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2h} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots a_{3h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} \ldots a_{hh} \end{vmatrix} =$$

$$
(A) \quad = (-1)^{\nu} \begin{vmatrix}
a_{ik} & a_{is} & a_{i1} & a_{i2} & \ldots a_{i,k-1} & a_{i,k+1} \ldots a_{i,s-1} & a_{i,s+1} \ldots a_{ih} \\
a_{rk} & a_{rs} & a_{r1} & a_{r2} & \ldots a_{r,k-1} & a_{r,k+1} \ldots a_{r,s-1} & a_{r,s+1} \ldots a_{rh} \\
a_{1k} & a_{1s} & a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1,k-1} & a_{1,k+1} \ldots a_{1,s-1} & a_{1,s+1} \ldots a_{1h} \\
a_{2k} & a_{2s} & a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2,k-1} & \ldots & \ldots a_{2h} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{i-1,k} & a_{i-1,s} & a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{i+1,k} & a_{i+1,s} & a_{i+1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\vdots & \vdots & & & & & \\
a_{r-1,k} & a_{r-1,s} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{r+1,k} & a_{r+1,s} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
a_{hk} & a_{hs} & a_{h1} & a_{h2} & \ldots a_{h,k-1} & a_{h,k+1} \ldots a_{h,s-1} & a_{h,s+1} \ldots a_{hh}
\end{vmatrix}
$$

wobei
$$\nu = (ir) + (ks) + i + r + k + s.$$

23. *Wir sehen nun, wie sich analog der Zahlenwerth ν ergeben wird, wenn wir drei Elemente a_{ik}, a_{rs}, a_{lm} an die Plätze von resp. a_{11}, a_{22}, a_{33} durch cyclische Vertauschung bringen.* Stellen wir wieder die von den drei ersten Indices herrührende Zahl von Derangements durch (irl), die von den zweiten herrührende durch (ksm) dar, eine Zahl, die offenbar nur die Werthe 0, 1, 2, 3 annehmen kann, dann ist der Modul der Substitution, welche dem neuen Diagonalglied zugehört, durch eine Potenz $(-1)^{\nu}$ dargestellt, wo

$$\nu = (irl) + (ksm) + (i + r + l + k + s + m).$$

Daraus lässt sich der Satz abstrahiren: „Bringt man p Elemente, von denen keine zwei der nämlichen Colonne oder Zeile angehören dürfen, der Reihe nach durch cyclische Vertauschung an die erste, zweite u. s. w. p^{te} Stelle der Diagonale einer Matrix, dann setzt sich der Exponent ν des zum Diagonalglied gehörigen Substitutionsmoduls $\varepsilon_S = (-1)^{\nu}$ zusammen:

1) aus der Zahl der Derangements, welche die p ersten Factoren $a_{\varrho\sigma}$ durch die ersten Indices,
2) aus der Zahl, welche sie durch ihre zweiten Indices bilden,
3) aus der Summe ihrer Indices überhaupt.“

Beispiel. Sei gegeben die Determinante:

$$
\varDelta = \begin{vmatrix}
\varepsilon & \iota & \varphi & \omega & \sigma \\
\iota & \varphi & \omega & \sigma & \omega \\
\varphi & \omega & \sigma & \omega & \varphi \\
\omega & \sigma & \omega & \varphi & \iota \\
\sigma & \omega & \varphi & \iota & \varepsilon
\end{vmatrix}.
$$

Wir stellen uns die Aufgabe, die fünf Elemente σ der zweiten Diagonale durch cyclische Vertauschung in die Hauptdiagonale zu bringen, so dass jedes Element σ in einer Zeile bleibt; wir erhalten der Reihe nach

$$\Delta = (-1)^{\nu_1} \begin{vmatrix} \sigma & \varepsilon & \iota & \varphi & \omega \\ \omega & \iota & \varphi & \omega & \sigma \\ \varphi & \varphi & \omega & \sigma & \omega \\ \iota & \omega & \sigma & \omega & \varphi \\ \varepsilon & \sigma & \omega & \varphi & \iota \end{vmatrix} = (-1)^{\nu_2} \begin{vmatrix} \sigma & \omega & \varepsilon & \iota & \varphi \\ \omega & \sigma & \iota & \varphi & \omega \\ \varphi & \omega & \varphi & \omega & \sigma \\ \iota & \varphi & \omega & \sigma & \omega \\ \varepsilon & \iota & \sigma & \omega & \varphi \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\nu_3} \begin{vmatrix} \sigma & \omega & \varphi & \varepsilon & \iota \\ \omega & \sigma & \omega & \iota & \varphi \\ \varphi & \omega & \sigma & \varphi & \omega \\ \iota & \varphi & \omega & \omega & \sigma \\ \varepsilon & \iota & \varphi & \sigma & \omega \end{vmatrix} = (-1)^{\nu_4} \begin{vmatrix} \sigma & \omega & \varphi & \iota & \varepsilon \\ \omega & \sigma & \omega & \varphi & \iota \\ \varphi & \omega & \sigma & \omega & \varphi \\ \iota & \varphi & \omega & \sigma & \omega \\ \varepsilon & \iota & \varphi & \omega & \sigma \end{vmatrix}.$$

Da die Elemente σ ursprünglich die Plätze

$$a_{51},\ a_{42},\ a_{33},\ a_{24},\ a_{15}$$

inne hatten, so ist demgemäss

$$\nu_4 = (5\,4\,3\,2\,1) + (1\,2\,3\,4\,5) + 2\sum_1^5 i$$

$$= 10 + 0 + 2 \cdot \frac{5(5+1)}{2} = 40,$$

also

$$(-1)^{\nu_4} = +1.$$

§ 3. Unterdeterminanten erster Ordnung.

24. *Begriff der Unterdeterminante.* Aus den N Gliedern der Determinante Δ kann man insbesondere diejenigen herausgreifen, welche den Factor a_{ik} besitzen. Sie seien $G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots G_{i_\varrho}$, wo $i_1, i_2, \ldots i_\varrho$ irgendwelche Zahlen der Reihe 1, 2, 3 ... bis $N = n!$ sind. Bezeichnet man das Product der andern Elemente in G_{i_ϱ} mit H_{i_ϱ}, dann ist:

$$G_{i_1} = a_{ik} \cdot H_{i_1},$$
$$G_{i_2} = a_{ik} \cdot H_{i_2},$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$G_{i_\varrho} = a_{ik} \cdot H_{i_\varrho}.$$

Bildet man die Summe aller dieser Glieder, so erhält man

$$G_{i_1} + G_{i_2} + \cdots G_{i_\varrho} = a_{ik}\, H_{i_1} + a_{ik}\, H_{i_2} + \cdots a_{ik}\, H_{i_\varrho}$$

oder

$$\sum G_{i_\varrho} = a_{ik} \sum H_{i_\varrho}.$$

Bezeichnet man $\sum H_{i_\varrho}$ mit A_{ik}*), so erhält man

$$\sum G_{i_\varrho} = a_{ik} \cdot A_{ik} \cdot$$

Die Grösse A_{ik} nennt man *Unterdeterminante* (*Minor*) des Elementes a_{ik}.

25. *Berechnung von* A_{11}. Die Aufgabe, die Unterdeterminante A_{ik} zu berechnen, wollen wir zunächst an dem speciellen Falle von $i = k = 1$ durchführen, d. h. wir wollen A_{11} bestimmen. Jedem Glied, das den Factor a_{11} besitzt, muss eine Substitution zugeordnet sein, in der die zwei Indices 1 stets über einander stehen, d. h. ein einziges Paar bilden. Alle übrigen Indices, unter denen sich also 1 nicht mehr befindet, liefern durch ihre Permutationen, die wir der Reihe nach mit der gut geordneten $(2\,3\ldots h)$ zu einer Substitution verbinden, diejenigen Substitutionen, die an erster Stelle das Zahlenpaar $\binom{1}{1}$ haben. Den Permutationen der $n - 1$ Elemente $(2\,3\ldots h)$ entsprechen aber die $(n-1)!$ Substitutionen, welche zu den Gliedern H_{i_ϱ} Veranlassung geben. Die Summe aller dieser H_{i_ϱ} ist also selbst eine Determinante:

$$\varDelta' = \sum_{i_\varrho = 1}^{i_\varrho = (n-1)!} H_{i_\varrho},$$

und zu ihr gehört die Matrix:

$$\varDelta' = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \ldots a_{2h} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \ldots a_{3h} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \ldots a_{4h} \\ \vdots & \vdots & \ldots\ldots \\ a_{h2} & a_{h3} & a_{h4} \ldots a_{hh} \end{vmatrix}.$$

Vergleicht man aber diese Matrix $\varDelta'$ mit der Matrix der gegebenen Determinante $\varDelta$, so erkennt man: $\varDelta'$ entsteht aus $\varDelta$, indem man die erste Zeile und erste Colonne streicht, oder: *Die Unterdeterminante* A_{11} *des Elementes* a_{11} *entsteht, indem man jene Zeile und Colonne streicht, die sich in* a_{11} *schneiden.*

26. *Berechnung von* A_{ik}. Nun können wir die allgemeine Aufgabe, A_{ik} zu bestimmen, leicht auf diese zurückführen. Ich bringe zu dem Zwecke durch zwei Cyclen das Element a_{ik} an die Stelle von a_{11}. Zu der dadurch entstehenden Matrix gehört eine Determinante vom Werthe

$$D = (-1)^\nu \varDelta, \text{ wo } \nu = i + k,$$

---

*) Es ist $\dfrac{\partial \varDelta}{\partial a_{ik}} = A_{ik}$.

und wir sahen in Nr. 21, dass bei einer solchen Reihe von Vertauschungen die Glieder von D in passender Ordnung genommen dieselben Werthe haben wie die von Δ, nur noch multiplicirt mit $(-1)^\nu$. Insbesondere entsprechen den Gliedern mit dem Factor a_{ik} in Δ die Glieder mit dem Factor b_{11} in D; ihre Summe

$$G_{i_1} + G_{i_2} + \cdots G_{i_\varrho} = a_{ik} \sum H_{i_\varrho} = a_{ik} \cdot A_{ik}$$

ist bis auf einen Factor $(-1)^\nu$ gleich der entsprechenden

$$\overline{G}_{i_1} + \overline{G}_{i_2} + \cdots \overline{G}_{i_\varrho} = b_{11} \sum \overline{H}_{i_\varrho} = b_{11} \cdot B_{11},$$

wenn die B_{ik} die Unterdeterminanten der b_{ik} bedeuten. Die Matrix zu B_{11} entsteht aber aus der Matrix zu D, wenn man die erste Zeile und erste Colonne streicht; die nämliche Matrix erhält man aber aus Δ, wenn man in ihr jene Zeile und Colonne streicht, die sich in a_{ik} schneiden. Daher der Satz: „Lässt man in der Matrix zu Δ die i^{te} Zeile und die k^{te} Colonne weg, so erhält man eine neue Matrix Δ'. Multiplicirt man den Werth der entsprechenden Determinante mit $(-1)^\nu$, wo $\nu = i + k$, so erhält man die zum Element a_{ik} gehörige Unterdeterminante A_{ik}."

27. Beispiel: 1) Sei gegeben die Determinante

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix};$$

dann ist die Unterdeterminante

$$\text{zu } q = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} u & w \\ x & z \end{vmatrix} = -(uz - wx),$$

$$\text{zu } v = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} p & r \\ x & z \end{vmatrix} = +(pz - rx),$$

$$\text{zu } y = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} p & r \\ u & w \end{vmatrix} = -(pw - ur).$$

In der That, berechnen wir die Determinante nach dem in Nr. 13 oder 15 gegebenen Schema, so sieht man, dass uz, wx die einzigen Producte sind, die mit q multiplicirt auftreten, ebenso pz und rx die einzigen mit v multiplicirten u. s. w.

2) In der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

ist die Unterdeterminante zu a_{32} dargestellt durch die Matrix

$$(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^5\{a_{11}a_{23}a_{44}-a_{11}a_{43}a_{24}-a_{21}a_{13}a_{44}+a_{21}a_{43}a_{14}+a_{41}a_{13}a_{24}-a_{41}a_{23}a_{14}\}.$$

In der That, bilden wir die Substitutionen, die diesen Gliedern zugehören:

$$\begin{pmatrix}1\,2\,4\\1\,3\,4\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1\,4\,2\\1\,3\,4\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}2\,1\,4\\1\,3\,4\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}2\,4\,1\\1\,3\,4\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}4\,1\,2\\1\,3\,4\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}4\,2\,1\\1\,3\,4\end{pmatrix},$$

so erkennt man, dass *sämmtliche* Permutationen der drei Indices 1 2 4 mit der gut geordneten (1 3 4) verbunden sind, wie wir es auch in unserer obigen Darstellung verlangten.

28. *Berechnung des Werthes einer Determinante mittelst der Unterdeterminanten, welche den Elementen der ersten Zeile entsprechen.* Nach den Entwicklungen in Nr. 15 hat jedes Glied der Determinante stets ein und nur ein Element der ersten Zeile unter seinen Factoren. Ordnen wir also alle N Glieder in Klassen, indem wir zuerst alle Glieder herausgreifen, welche den Factor a_{11}, sodann alle, welche den Factor a_{12} u. s. w., endlich jene, welche den Factor a_{1n} besitzen, so ist die Gesammtheit aller Glieder dadurch erschöpft. Nun bilden aber nach Nr. 24 alle Glieder mit dem Factor a_{11} zusammen die Unterdeterminante A_{11}, alle mit dem Factor a_{12} die Unterdeterminante A_{12} u. s. w., endlich alle mit dem Factor a_{1n} die Unterdeterminante A_{1n}; folglich ist der Werth der Determinante Δ dargestellt durch die Summe

$$(1)\qquad \Delta = a_{11}\,A_{11} + a_{12}\,A_{12} + a_{13}\,A_{13} + \cdots + a_{1n}\,A_{1n}.$$

Die hierbei auftretenden Unterdeterminanten A_{1i} sind entnommen aus der Matrix von n Colonnen und $(n-1)$ Zeilen:

$$(A)\qquad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots a_{3,n} \\ a_{41} & & \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die Matrix der Unterdeterminante A_{11} entsteht dann hieraus, indem man die erste Colonne weglässt; analog ist A_{12} dargestellt durch die nach dem Streichen der zweiten Colonne übrig bleibende Matrix multiplicirt mit $(-1)^\nu$, wo $\nu = 1 + 2 = 3$ ist u. s. w., endlich die Unterdeterminante A_{1n} durch die Matrix, welche die letzte Colonne nicht enthält, multiplicirt mit $(-1)^\nu$, wo $\nu = 1 + n$. Man

sieht hiebei, indem man der Zahl n alle Werthe von 1 bis n beilegt, dass der Factor $(-1)^{\nu}$ abwechselnd positiv und negativ ist, d. h. die Glieder der Summe (1) haben abwechselnd das Zeichen plus und minus.

29. *Entwicklung der Determinanten nach Unterdeterminanten der Elemente einer beliebigen Zeile oder Colonne.* Ganz ebenso, wie wir hier den Werth der Determinante Δ nach den Unterdeterminanten der ersten Zeile entwickelt haben, können wir ihn auch berechnen nach den Unterdeterminanten einer beliebigen Zeile oder Colonne, die wir ja nach den vorausgehenden Sätzen jederzeit zur ersten Zeile oder Colonne machen können.

Wir haben also ganz allgemein für den Werth der Determinante Δ die beiden Formeln

$$(B) \qquad \begin{cases} \Delta = a_{i1}\, A_{i1} + a_{i2}\, A_{i2} + a_{i3}\, A_{i3} \cdots a_{in}\, A_{in}, \\ \Delta = a_{1i}\, A_{1i} + a_{2i}\, A_{2i} + a_{3i}\, A_{3i} \cdots a_{ni}\, A_{ni}. \end{cases}$$

30. *Beispiele.* 1) Berechnen wir nach dieser Methode noch einmal die viergliederige Determinante Beispiel 6 in Nr. 15 nach den Unterdeterminanten, die zu den Elementen der ersten Zeile gehören. Wir erhalten:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 6 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 3\{15 + 150 + 30 - 12\} - \{3 + 30 - 30\} + \{-6 - 24 - 30 + 24\}$$
$$- 2\{10 - 4 + 50\} = 549 - 3 - 36 - 112 = 398,$$

was mit dem früheren Resultat übereinstimmt.

2) Fassen wir umgekehrt die einzelnen Glieder der ausgerechneten viergliederigen Determinante Nr. 17 Beispiel 3 in der Weise zusammen, dass wir sie nach den Elementen der ersten Colonne ordnen, so ergiebt sich:

$$a[erw - evs - qfw + qvg + ufs - ury] + p[bfw - bvg - ecw$$
$$+ evd + ucg - ufd].$$

Die beiden Klammerfactoren dieser Summe sind aber offenbar nur die Entwicklungen der beiden dreigliederigen Determinanten (vergleiche das Schema in Nr. 15, β)

$$A_{11} = \begin{vmatrix} e & f & g \\ q & r & s \\ u & v & w \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad A_{31} = \begin{vmatrix} b & c & d \\ e & f & y \\ u & v & w \end{vmatrix}.$$

Beispiel 3. Sind in einer Zeile oder Reihe alle Elemente bis auf eines gleich null, so wird man am Besten bei einer Berechnung der Determinante zuerst nach dieser entwickeln, da sich die Summe (B) dann auf ein einziges Glied reducirt.

Es sei:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Wir entwickeln nach der zweiten Zeile; es wird also:

$$\varDelta = (-1)^{\nu} 4 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \nu = 2 + 3 = 5.$$

Beispiel 4. Sind alle Elemente auf einer Seite der Diagonale einer Matrix null, so reducirt sich der Werth der Determinante auf das Diagonalglied; denn man hat:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & f & g & h & i \\ 0 & 0 & k & l & m \\ 0 & 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} f & g & h & i \\ 0 & k & l & m \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{vmatrix} = af \begin{vmatrix} k & l & m \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix} = afk \begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & p \end{vmatrix} = afknp.$$

Beispiel 5. Man kann umgekehrt jede Determinante als Unterdeterminante betrachten, deren Element $a_{11} = 1$, deren Elemente $a_{i1} = 0$, wenn $i > 1$, und deren Elemente a_{1i}, wenn $i > 1$, beliebig sind; so ist offenbar:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} p & q & r \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \varkappa & \lambda & \mu \\ 0 & p & r & q \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}.$$

31. *Beziehungen zwischen den Unterdeterminanten der Elemente der ersten Zeile.* Bezeichnen wir wie früher mit D eine Determinante von n^2 Elementen b_{ik}, und setzen wir aber nun fest, dass zwischen den Elementen von D und den Elementen a_{ik} der Determinante $\varDelta$ die Relationen bestehen:

$$\alpha) \quad b_{1i} = a_{2i}, \qquad \beta) \quad b_{ki} = a_{ki}, \; k > 1.$$

Dann ist, weil die Matrix zu D zwei gleiche — nämlich die erste und zweite — Zeilen hat, der Werth der Determinante D gleich null.

(Nr. 19, Zusatz.) Entwickeln wir daher die Determinante D nach den Unterdeterminanten der ersten Zeile, so erhalten wir die Relation:

$$(1) \qquad b_{11}\, B_{11} + b_{12}\, B_{12} + \cdots + b_{1n}\, B_{1n} = 0.$$

Nun ist aber wegen der Bedingung (α)

$$b_{11} = a_{21},\ b_{12} = a_{22}, \cdots b_{1n} = a_{2n}.$$

Ebenso sind, wegen Bedingung (β), die Unterdeterminanten B_{1i} der gleichen Matrix

$$(A) \qquad \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \ldots b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \ldots b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} \ldots b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

entnommen wie die Unterdeterminante A_{1i}, d. h. es ist auch

$$B_{11} = A_{11},\ B_{12} = A_{12} \cdots B_{1n} = A_{1n}.$$

Tragen wir also diese Werthe von b_{1i} und B_{1i} in die Relation (1) ein, so erhalten wir:

$$(2) \qquad a_{21}\, A_{11} + a_{22}\, A_{12} + a_{23}\, A_{13} + \cdots a_{2n}\, A_{1n} = 0.$$

Diese Gleichung ist eine Identität, da ja zwischen den Elementen a_{ik} der Determinante $\varDelta$ keine Beziehungen bestehen sollen; sie sagt:

„Multiplicirt man die n Determinanten der Matrix (A) Nr. 28 der Reihe nach mit den Elementen der ersten Zeile dieser Matrix und summirt diese Producte, so ist diese Summe identisch null.“

32. *Verallgemeinerung der Relation* (2) Nr. 31. Nun ist aber jede Zeile einer Determinante mit n^2 willkürlichen Elementen gleichberechtigt, und man kann schon daraus schliessen, dass die Elemente a_{2i} in (2) durch die Elemente jeder folgenden Zeile ersetzt werden können, ohne dass unser Satz seine Gültigkeit verliert. Strenger folgt dieses, wenn wir statt der Bedingung α) $b_{1i} = a_{2i}$ die Bedingung einführen

$$b_{1i} = a_{\varrho i}.$$

Dann bleiben immer noch die Matrix (A) und mit ihr die Unterdeterminanten A_{1i} die nämlichen, und nur an Stelle der Elemente a_{2i} in (2) treten die Elemente $a_{\varrho i}$, $\varrho = 3, 4, 5 \cdots n$. Wir haben sonach eine erste Erweiterung des Satzes:

„Multiplicirt man die Determinanten der Matrix (A) der Reihe nach mit den Elementen einer beliebigen Zeile derselben, so ist die Summe aller dieser Producte identisch null.“

Wir haben bisher immer die Determinanten der Matrix (A), d. i. die Unterdeterminanten der ersten Zeile der Determinante Δ ausgezeichnet. Da wir aber jede Zeile oder Colonne zur ersten Zeile machen können, ohne dass sich der absolute Werth von Δ ändert, so sind wir berechtigt, ganz allgemein den Satz aufzustellen:

> „Multiplicirt man die Elemente einer Zeile bezw. Colonne mit der je entsprechenden Unterdeterminante einer andern Zeile bezw. Colonne, so ist die Summe aller dieser Producte identisch null."

Wir erhalten also, wenn wir gleichzeitig das in Nr. 28 enthaltene Resultat berücksichtigen, folgendes System von Relationen:

$$(C) \quad \begin{cases} a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \cdots + a_{in} A_{kn} = \Delta, & \text{wenn } i = k, \\ a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \cdots + a_{in} A_{kn} = 0, & \text{wenn } i \gtrless k, \\ a_{1i} A_{1k} + a_{2i} A_{2k} + \cdots + a_{ni} A_{nk} = \Delta, & \text{wenn } i = k, \\ a_{1i} A_{1k} + a_{2i} A_{2k} + \cdots + a_{ni} A_{nk} = 0, & \text{wenn } i \gtrless k. \end{cases}$$

33. *Beispiel.* Sei gegeben die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

die zur letzten Colonne gehörige Matrix ist:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

sie enthält die Unterdeterminanten:

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir sie mit den Elementen der ersten Colonne, so erhalten wir:

$$a_{11} A_{13} + a_{21} A_{23} + a_{31} A_{33} = a_{11} (a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22}) - a_{21} (a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31}) \\ + a_{31} (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet aber identisch.

34. *Anwendungen der Identitäten in* (C). Aus der zweiten specielleren Fassung des soeben erhaltenen allgemeinen Satzes ergeben sich für die n Determinanten A_{1k}, welche in der Matrix (A) enthalten sind, folgende ($n - 1$) Relationen. Bezeichnen wir nämlich mit Ein-

schluss des Vorzeichens diese n Grössen der Reihe nach mit $p_1\, p_2 \ldots p_n$, so haben wir die Beziehungen:

$$(D) \quad \begin{cases} a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{2n}p_n = 0, \\ a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + \cdots + a_{3n}p_n = 0, \\ a_{41}p_1 + a_{42}p_2 + \cdots + a_{4n}p_n = 0, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \cdots + a_{nn}p_n = 0. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Relationen wollen wir noch zwei Identitäten ableiten, die später von Wichtigkeit sein werden.

1) Sei gegeben die Matrix:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

schreiben wir die mit $p_1\, p_2\, p_3$ bezeichneten Minoren in der Form (bc), (ca), (ab) — vergleiche Nr. 18 — so werden die Relationen (D):

$$a_1(bc) + b_1(ca) + c_1(ab) = 0,$$
$$a_2(bc) + b_2(ca) + c_2(ab) = 0.$$

Multipliciren wir die erste Gleichung mit x_1, die zweite mit x_2 und addiren, führen sodann für $a_1x_1 + a_2x_2$, $b_1x_1 + b_2x_2$, $c_1x_1 + c_2x_2$ bezw. die Symbole a_x, b_x, c_x ein, so erhalten wir die Identität

$$(\mathrm{I}) \quad a_x(bc) + b_x(ca) + c_x(ab) = 0.$$

2) Ebenso liefert die Matrix:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

wenn wir wieder die Unterdeterminanten $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ mit (bcd), $-(cda)$, (dab), $-(abc)$ bezeichnen, die drei Relationen:

$$a_1(bcd) - b_1(cda) + c_1(dab) - d_1(abc) = 0,$$
$$a_2(bcd) - b_2(cda) + c_2(dab) - d_2(abc) = 0,$$
$$a_3(bcd) - b_3(cda) + c_3(dab) - d_3(abc) = 0.$$

Multiplicirt man auch hier die drei Gleichungen der Reihe nach mit $x_1\, x_2\, x_3$ und setzt $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_x$, $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_x$, $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = c_x$, $d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 = d_x$, nachdem man die drei Gleichungen addirt hat, so kommt die Identität:

$$(\mathrm{II}) \quad a_x(bcd) - b_x(cda) + c_x(dab) - d_x(abc) = 0.$$

35. *Addition von zwei Determinanten.* Ergänzt man die Matrix (A) auf drei verschiedene Arten zur Matrix einer Determinante

1) indem man zu den $(n-1)$ Zeilen die Zeile $a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n}$,

2) indem man die Zeile $b_{11}\ b_{12} \dots b_{1n}$, endlich

3) indem man die Zeile $a_{11}+b_{11},\ a_{12}+b_{12} \dots a_{1n}+b_{1n}$ hinzufügt, so erhält man dadurch die Matrix von drei verschiedenen Determinanten Δ_0, Δ_1, Δ_2. Ihre Werthe sind nach 29 (B)

$$\left.\begin{aligned} \Delta_0 &= a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \cdots a_{1n}p_n \\ \Delta_1 &= b_{11}p_1 + b_{12}p_2 + \cdots b_{1n}p_n \\ \Delta_2 &= (a_{11}+b_{11})p_1 + (a_{12}+b_{12})p_2 + \cdots (a_{1n}+b_{1n})p_n \end{aligned}\right\} \quad (E).$$

Man erkennt, dass der Werth der dritten Determinante gleich ist der Summe der Werthe der beiden andern; daher der Satz:

> „Die Summe zweier Determinanten, deren Matrices in $(n-1)$ Zeilen gleiche, in der n^{ten} Zeile aber verschiedene Elemente haben, ist dargestellt durch Eine Determinante, deren Matrix die $(n-1)$ gemeinschaftlichen Zeilen besitzt und deren n^{te} Zeile die Summe je zweier entsprechender Elemente der beiden nicht gemeinschaftlichen Zeilen enthält.“

36. *Addition von m Determinanten mit $(n-1)$ gemeinschaftlichen Zeilen.* Wir hätten ebenso die Matrix (A) auf m Arten zu den Matrices von m verschiedenen Determinanten ergänzen können. Die Summe aller dieser Determinanten ist dann dargestellt durch eine neue Determinante, in deren einer Zeile jedes Element aus der Summe von m entsprechenden Elementen der einzelnen Determinanten besteht, während die übrigen Zeilen nur die allen gemeinschaftlichen Elemente enthalten. Aus der Entwicklung des Satzes geht unmittelbar auch seine Umkehrbarkeit hervor, d. h. tritt in einer Determinante eine Zeile auf, deren Elemente algebraische Summen sind, so lässt sich dieselbe immer in eine Summe von Determinanten zerlegen.

37. *Beispiele.* 1) Es sei gegeben die Matrix

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Ergänzen wir sie durch 1) Anfügen der ersten Zeile

$$\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \delta_1$$

zur Determinante Δ_1, 2) durch Anfügen der ersten Zeile

$$-\alpha_2,\ -\beta_2,\ -\gamma_2,\ -\delta_2$$

zur Determinante Δ_2, 3) endlich durch Anfügen der Zeile

$$+\alpha_3,\ -\beta_3,\ +\gamma_3,\ -\delta_3$$

zur Determinante Δ_3, dann ist

$$\Delta=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_2=\begin{vmatrix} \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3, & \beta_1-\beta_2-\beta_3, & \gamma_1-\gamma_1+\gamma_3, & \delta_1-\delta_2-\delta_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

2) Die Determinante:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a+\lambda, & b, & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}.$$

3) Die Determinante:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}+\lambda, & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\lambda \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}+\lambda & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33}+\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\Delta_1+\Delta_2.$$

Jede dieser Determinanten Δ_1 und Δ_2 lässt sich wieder zerlegen:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\lambda \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & \lambda & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33}+\lambda \end{vmatrix}=\Delta_1'+\Delta_1'',$$

und

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33}+\lambda \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \lambda & 0 & a_{13} \\ 0 & \lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}+\lambda \end{vmatrix}=\Delta_2'+\Delta_2''.$$

Zerlegt man endlich jede dieser vier Determinanten, so erhält man Δ dargestellt durch die Summe:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \lambda \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & \lambda & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & \lambda & 0 \\ a_{31} & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} \lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \lambda & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0. & a_{32} & \lambda \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \lambda & 0 & a_{13} \\ 0 & \lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}.$$

38. *Multiplication einer Determinante mit einer beliebigen Grösse λ.* Gehen wir wiederum von der Matrix (A) aus und ergänzen sie zur Matrix einer Determinante Δ_1, indem wir die Elemente λa_{11}, λa_{12}, $\lambda a_{13} \ldots \lambda a_{1n}$ als erste Zeile anfügen. Dann erhalten wir nach Nr. 28, (1)

$$\Delta_1 = \lambda a_{11} p_1 + \lambda a_{12} p_2 + \lambda a_{13} p_3 + \cdots \lambda a_{1n} p_n$$
$$= \lambda(a_{11} p_1 + a_{12} p_2 + \cdots + a_{1n} p_n) = \lambda \cdot \Delta.$$

Andererseits ist Δ_1 dargestellt durch die Matrix:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \lambda a_{11}, & \lambda a_{12}, & \lambda a_{13} & \ldots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \Delta.$$

Man sieht daraus: wenn alle Elemente der ersten Zeile einen gemeinschaftlichen Factor λ besitzen, so ist die Determinante selbst ein Product, dessen einer Factor λ ist. Dies gilt offenbar auch, wenn λ Factor aller Elemente einer *beliebigen* Zeile oder Colonne ist. Ebenso erkennt man umgekehrt den Satz:

„Eine Determinante wird mit einem Factor λ multiplicirt, indem man alle Elemente einer Zeile oder Colonne mit demselben multiplicirt.“

39. *Verbindung des Additions- und Multiplicationssatzes.* Wir hatten in Nr. 35 die Gleichungen (E) erhalten:

$$\Delta_0 = a_{11} p_1 + a_{12} p_2 + \cdots a_{1n} p_n,$$
$$\Delta_1 = b_{11} p_1 + b_{12} p_2 + \cdots b_{1n} p_n,$$
$$\Delta_2 = \Delta_0 + \Delta_1.$$

Setzen wir nun fest, dass die Elemente b_{ii} den Bedingungen genügen:

$$\alpha) \qquad b_{11} = \lambda a_{21}, \quad b_{12} = \lambda a_{22}, \quad b_{13} = \lambda a_{23} \cdots b_{1n} = \lambda a_{2n},$$

dann wird wegen der ersten Relation in Nr. 34 (D)

$$\Delta_1 = \lambda(a_{21} p_1 + a_{22} p_2 + \cdots a_{2n} p_n) = 0,$$

folglich

$$\Delta_2 = \Delta_0;$$

das heisst:

„Addirt man die mit der willkürlichen Grösse λ multiplicirt gedachten Elemente der zweiten Zeile zu den entsprechenden der ersten Zeile, so ändert sich der Werth der Determinante nicht.“

Auch hier ist die Verallgemeinerung sofort einzusehen. Wir ersetzen die Bedingungen α) durch die allgemeineren

$$\beta) \qquad b_{11} = \lambda a_{\varrho 1}, \quad b_{12} = \lambda a_{\varrho 2} \cdots b_{1n} = \lambda a_{\varrho n},$$

und erinnern uns an die Vertauschbarkeit von Zeilen und Colonnen. Dann ist der Satz evident:

„Der Werth einer Determinante bleibt ungeändert, wenn man die mit dem nämlichen Factor multiplicirt gedachten Elemente einer Zeile oder Colonne zu den entsprechenden Elementen einer andern Zeile bezw. Colonne addirt.“

Dass dieser Process ohne Einfluss auf den Werth der Determinante beliebig wiederholt werden kann, bedarf wohl nur der Erwähnung.

40. *Anwendungen.* *Beispiel* 1. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a_3 & -a_2 & -a_1 & 1 \\ b_3 & -b_2 & -b_1 & 1 \\ c_3 & -c_2 & -c_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y & 1 \\ a_3+a_2x+a_1y & -a_2 & -a_1 & 1 \\ b_3+b_2x+b_1y & -b_2 & -b_1 & 1 \\ c_3+c_2x+c_1y & -c_2 & -c_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x & y & 1 \\ a_3+a_2x+a_1y & -(x+a_2) & -(y+a_1) & 0 \\ b_3+b_2x+b_1y & -(x+b_2) & -(y+b_1) & 0 \\ c_3+c_2x+c_1y & -(x+c_2) & -(y+c_1) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_3+a_2x+a_1y & x+a_2 & y+a_1 \\ b_3+b_2x+b_1y & x+b_2 & y+b_1 \\ c_3+c_2x+c_1y & x+c_2 & y+c_1 \end{vmatrix}.$$

Hier wurde die zweite Determinante aus der ersten erhalten, indem man die mit x multiplicirt gedachte zweite Colonne und die mit y multiplicirt gedachte dritte Colonne von der ersten subtrahirte. Daraus ging die dritte hervor durch Addition der mit -1 multiplicirten ersten Zeile zu den drei übrigen. Die letzte Determinante liefert die Entwicklung der eben erhaltenen nach den Elementen der letzten Colonne.

Beispiel 2.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \alpha^2 & \beta^2-\alpha^2 & \gamma^2-\alpha^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha^2 & \beta + \alpha & \gamma + \alpha \end{vmatrix}$$

$$= (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha^2 & \beta + \alpha & \gamma - \beta \end{vmatrix}$$

$$= (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha^2 & \beta + \alpha & 1 \end{vmatrix} = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma -$$

Ganz in derselben Weise erhält man der Reihe nach:

Beispiel 3.

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 & \alpha_5^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \alpha_4^3 & \alpha_5^3 \\ \alpha_1^4 & \alpha_2^4 & \alpha_3^4 & \alpha_4^4 & \alpha_5^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1, & \alpha_2 - \alpha_1, & \alpha_3 - \alpha_1, & \alpha_4 - \alpha_1, & \alpha \ldots \\ \alpha_1^2, & \alpha_2^2 - \alpha_1^2, & \alpha_3^2 - \alpha_1^2, & \alpha_4^2 - \alpha_1^2, & \alpha \ldots \\ \alpha_1^3, & \alpha_2^3 - \alpha_1^3, & \alpha_3^3 - \alpha_1^3, & \alpha_4^3 - \alpha_1^3, & \alpha \ldots \\ \alpha_1^4, & \alpha_2^4 - \alpha_1^4, & \alpha_3^4 - \alpha_1^4, & \alpha_4^4 - \alpha_1^4, & \alpha \ldots \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_5 - \alpha_1)$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1^2, & \alpha_1 + \alpha_2 & , \alpha_1 + \alpha_3 & , \alpha_1 + \alpha_4 \\ \alpha_1^3, & \alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 & , \alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_3^2 & , \ldots \\ \alpha_1^4, & \alpha_1^3 + \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2^3, & \alpha_1^3 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_3^3, & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_5 - \alpha_1)$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1^2, & \alpha_1 + \alpha_2, & \alpha_3 - \alpha_2, & \alpha_4 - \alpha_2, & \alpha_5 \ldots \\ \alpha_1^3, & \dfrac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\alpha_2 - \alpha_1}, & (\alpha_3 - \alpha_2)\sum_1^3 \alpha_i, & \alpha_4^2 - \alpha_2^2 + \alpha_1(\alpha_4 - \alpha_2), & \ldots \\ \alpha_1^4, & \dfrac{\alpha_2^4 - \alpha_1^4}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \ldots\ldots & , \ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_5 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_5 \ldots$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1^2, & \alpha_1 + \alpha_2, & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1^3, & \dfrac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \sum_1^3 \alpha_i, & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 \\ \alpha_1^4, & \dfrac{\alpha_2^3 - \alpha_1^3}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_5 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_5 - \alpha_2) \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & + \alpha_2, & 1 & 0 & 0 \\ & \frac{\;^2 - \alpha_1^2}{\; - \alpha_1}, & \sum_1^3 \alpha_i, & \alpha_4 - \alpha_3, & \alpha_5 - \alpha_3 \\ & \frac{\;^4 - \alpha_1^4}{\; - \alpha_1}, & \cdots, & (\alpha_4 - \alpha_3) \sum_1^4 \alpha_i, & (\alpha_5 - \alpha_3)\left(\sum_1^5 \alpha_i - \alpha_4\right) \end{vmatrix}$$

$$\frac{\alpha_k)}{\alpha_4} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1^2, & \alpha_1 + \alpha_2, & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1^3, & \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \sum_1^3 \alpha_i, & 1 & 1 \\ \alpha_1^4, & \frac{\alpha_2^4 - \alpha_1^4}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \cdots, & \sum_1^4 \alpha_i, & \sum_1^5 \alpha_i - \alpha_4 \end{vmatrix}$$

$$- \alpha_k) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1^2, & \alpha_1 + \alpha_2, & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1^3, & \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \sum_1^3 \alpha_i, & 1, & 0 \\ \alpha_1^4, & \frac{\alpha_2^4 - \alpha_1^4}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \cdots, & \sum_1^4 \alpha_i, & 1 \end{vmatrix}.$$

inante im letzten Ausdrucke besitzt aber (vergl. Nr. 30,
Werth 1, also hat man

$$\alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_5 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)$$
$$\alpha_5 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_5 - \alpha_3)(\alpha_5 - \alpha_4).$$

. Dergleichen Determinanten wie (2) und (3) werden
auf folgende Weise berechnet. Man denkt sich α_1 bis α_5
ie, und frägt sich, unter welcher Bedingung $\Delta = 0$
hieht aber, so oft zwei Colonnen in Δ einander gleich
werden, … so, wenn $\alpha_2 = \alpha_1$, $\alpha_3 = \alpha_1 \cdot \cdot$ u. s. w., d. h. $\alpha_2 - \alpha_1$, $\alpha_3 - \alpha_1$ u. s. w. müssen Factoren von Δ sein. Auf diese Weise erhält man sofort

$$= (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha^2 & \beta + \alpha & \gamma + \alpha \end{vmatrix}$$

$$= (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha^2 & \beta + \alpha & \gamma - \beta \end{vmatrix}$$

$$= (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha^2 & \beta + \alpha & 1 \end{vmatrix} = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta).$$

Ganz in derselben Weise erhält man der Reihe nach:

Beispiel 3.

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 & \alpha_5^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \alpha_4^3 & \alpha_5^3 \\ \alpha_1^4 & \alpha_2^4 & \alpha_3^4 & \alpha_4^4 & \alpha_5^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1, & \alpha_2 - \alpha_1, & \alpha_3 - \alpha_1, & \alpha_4 - \alpha_1, & \alpha_5 - \alpha_1 \\ \alpha_1^2, & \alpha_2^2 - \alpha_1^2, & \alpha_3^2 - \alpha_1^2, & \alpha_4^2 - \alpha_1^2, & \alpha_5^2 - \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3, & \alpha_2^3 - \alpha_1^3, & \alpha_3^3 - \alpha_1^3, & \alpha_4^3 - \alpha_1^3, & \alpha_5^3 - \alpha_1^3 \\ \alpha_1^4, & \alpha_2^4 - \alpha_1^4, & \alpha_3^4 - \alpha_1^4, & \alpha_4^4 - \alpha_1^4, & \alpha_5^4 - \alpha_1^4 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_5 - \alpha_1) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1^2, & \alpha_1 + \alpha_2 & , \alpha_1 + \alpha_3 & , \alpha_1 + \alpha_4, & \alpha_1 + \alpha_5 \\ \alpha_1^3, & \alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 & , \alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_3^2 & , \cdots & , \cdots \\ \alpha_1^4, & \alpha_1^3 + \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2^3, & \alpha_1^3 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_3^3, & \cdots & , \cdots \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_5 - \alpha_1) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1^2, & \alpha_1 + \alpha_2, & \alpha_3 - \alpha_2, & \alpha_4 - \alpha_2, & \alpha_5 - \alpha_2 \\ \alpha_1^3, & \frac{\alpha_2^3 - \alpha_1^3}{\alpha_2 - \alpha_1}, & (\alpha_3 - \alpha_2)\sum_1^3 \alpha_i, & \alpha_4^3 - \alpha_2^3 + \alpha_1(\alpha_4 - \alpha_2), & \cdots \\ \alpha_1^4, & \frac{\alpha_2^4 - \alpha_1^4}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots, & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_5 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_5 - \alpha_2) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1^2, & \alpha_1 + \alpha_2, & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1^3, & \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \sum_1^3 \alpha_i, & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 \\ \alpha_1^4, & \frac{\alpha_2^3 - \alpha_1^3}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \cdots, & \cdots\cdots, & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_5 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_5 - \alpha_2) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1^2, & \alpha_1 + \alpha_2, & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1^3, & \frac{\alpha_2^3 - \alpha_1^3}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \sum_1^3 \alpha_i, & \alpha_4 - \alpha_3, & \alpha_5 - \alpha_3 \\ \alpha_1^4, & \frac{\alpha_2^4 - \alpha_1^4}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \cdots, & (\alpha_4 - \alpha_3)\sum_1^4 \alpha_i, & (\alpha_5 - \alpha_3)\left(\sum_1^5 \alpha_i - \alpha_4\right) \end{vmatrix}$$

$$= \prod_1^5{}^{(i>k)} \frac{(\alpha_i - \alpha_k)}{\alpha_5 - \alpha_4} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1^2, & \alpha_1 + \alpha_2, & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1^3, & \frac{\alpha_2^3 - \alpha_1^3}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \sum_1^3 \alpha_i, & 1 & 1 \\ \alpha_1^4, & \frac{\alpha_2^4 - \alpha_1^4}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \cdots, & \sum_1^4 \alpha_i, & \sum_1^5 \alpha_i - \alpha_4 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_1^5{}^{(i>k)} (\alpha_i - \alpha_k) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1^2, & \alpha_1 + \alpha_2, & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1^3, & \frac{\alpha_2^3 - \alpha_1^3}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \sum_1^3 \alpha_i, & 1, & 0 \\ \alpha_1^4, & \frac{\alpha_2^4 - \alpha_1^4}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \cdots, & \sum_1^4 \alpha_i, & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Determinante im letzten Ausdrucke besitzt aber (vergl. Nr. 30, Beispiel 4) den Werth 1, also hat man

$$\Delta = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_5 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)$$
$$(\alpha_5 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_5 - \alpha_3)(\alpha_5 - \alpha_4).$$

Anmerkung. Dergleichen Determinanten wie (2) und (3) werden übrigens rascher auf folgende Weise berechnet. Man denkt sich α_1 bis α_5 als Veränderliche, und frägt sich, unter welcher Bedingung $\Delta = 0$ wird. Dies geschieht aber, so oft zwei Colonnen in Δ einander gleich werden, d. i. also, wenn $\alpha_2 = \alpha_1$, $\alpha_3 = \alpha_1 \cdots$ u. s. w., d. h. $\alpha_2 - \alpha_1$, $\alpha_3 - \alpha_1$ u. s. w. müssen Factoren von Δ sein. Auf diese Weise erhält man sofort

$$\Delta = \varrho \prod_1^5 (\alpha_i - \alpha_k), \qquad i > k.$$

Es handelt sich noch ϱ zu berechnen. In unserm Falle kann ϱ nur noch eine Constante sein und zwar gleich $+1$, wie man durch Vergleichung des Diagonalgliedes von Δ, mit dem Product aller Minuenden in Π erkennt.

Beispiel 4. Die Sätze dieses Paragraphen, insbesondere der letzte, leisten bei Berechnung von Determinanten, namentlich wenn die Elemente grosse Zahlen sind, werthvolle Dienste. Wir wollen dies in dem folgenden Beispiele zeigen.

Es ist:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 18 & 36 & 58 & 50 \\ 26 & 39 & 80 & 78 \\ 17 & 39 & 55 & 45 \\ 9 & 16 & 27 & 23 \end{vmatrix}$$

zu berechnen.

Subtrahiert man die zweifache letzte Zeile von der ersten, ihr dreifaches von der zweiten und ihr zweifaches von der dritten, so kommt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ -1 & -9 & -1 & 9 \\ -1 & 7 & 1 & -1 \\ 9 & 16 & 27 & 23 \end{vmatrix}.$$

Subtrahirt man von der letzten Zeile die vierfache erste, addirt sodann die dritte zur zweiten und subtrahirt endlich die letzte Colonne von der zweiten und dritten, dann erhält man der Reihe nach:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ -1 & -9 & -1 & 9 \\ -1 & 7 & 1 & -1 \\ 9 & 0 & 11 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 0 & 8 \\ -1 & 7 & 1 & -1 \\ 9 & 0 & 11 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & -10 & -8 & 8 \\ -1 & 8 & 2 & -1 \\ 9 & -7 & 4 & 7 \end{vmatrix} = +4 \begin{vmatrix} 2 & 10 & 8 \\ -1 & 8 & 2 \\ 9 & -7 & 4 \end{vmatrix}.$$

Dividirt man in der letzten Determinante einmal die letzte Colonne, dann die erste Zeile durch den Factor 2, addirt alsdann die erste Zeile zur zweiten und subtrahirt das neunfache der ersten Zeile von der dritten, so erhält man endlich:

$$\varDelta = 16 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 8 & 1 \\ 9 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 13 & 3 \\ 0 & -52 & -16 \end{vmatrix} = -16 \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 52 & 16 \end{vmatrix}$$

$$= -64 \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 13 & 4 \end{vmatrix} = -64 \cdot 13 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -64 \cdot 13 (4-3) = -64 \cdot 13 = -832.$$

Beispiel 5. Man berechne die Determinante:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 0 & \varrho & \sigma & \tau \\ \varrho & 0 & \tau & \sigma \\ \sigma & \tau & 0 & \varrho \\ \tau & \sigma & \varrho & 0 \end{vmatrix}.$$

Addirt man die zweite, dritte und vierte Zeile zur ersten, so erhält man:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \varrho+\sigma+\tau & \varrho+\sigma+\tau & \varrho+\sigma+\tau & \varrho+\sigma+\tau \\ \varrho & 0 & \tau & \sigma \\ \sigma & \tau & 0 & \varrho \\ \tau & \sigma & \varrho & 0 \end{vmatrix} = (\varrho+\sigma+\tau) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varrho & 0 & \tau & \sigma \\ \sigma & \tau & 0 & \varrho \\ \tau & \sigma & \varrho & 0 \end{vmatrix}.$$

Subtrahirt man ferner die zweite Colonne von der ersten, die dritte von der zweiten, die vierte von der dritten, so kommt:

$$\varDelta = (\varrho+\sigma+\tau) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \varrho & -\tau & \tau-\sigma & \sigma \\ \sigma-\tau & \tau & -\varrho & \varrho \\ \tau-\sigma & \sigma-\varrho & \varrho & 0 \end{vmatrix} = (\varrho+\sigma+\tau) \begin{vmatrix} \varrho & -\tau & \tau-\sigma \\ \sigma-\tau & \tau & -\varrho \\ \tau-\sigma & \sigma-\varrho & \varrho \end{vmatrix}.$$

Addirt man hier die dritte zur zweiten Zeile, dann entsteht:

$$\varDelta = (\varrho+\sigma+\tau) \begin{vmatrix} \varrho & -\tau & \tau-\sigma \\ 0 & \tau+\sigma-\varrho & 0 \\ \tau-\sigma & \sigma-\varrho & \varrho \end{vmatrix} = (\varrho+\sigma+\tau)(\tau+\sigma-\varrho) \begin{vmatrix} \varrho & \tau-\sigma \\ \tau-\sigma & \varrho \end{vmatrix}$$

$$= (\varrho + \sigma + \tau)(\tau + \sigma - \varrho)(\varrho + \tau - \sigma)(\varrho - \tau + \sigma).$$

§ 4. Partialdeterminanten höherer Ordnung.

41. *Begriff der Unterdeterminante zweiter Ordnung einer Determinante $\varDelta$.* Es möge noch einmal daran erinnert werden, dass in keinem Gliede G_ϱ einer Determinante zwei Elemente a_{ik} und a_{rs} als Factoren auftreten können, für welche $i = r$, oder $k = s$ wäre, da jedes Glied aus jeder Zeile und jeder Colonne ein und nur ein Element besitzt. Wählen wir nun aus allen N Gliedern G_ϱ diejenigen heraus, welche

das Product $a_{ik} \cdot a_{rs}$ $(i \gtrless r,\ k \gtrless s)$ als Factor haben und bezeichnen sie der Reihe nach mit

$$(1) \qquad G_{k_1},\quad G_{k_2},\quad G_{k_3}, \cdots G_{k_\sigma}.$$

Das Product aller übrigen Factoren eines dieser ausgewählten Glieder sei *inclusive Modul* ε_S mit K_{k_ϱ} bezeichnet, so dass also die Beziehungen gelten:

$$(2) \quad G_{k_1} = a_{ik}\, a_{rs} \cdot K_{k_1},\quad G_{k_2} = a_{ik}\, a_{rs}\, K_{k_2}, \cdots \text{u.s.w.},\quad G_{k_\sigma} = a_{ik}\, a_{rs}\, K_{k_\sigma}.$$

Die Summe aller dieser Glieder ist daher dargestellt durch

$$(3) \qquad \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\sigma} G_{k_\varrho} = a_{ik}\, a_{rs} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\sigma} K_{k_\varrho},$$

oder wenn wir

$$(4) \qquad \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\sigma} K_{k_\varrho} = A_{\substack{ir\\ks}}$$

setzen, so erhalten wir:

$$(5) \qquad \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\sigma} G_{k_\varrho} = a_{ik}\ a_{rs} \cdot A_{\substack{ir\\ks}}.$$

Wir nennen nun $A_{\substack{ir\\ks}}$ die zum Producte $a_{ik}\ a_{rs}$ gehörige *Partialdeterminante zweiter Ordnung* von Δ, oder Minor zweiter Ordnung.

42. *Beziehung des Minors zweiter Ordnung* $A_{\substack{ir\\ks}}$ zum *Minor erster Ordnung* A_{ik}. Die oben ausgewählten Glieder G_{k_ϱ} müssen, da sie ja den Factor a_{ik} enthalten, sämmtlich unter den bereits früher (Nr. 24) herausgegriffenen Gliedern G_{i_ϱ} auftreten, welche die Form besassen:

$$(6) \qquad G_{i_\varrho} = a_{ik} \cdot H_{i_\varrho}.$$

Jedes Glied G_{i_ϱ}, dessen Factor H_{i_ϱ} das Element a_{rs} enthält, ist auch ein Glied G_{k_ϱ}. Bezeichnen wir also jeden solchen Factor H_{i_ϱ}, in welchem a_{rs} auftritt, mit H_{k_ϱ}, dann besitzt dieser selbst wieder die Form

$$(7) \qquad H_{k_\varrho} = a_{rs} \cdot K_{k_\varrho},$$

wenn wir unter K_{k_ϱ} die Gesammtheit aller anderen Elemente in H_{k_ϱ} verstehen, wie wir bereits in Nr. 41 festgesetzt haben.

Wir haben also auch wegen Gleichung (4) in Nr. 41 für die Summe aller dieser Factoren H_{k_ϱ} die Beziehung

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\sigma} H_{k_\varrho} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\sigma} a_{rs}\ K_{k_\varrho} = a_{rs} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\sigma} K_{k_\varrho} = a_{rs}\ A_{\substack{ir\\ks}}.$$

Nun ist aber anderntheils die Summe aller Grössen H_{i_ϱ}, aus denen die Grössen H_{k_ϱ} gewählt sind, gerade die Determinante A_{ik}, und zwar der Minor zum Elemente a_{ik} in der Determinante Δ. Ganz ebenso ist die Summe aller Grössen K_{k_ϱ} die Determinante $A_{\substack{ir\\ks}}$, und zwar der Minor zum Elemente a_{rs} in der Determinante A_{ik}. Wir erkennen sonach: *Die Partialdeterminante* $A_{\substack{ir\\ks}}$ *zweiter Ordnung von* Δ *ist Minor erster Ordnung von* A_{ik}, oder allgemeiner ausgesprochen: *Unterdeterminanten von Unterdeterminanten sind selbst wieder Minoren der ursprünglichen Determinante.*

Es mag hierbei noch erwähnt sein, dass der Minor $A_{\substack{ir\\ks}}$ nicht nur als Unterdeterminante zum Elemente a_{rs} in der Determinante A_{ik} dargestellt werden kann, sondern es kann genau ebenso gezeigt werden, dass $A_{\substack{ir\\ks}}$ auch Unterdeterminante zu a_{ik} in der Unterdeterminante A_{rs} ist*).

43. *Beispiel.* Greifen wir aus der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & q & r & s \\ a & b & c & d \\ t & u & v & w \\ k & x & y & z \end{vmatrix}$$

jene Glieder G_{i_ϱ} heraus, welche das Element r enthalten, so ist die Summe aller dieser Glieder nach Nr. 26 dargestellt durch

$$\sum G_{i_\varrho} = r \cdot A_{13} = (-1)^{1+3} r \begin{vmatrix} a & b & d \\ t & u & w \\ k & x & z \end{vmatrix}$$

$$= r[auz - axw - tbz + txd + kbw - kud].$$

Wählen wir nun aus diesen alle Glieder G_{k_ϱ}, die überdies das Element d besitzen, so erhalten wir

$$\sum G_{k_\varrho} = r[txd - kud] = rd[xt - ku]$$

$$= rd \begin{vmatrix} x & u \\ k & t \end{vmatrix} = rd\, A_{\substack{12\\34}}.$$

Ganz ebenso gelangen wir zu dieser Summe, wenn wir aus Δ zunächst alle Glieder $\overline{G}_{i_\varrho}$ mit dem Factor d entnehmen. Es ist dann:

---

*) Es ist also offenbar:

$$A_{\substack{ir\\ks}} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial a_{rs}} = \frac{\partial A_{rs}}{\partial a_{ik}} = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{ik}\, \partial a_{rs}}.$$

$$\sum \overline{G}_{i_\varrho} = d \cdot A_{24} = (-1)^{2+4}\, d \cdot \begin{vmatrix} p & q & r \\ t & u & v \\ k & x & y \end{vmatrix}$$

$$= d[puy - pxv - tqy + txr + kqv - kur].$$

Sondert man in der letzten Form die Glieder mit dem Factor r ab, so kommt:

$$\sum G_{k_\varrho} = \sum \overline{G}_{k_\varrho} = d[txr - kur] = dr(tx - ku) = dr \begin{vmatrix} x & u \\ k & t \end{vmatrix}.$$

44. *Begriff des Minors dritter Ordnung.* Die Erweiterung der vorhergehenden Entwicklung hat nun keine Schwierigkeiten mehr. Wählt man aus den N Gliedern G_ϱ jene aus, welche den Factor

$$a_{ik}\ a_{rs}\ a_{lm}$$

besitzen, wobei wieder i, r, l einerseits und k, s, m andrerseits von einander verschieden sein müssen, so bilden ganz wie vorhin die übrigen Factoren aller dieser Glieder selbst wieder eine Determinante, die wir analog incl. Vorzeichen mit $A_{\substack{i\,r\,l\\ k\,s\,m}}$ bezeichnen. Wir nennen sie Partialdeterminante oder Minor dritter Ordnung, und die Summe aller dieser Glieder mit dem Factor $a_{ik} \cdot a_{rs} \cdot a_{lm}$ ist dargestellt durch

$$a_{ik} \,.\, a_{rs} \,.\, a_{lm} \,.\, A_{\substack{i\,r\,l\\ k\,s\,m}}.$$

Wir können zu diesem Minor auf verschiedene Arten gelangen; man kann ihn auffassen als *Minor erster Ordnung* zum Elemente a_{lm} in der Partialdeterminante $A_{\substack{i\,r\\ k\,s}}$, oder zum Elemente a_{rs} im Minor $A_{\substack{i\,l\\ k\,m}}$ oder zum Elemente a_{ik} in der Unterdeterminante $A_{\substack{r\,l\\ s\,m}}$. Man kann ihn aber auch deuten als *Minor zweiter Ordnung* von A_{ik}, oder von A_{rs}, oder von A_{lm}. Wir sehen also wieder den Satz bestätigt: Unterdeterminanten von Unterdeterminanten sind selbst Minoren der ursprünglichen Determinante.

45. *Begriff des Minors* p^{ter} *Ordnung.* Greift man auf diese Weise ganz allgemein aus den N Gliedern G_ϱ diejenigen heraus, welche p gemeinschaftliche Elemente als Factoren besitzen, etwa die Elemente:

$$a_{i_1 k_1}\quad a_{i_2 k_2}\quad a_{i_3 k_3} \ldots a_{i_p k_p},$$

so umfasst die zugehörige Partialdeterminante p^{ter} Ordnung alle jene Elemente, welche die nicht gemeinschaftlichen Factoren der ausgewählten Glieder bilden. Diese Partialdeterminante p^{ter} Ordnung von $\varDelta$, welche wir *inclusive Vorzeichen* mit

$$A_{\substack{i_1\, i_2 \ldots i_p\\ k_1\, k_2 \ldots k_p}}$$

bezeichnen, ist Partialdeterminante $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $A_{i_1 k_1}$, $(p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung von $A_{\substack{i_1 i_2 \\ k_1 k_2}}$ u. s. w., kurz sie ist Minor jeder vorhergehenden Unterdeterminante, d. h. jedes Minors niedrigerer Ordnung.

46. *Berechnung der Partialdeterminante zweiter Ordnung* $A_{\substack{12\\12}}$. Der Minor zweiter Ordnung $A_{\substack{12\\12}}$, also jener Minor, der zum Producte $a_{11}\, a_{22}$ gehört, kann nach den Entwicklungen in Nr. 42 aufgefasst werden als Unterdeterminante erster Ordnung des Elementes a_{22} im Minor erster Ordnung A_{11}, dessen Matrix entsteht durch Unterdrückung der ersten Zeile und Colonne in $\varDelta$. Es muss daher $A_{\substack{12\\12}}$ genau ebenso aus A_{11} erhalten werden, wie A_{11} aus $\varDelta$; d. h. da die Unterdeterminante A_{11} dargestellt ist durch

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & a_{33} \ldots & a_{3n} \\ a_{42} & \cdot \;\cdot & \cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \\ \cdot \;\cdot & \cdot \;\cdot & \cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{nn} \end{vmatrix},$$

so erhält man daraus die Matrix von $A_{\substack{12\\12}}$ durch Unterdrückung der ersten Zeile und Colonne, d. i. jener beiden Reihen, die sich im Elemente a_{22} schneiden. Dieselbe ist also:

$$A_{\substack{12\\12}} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \ldots & a_{3n} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \ldots & a_{4n} \\ a_{53} & \cdot \;\cdot & \cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \;\cdot & \cdot \;\cdot \;\cdot & \\ a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

eine Matrix, die offenbar auch aus $\varDelta$ erhalten werden kann durch Weglassung jener Zeilen und Colonnen, in deren Schnittpunkten die Elemente $a_{11}\; a_{12}$ sich befinden.

47. *Berechnung des Minors* $A_{\substack{ir\\ks}}$. Ist nun im allgemeinen Falle der Minor zweiter Ordnung $A_{\substack{ir\\ks}}$ zu berechnen, so bringen wir zunächst durch cyclische Vertauschung die Elemente a_{ik} und a_{rs} in der Determinante $\varDelta$ an die Stellen von a_{11}, bezw. a_{22}. Denken wir uns hierauf die erhaltene neue Determinante D in den Elementen b_{ik} geschrieben, so dass also

$$D = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

wobei

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} b_{11} = a_{ik}\,, \; b_{12} = a_{is}\,, \quad b_{13} = a_{i1} \dots \\ b_{21} = a_{rk}\,, \; b_{22} = a_{rs}\,, \quad b_{23} = a_{r1} \dots \\ b_{31} = a_{1k}\,, \; \dots \text{ u. s. w.,} \end{cases}$$

dann stimmen noch immer, wie wir früher (Nr. 20) gesehen, beide Determinanten D und Δ in allen einzelnen Gliedern überein, abgesehen im Allgemeinen vom Vorzeichen. Letzteres hat sich nach Nr. 22 um den Factor $(-1)^\nu$, wo

$$\nu = (ir) + (ks) + i + k + r + s,$$

geändert, indem D durch Substitution der Werthe von b_{ik} aus (I) bis auf diesen Factor $(-1)^\nu$ in Δ übergeht.

Während nun aber die Summe der Glieder, welche $b_{11}\, b_{22}$ in D als Factor haben, dargestellt ist durch

$$\text{(1)} \qquad \sum \overline{G} = b_{11} \quad b_{22} \cdot B_{\substack{12\\12}},$$

besitzen die nämlichen Glieder, entnommen aus der Determinante Δ, die Factoren $a_{ik}\ a_{rs}$, und ihre Summe ist

$$\text{(2)} \qquad \sum G = a_{ik} \ a_{rs} \ A_{\substack{ir\\ks}}.$$

Nun ist aber anderntheils

$$\sum G = (-1)^\nu \sum \overline{G},$$

daher die Beziehung:

$$a_{ik} \ a_{rs} \ A_{\substack{ir\\ks}} = (-1)^\nu \ b_{11} \ b_{22} \ B_{\substack{12\\12}},$$

oder weil ja $a_{ik} = b_{11}$ und $a_{rs} = b_{22}$, so wird endlich:

$$\text{(3)} \qquad A_{\substack{ir\\ks}} = (-1)^\nu \ B_{\substack{12\\12}}, \quad \nu = (ir) + (ks) + i + k + r + s.$$

Die Matrix des Minors $B_{\substack{12\\12}}$ entsteht aber nach dem Vorigen durch Unterdrückung der ersten und zweiten Zeile und Colonne; das sind aber gerade jene Zeilen, die sich in a_{ik} und a_{rs} schneiden. Daher der Satz:

„Die Unterdeterminante zweiter Ordnung $A_{\substack{ir\\ks}}$ zum Producte $a_{ik}\,a_{rs}$ in der Determinante Δ wird erhalten, wenn man in Δ die i^{te} und r^{te} Zeile, die k^{te} und s^{te} Colonne unterdrückt und die Determinante der so erhaltenen Matrix mit $(-1)^\nu$ multiplicirt, wo $\nu = (ir) + (ks) + i + k + r + s$.“

48. *Berechnung des Minors p^{ter} Ordnung.* Ganz auf dieselbe Weise zeigt man, dass die Matrix des Minors p^{ter} Ordnung von Δ, welcher zum Producte

$$a_{i_1 k_1}\, a_{i_2 k_2}\, a_{i_3 k_3} \cdots a_{i_p k_p}$$

gehört, erhalten wird, indem man die p Zeilen und Colonnen unterdrückt, die sich in diesen Elementen schneiden. Die Determinante, deren Matrix sich aus den restirenden Colonnen und Zeilen zusammensetzt, stellt, wenn man sie noch mit $(-1)^\nu$ multiplicirt, wo nach Nr. 23

$$\nu = (i_1\, i_2\, i_3 \cdots i_p) + (k_1\, k_2 \cdots k_p) + \sum_1^p i_\varrho + \sum_1^p k_\varrho,$$

den Minor p^{ter} Ordnung dar.

Beispiel. Der Minor vierter Ordnung zu dem Producte $a_{62}\, a_{53}\, a_{14}\, a_{31}$ in

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}$$

ist dargestellt durch:

$$A_{\substack{6513\\2341}} = (-1)^\nu \begin{vmatrix} a_{25} & a_{26} \\ a_{45} & a_{46} \end{vmatrix},$$

wo

$$\nu = (6513) + (2341) + (6 + 5 + 1 + 3) + (2 + 3 + 4 + 1)$$
$$= 5 + 3 + 15 + 10 = 33,$$

also:

$$A_{\substack{6513\\2341}} = -\left(a_{25}\; a_{46} - a_{45}\; a_{26}\right).$$

49. *Die correspondirende Determinante des Minors zweiter Ordnung.* Wir hatten die Matrix des Minors $A_{\substack{ir\\ks}}$ erhalten durch Unterdrückung jenes Colonnen- und Zeilenpaares, das sich in den Elementen a_{ik} und a_{rs} schneidet. Die nämlichen Zeilen und Colonnen schneiden sich aber auch noch in zwei andern Elementen, nämlich in a_{is} und a_{rk}. Zum

Producte dieser beiden gehört also ein Minor $A_{\substack{ir\\sk}}$, der die nämliche Matrix besitzt. Während aber die Unterdeterminante $A_{\substack{ir\\ks}}$ den Factor $(-1)^\nu$, wo

$$\nu = (ir) + (ks) + i + r + k + s,$$

enthält, ist der Minor $A_{\substack{ir\\sk}}$ multiplicirt mit $(-1)^{\bar{\nu}}$, wo

$$\bar{\nu} = (ir) + (sk) + i + r + s + k.$$

Die beiden Grössen ν und $\bar{\nu}$ sind nothwendig um eine und nur eine Einheit verschieden, d. h. es besteht die Relation

$$\bar{\nu} = \nu \pm 1,$$

oder

$$(-1)^{\bar{\nu}} = -(-1)^\nu.$$

Daraus folgt, dass die beiden so erhaltenen Minoren nur durch das Vorzeichen sich unterscheiden, d. h. dass

$$A_{\substack{ir\\ks}} = -A_{\substack{ir\\sk}}.$$

Sämmtliche Glieder der Determinante $\varDelta$, welche die Glieder dieser beiden durch die nämliche Matrix dargestellten Minoren zu Factoren haben, sind daher dargestellt durch den Ausdruck:

$$(A) \qquad a_{ik}\,a_{rs}\,A_{\substack{ir\\ks}} + a_{is}\,a_{rk}\,A_{\substack{ir\\sk}} = (a_{ik}\,a_{rs} - a_{is}\,a_{rk})\,A_{\substack{ir\\ks}}$$

$$= (-1)^\nu \begin{vmatrix} a_{ik} & a_{is} \\ a_{rk} & a_{rs} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1,k-1} & a_{1,k+1} \dots a_{1,s-1} & a_{1,s+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{32} \dots a_{2,k-1} & a_{2,k+1} \dots a_{2,s-1} & a_{2,s+1} \dots a_{2n} \\ a_{31} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \dots & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \dots & a_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ist hierbei $i < r$, $k < s$ — eine Voraussetzung, die immer erlaubt ist und von der ich auch, wie man erkennt, in der zweiten Matrix der Relation (A) stillschweigend Gebrauch gemacht habe — so sind in beiden Matrices Reihen und Colonnen gut geordnet, in der ersten nach Voraussetzung, in der zweiten a priori, da sie aus der gut ge-

ordneten Matrix von Δ nur durch Unterdrückung von zwei Zeilen und Colonnen entsteht. In diesem Falle reducirt sich ν auf die Summe der Indices allein, d. h. es ist:

$$\nu = i + r + k + s,$$

und man nennt nun die Determinante:

$$(-1)^{\nu} \begin{vmatrix} a_{ik} & a_{is} \\ a_{rk} & a_{rs} \end{vmatrix}$$

die *correspondirende Determinante* zu der durch die Matrix von $A_{\substack{ir\\ks}}$ dargestellten Determinante.

50. *Die correspondirende Determinante des Minors dritter Ordnung.* Die Matrix des Minors dritter Ordnung $A_{\substack{irl\\ksm}}$ ergab sich aus der Matrix von Δ durch Unterdrückung jener drei Zeilen und jener drei Colonnen, die sich in den Elementen $a_{ik}\ a_{rs}\ a_{lm}$ schneiden. Genau auf dieselbe Matrix werden wir aber geführt, wenn wir die Minoren zu irgend einem der Producte bestimmen, das aus $a_{ik} \cdot a_{rs} \cdot a_{lm}$ durch Vertauschung der ersten oder auch der zweiten Indices entsteht, also zu den fünf weiteren Producten:

$$a_{ik}\ a_{ls}\ a_{rm},\quad a_{rk}\ a_{is}\ a_{lm},\quad a_{rk}\ a_{ls}\ a_{im},\quad a_{lk}\ a_{is}\ a_{rm},\quad a_{lk}\ a_{rs}\ a_{im};$$

denn dieselben enthalten keine andern Indices als die bereits in $a_{ik}\ a_{rs}\ a_{lm}$ auftretenden i, r, l, k, s, m, so dass bei Bildung der Matrix des jeweiligen Minors immer dieselben Zeilen und Colonnen aus Δ zu streichen sind. Die Matrix zu $A_{\substack{irl\\ksm}}$ ist also auch Matrix für die Minoren, die aus $A_{\substack{irl\\ksm}}$ durch Permutation etwa der ersten Indices entstehen, also zu:

$$A_{\substack{ilr\\ksm}},\quad A_{\substack{ril\\ksm}},\quad A_{\substack{rli\\ksm}},\quad A_{\substack{lir\\ksm}},\quad A_{\substack{lri\\ksm}}.$$

Während nun aber der Minor $A_{\substack{irl\\ksm}}$ den Faktor $(-1)^{\nu}$ besitzt, wo

$$\nu = (irl) + (ksm) + (i + r + l) + (k + s + m),$$

muss das Vorzeichen der übrigen Minoren eben wegen der Permutation der Indices (irl) wechseln, d. h. es müssen die Relationen bestehen:

$$A_{\substack{irl\\ksm}} = -A_{\substack{ilr\\ksm}} = -A_{\substack{ril\\ksm}} = +A_{\substack{rli\\ksm}} = +A_{\substack{lir\\ksm}} = -A_{\substack{lri\\ksm}}.$$

Es ist daher die Summe aller jener Glieder, welche ein Glied irgend eines dieser sechs Minoren als Factor haben, dargestellt durch den Ausdruck:

$$A_{\substack{irl\\ksm}} \cdot \Big(a_{ik}\, a_{rs}\, a_{lm} - a_{ik}\, a_{ls}\, a_{rm} - a_{rk}\, a_{is}\, a_{lm} + a_{rk}\, a_{ls}\, a_{im} + a_{lk}\, a_{is}\, a_{rm} - a_{lk}\, a_{rs}\, a_{im}\Big)$$

$$=(-1)^\nu \begin{vmatrix} a_{ik} & a_{is} & a_{im} \\ a_{rk} & a_{rs} & a_{rm} \\ a_{lk} & a_{ls} & a_{lm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \ldots a_{1,k-1} & a_{1,k+1} \ldots a_{1,s-1} & a_{1,s+1} \ldots a_{1,m-1} & a_{1,m+1} \ldots a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdot & \cdot & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdot & \cdot & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \cdot & \cdot & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdot & \cdot & a_{r+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l-1,1} & a_{l-1,2} & \cdot & \cdot & a_{l-1,n} \\ a_{l+1,1} & a_{l+1,2} & \cdot & \cdot & a_{l+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \;\ldots & a_{n,s-1} & a_{n,s+1} \;\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ist hier wiederum $i < r < l$, und $k < s < m$, dann reducirt sich der Exponent ν auch hier auf die Summe der Indices, so dass

$$\nu = i + r + l + k + s + m,$$

und die Determinante

$$(-1)^\nu \begin{vmatrix} a_{ik} & a_{is} & a_{im} \\ a_{rk} & a_{rs} & a_{rm} \\ a_{lk} & a_{ls} & a_{lm} \end{vmatrix}$$

wird dann die *correspondirende Determinante* zu der durch die Matrix von $A_{\substack{irl\\ksm}}$ dargestellten Determinante genannt.

51. *Die correspondirende Determinante des Minors* p^{ter} *Ordnung.* Die beiden vorhergehenden speciellen Fälle von correspondirenden Determinanten zeigen, dass deren Matrix gerade durch jene Elemente gebildet ist, in welchen sich die bei Bildung des zugehörigen Minors zweiter oder dritter Ordnung unterdrückten Zeilen und Colonnen schneiden. Die Erweiterung der Definition einer correspondirenden Determinante ergiebt sich daher in folgender Weise. Greift man aus der Matrix einer Determinante Δ irgend welche ϱ Zeilen und ϱ Colonnen heraus, so erhalten wir zwei kleinere Determinanten, und zwar 1) diejenige, deren Matrix aus allen Elementen besteht, in welchen sich die ϱ Colonnen und ϱ Zeilen schneiden; 2) diejenige, welche sich aus den in Δ übrig bleibenden Elementen zusammensetzt. Die erste hat ϱ Zeilen und ϱ Colonnen, die zweite σ Zeilen und σ Colonnen, so

dass $\varrho + \sigma = n$. Bildet man das Product beider Determinanten, indem man die Summe der Glieder der einen mit der Summe der Glieder der andern multiplicirt, so bietet dasselbe — vom Vorzeichen abgesehen — alle Glieder der ursprünglichen Determinante, welche sowohl die Glieder der ersten als die der zweiten Determinante als Factor haben. Sind nun in den beiden Determinanten Zeilen und Colonnen gut geordnet und multiplicirt man die eine von ihnen mit der entsprechenden Potenz $(-1)^\nu$, so dass das Product derselben die betreffenden Glieder der ursprünglichen Determinanten *inclusive* Vorzeichen liefert, dann nennt man die beiden Determinanten von ϱ^2, bezw. σ^2 Elementen *correspondirende Determinanten*. Als Exponent ν kann hierbei die Summe aller Indices, welche entweder die Diagonalelemente der einen oder die der anderen Determinante besitzen, genommen werden.

Charakterisiren wir die Determinante $\Delta^{(\sigma)}$, deren Matrix nach Unterdrückung der ϱ Colonnen und Zeilen sich aus den übrig bleibenden Elementen a_{ik} zusammensetzt, durch die Elemente ihrer Diagonale setzen wir also

$$\Delta^{(\sigma)} = + \left(a_{i_1 k_1} \; a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_\sigma k_\sigma}\right),$$

dann ist die correspondirende Determinante $\Delta^{(\varrho)}$ inclusive Vorzeichen dargestellt durch

$$A_{\substack{i_1 i_2 \ldots i_\sigma \\ k_1 k_2 \ldots k_\sigma}},$$

so dass also:

$$\Delta^{(\varrho)} = A_{\substack{i_1 i_2 \ldots i_\sigma \\ k_1 k_2 \ldots k_\sigma}} = (-1)^\nu \left(a_{i'_1 k'_1} \; a_{i'_2 k'_2} \cdots a_{i'_\varrho k'_\varrho}\right),$$

$$\nu = \sum_1^\sigma i_\mu + \sum_1^\sigma k_\mu$$

und

$$\varrho + \sigma = n.$$

52. *Beispiel* 1. Sei gegeben die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man die Determinante in die Summe ihrer 24 Glieder, so werden Glieder mit x_1^2, x_2^2, x_3^2 auftreten. Interessirt es uns nur, die Coefficienten von x_1^2, x_2^2, x_3^2 kennen zu lernen, so werden sie uns rascher durch die in Nr. 49 gegebene Methode geliefert. Darnach sind die Glieder mit x_1^2 enthalten in

$$(-1)^{\nu_1} b_{14}\, b_{41} \cdot B_{\substack{14\\41}} = (-1)^{\nu_1} x_1^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

wo

$$\nu_1 = (14) + (41) + 1 + 4 + 4 + 1 = 11,$$

es ist also der Coefficient von x_1^2

$$= -(a_{22}\, a_{33} - a_{32}\, a_{23});$$

die Glieder, welche x_2^2 und x_3^2 enthalten, werden geliefert durch

$$(-1)^{\nu_2} b_{24}\, b_{42} \cdot B_{\substack{24\\42}} = (-1)^{\nu_2} x_2^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\nu_2 = (24) + (42) + 2 + 4 + 4 + 2 = 13;$$

$$(-1)^{\nu_3} b_{34}\, b_{43} \cdot B_{\substack{34\\43}} = (-1)^{\nu_3} x_3^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\nu_3 = (34) + (43) + 3 + 4 + 4 + 3 = 15.$$

Daher ist der Coefficient von x_2^2:

$$-(a_{11}\, a_{33} - a_{31}\, a_{13}),$$

und der Coefficient von x_3^2:

$$-(a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}).$$

Beispiel 2. Sei gegeben die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & +\ \lambda^3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -3\lambda^2 & +\ \lambda^3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & +3\lambda & -3\lambda^2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & -1 & +3\lambda \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Wir bestimmen die correspondirenden Determinanten zu den Minoren zweiter Ordnung

1) $$\Delta_1^{(2)} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = +(bcd)$$

und

$$\Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} = +(cde).$$

Die correspondirende Determinante zu $\Delta_1^{(2)}$ ist

$$A_{\substack{234\\123}} = \Delta_1^{(3)} = (-1)^{\nu_1} \begin{vmatrix} \lambda^3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},$$

$$= +\lambda^3$$

$$\nu_1 = 2 + 3 + 4 + 1 + 2 + 3 = 15,$$

oder auch

$$\nu_1 = 1 + 5 + 4 + 5 = 15.$$

Die correspondirende Determinante zu $\Delta_2^{(2)}$ ist

$$A_{\substack{345\\123}} = \Delta_2^{(3)} = (-1)^{\nu_2} \begin{vmatrix} \lambda^3 & 0 \\ -3\lambda^2 & +\lambda^3 \end{vmatrix}, \\ = \lambda^6$$

$$\nu_2 = 3 + 4 + 5 + 1 + 2 + 3 = 18,$$

oder auch

$$\nu_2 = 1 + 2 + 4 + 5 = 12.$$

§ 5. Entwicklung der Determinante in eine Summe von Producten correspondirender Determinanten.

53. *Summe aus Producten von Minoren $(n-2)^{ter}$ Ordnung und ihren correspondirenden $A_{\substack{ir\\ks}}$.* Wir hatten in Nr. 28 und 29 bereits Entwicklungen der Determinante nach Minoren erster Ordnung gegeben und erhielten als eine derselben:

$$\Delta = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \cdots a_{1n} A_{1n}. \tag{1}$$

Die Grössen $A_{1,k}$ sind nun aber selbst Determinanten und wir können sie wie die Determinante Δ nach ihren ersten Minoren, d. h. nach den zweiten Minoren der ursprünglichen Determinante entwickeln. Es ist dann:

$$(2) \begin{cases} A_{11} = a_{22} A_{\substack{12\\12}} + a_{23} A_{\substack{12\\13}} + \cdots\cdots\cdots a_{2n} A_{\substack{12\\1n}} \\ A_{12} = a_{21} A_{\substack{12\\21}} + a_{23} A_{\substack{12\\23}} + \cdots\cdots\cdots a_{2n} A_{\substack{12\\2n}} \\ A_{13} = a_{21} A_{\substack{12\\31}} + a_{22} A_{\substack{12\\32}} + a_{24} A_{\substack{12\\34}} \cdots a_{2n} A_{\substack{12\\3n}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1k} = a_{21} A_{\substack{12\\k1}} + \cdots a_{2,k-1} A_{\substack{12\\k,k-1}} + a_{2,k+1} A_{\substack{12\\k,k+1}} + \cdots a_{2n} A_{\substack{12\\kn}} \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Tragen wir die so erhaltenen Entwicklungen für die Minoren A_{1k} in Gleichung (1) ein, so bekommen wir:

$$(3) \quad \begin{aligned} \Delta = {} & a_{11} a_{22} A_{\substack{12\\12}} + a_{11} a_{23} A_{\substack{12\\13}} + \cdots + a_{11} a_{2n} A_{\substack{12\\1n}} \\ & + a_{12} a_{21} A_{\substack{12\\21}} + a_{12} a_{23} A_{\substack{12\\23}} + \cdots \\ & \cdots + a_{1k} a_{21} A_{\substack{12\\k1}} \cdots\cdots\cdots + a_{1n} a_{2n-1} A_{\substack{12\\n,n-1}}. \end{aligned}$$

Fragen wir uns, welche Elemente treten als Factoren der Minoren zweiter Ordnung in dieser Entwicklung auf, so erkennen wir, sie sind dadurch charakterisirt, dass ihre ersten Indices 1 und 2 sind, während in ihren zweiten Indices alle Amben der n Zahlen $1\,2 \cdots$ bis n und zwar doppelt vertreten sind, einmal als Combination (ik), dann als Combination (ki). Fassen wir also je zwei Glieder a_{2k} in der Summe

$$(4) \qquad \Delta = \sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{\substack{i=n\\k=n}} a_{1i}\, a_{2k}\, A_{\substack{12\\ik}},$$

wo

$$i \gtrless k,$$

geeignet zusammen, nämlich solche zwei Glieder, deren eines die Elemente $a_{1i}\, a_{2k}$, und deren anderes die Elemente $a_{1k}\, a_{2i}$ als Factoren besitzt, so lässt sich die Gleichung (4) wegen

$$A_{\substack{12\\ik}} = - A_{\substack{12\\ki}} \quad \text{(vgl. Nr. 49)}$$

schreiben:

$$(5) \quad \Delta = \sum (a_{1i}\, a_{2k} - a_{1k}\, a_{2i})\, A_{\substack{12\\ik}} = \sum_{\substack{i=1\\k=2}}^{\substack{k=n\\i=n-1}} \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{2i} \\ a_{1k} & a_{2k} \end{vmatrix} \cdot A_{\substack{12\\ik}}, \quad k > i.$$

Diese Darstellung der Determinante Δ ist aber nichts Anderes, als eine Entwicklung derselben in eine Summe von Producten je zweier Minoren. Die erste Reihe der Minoren geht aus der Matrix hervor

$$(A) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix},$$

die zweite Reihe wird von den mit diesen Determinanten correspondirenden gebildet, deren Werth *inclusive* Vorzeichen $(-1)^\nu$ dargestellt ist durch $A_{\substack{12\\ik}}$, so dass

$$A_{\substack{12\\ik}} = (-1)^\nu \left(a_{3\varrho_1}\, a_{4\varrho_2} \cdots a_{n\varrho_{n-2}}\right),$$

wo

$$\varrho_1 < \varrho_2 \cdots < \varrho_{n-2}$$

und von i und k verschieden,

und $$\nu = 1 + 2 + i + k \text{ ist.}$$

Die Summe aller Producte je zweier solcher correspondirender Determinanten liefert Δ.

54. *Entwicklung in eine Summe von Producten aus Minoren* $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung und deren correspondirenden Determinanten.* Ganz ebenso lässt sich Δ in eine Summe von Producten entwickeln, deren einer Factor eine Determinante der dreizeiligen Matrix

$$\left|\begin{matrix} a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{31} \; a_{32} \ldots a_{3n} \end{matrix}\right|,$$

und deren anderer Factor die correspondirende Determinante

$$A_{\substack{1\,2\,3\\ i\,k\,r}} = (-1)^{\nu}\left(a_{4\varrho_1}\, a_{5\varrho_2} \cdots a_{n\varrho_{n-3}}\right), \quad \varrho_1 < \varrho_2 \cdots < \varrho_3$$

und von i, k, r verschieden,

und $$\nu = 1 + 2 + 3 + i + k + r$$

ist. Wir ersetzen zu dem Zwecke in der Gleichung (3) die Minoren zweiter Ordnung durch ihre Entwicklung nach Minoren dritter Ordnung:

$$A_{\substack{1\,2\\ i\,k}} = a_{31}\, A_{\substack{1\,2\,3\\ i\,k\,1}} + a_{32}\, A_{\substack{1\,2\,3\\ i\,k\,2}} + \cdots,$$

dann treten in der Summe nur solche drei Elemente als Factoren der Minoren dritter Ordnung auf, welche 1) als erste Indices 1, 2, 3 besitzen, 2) als zweite Indices irgend welche Ternen der Zahlen $(1\,2 \cdots n)$, und zwar ist jede solche Combination zu dreien sechs Mal vertreten, entsprechend der Anzahl der Permutationen, welche drei Indices bilden können. Fasst man wieder je sechs solche zusammengehörige Glieder in der Entwicklung von Δ zusammen, so kommt, unter Berücksichtigung der Resultate in Nr. 50:

$$\Delta = \sum_{\substack{i=1\\ k=1\\ r=1}}^{\substack{i=n\\ k=n\\ r=n}} \Big(a_{1i}\, a_{2k}\, a_{3r} - a_{1i}\, a_{2r} a_{3k} - a_{1k}\, a_{2i}\, a_{3r} + a_{1k}\, a_{2r}\, a_{3i} + a_{1r}\, a_{2i}\, a_{3k} - a_{1r}\, a_{2k}\, a_{3i}\Big)\, A_{\substack{1\,2\,3\\ i\,k\,r}}$$

$$= \sum \left|\begin{matrix} a_{1i} & a_{2i} & a_{3i} \\ a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} \\ a_{1r} & a_{2r} & a_{3r} \end{matrix}\right| \cdot A_{\substack{1\,2\,3\\ i\,k\,r}},$$

wie oben behauptet wurde.

55. *Allgemeiner Fall.* So kann endlich jede Determinante Δ in eine Summe von Producten entwickelt werden, deren Factoren Unterdeterminanten beliebigen Grades sind. Man nimmt eine Matrix von

p Zeilen — oder etwa auch von p Colonnen —, bildet daraus die $\binom{n}{p}$ Determinanten p^{ten} Grades

$$\Delta^{(p)} = \left(a_{i_1 k_1}\, a_{i_2 k_2}\, a_{i_3 k_3} \cdots a_{i_p k_p}\right);$$

zu jeder derselben bestimmt man die correspondirende Determinante $(n-p)^{\text{ten}}$ Grades

$$\Delta^{(n-p)} = A_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_p \\ k_1 k_2 \cdots k_p}} = (-1)^\nu \left(a_{i_{p+1}, k_{p+1}},\, a_{i_{p+2}, k_{p+2}} \cdots a_{i_n, k_n}\right),$$

wobei

$$\nu = \sum_1^p i_\varrho + \sum_1^p k_\varrho.$$

Die Summe aller Producte je zweier correspondirender Determinanten liefert die ursprüngliche Determinante Δ. Man hat also:

$$\Delta = \sum \left(a_{i_1 k_1}\, a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_p k_p}\right) \cdot A_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_p \\ k_1 k_2 \cdots k_p}}.$$

Diese Entwicklung von Δ nach Producten ihrer Minoren hat zuerst Laplace gegeben. (Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde, 1772, Seite 304.)

56. *Anwendungen des Laplace'schen Satzes bei Bildung von Relationen zwischen Unterdeterminanten.* Wir hatten in Nr 32 Relationen aufgestellt, welche zwischen den Elementen einer Zeile oder Colonne und Unterdeterminanten 1ter Ordnung bestehen, oder, wie wir uns jetzt auch ausdrücken können, zwischen Minoren $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung und ihren correspondirenden Determinanten. Die Methode, welche wir dort benutzten, bestand darin, dass wir die Matrix (Δ) in Nr. 28, oder eine ihr analoge durch eine Zeile erweiterten, die bereits in der Matrix auftrat, und die so erhaltene Determinante nach den Elementen dieser Zeile entwickelten. Der Satz von Laplace setzt uns nun in den Stand, auf dieselbe Weise Relationen zwischen Minoren beliebigen Grades herzustellen. Wir nehmen eine beliebige Matrix (B) von p Zeilen und n Colonnen, erweitern sie zu einer Matrix von n Zeilen und n Colonnen, indem wir $n-p$ Zeilen hinzufügen, unter denen wenigstens eine bereits in der Matrix (B) selbst auftritt. Die durch diese neue Matrix dargestellte Determinante verschwindet wegen der gleichen Zeilen. Entwickelt man also dieselbe in eine Summe von Producten, deren Factoren etwa die $\binom{n}{n-p}$ Determinanten der hinzugefügten Matrix und die correspondirenden sind, so erhält man eine Relation zwischen

Minoren p^{ter} und $n - p^{\text{ter}}$ Ordnung irgend einer Determinante $\varDelta$, von deren Matrix die oben erwähnte Matrix (B) ein Theil ist.

57. *Beispiel* 1. Sei gegeben die fünfgliedrige Determinante:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 & \varepsilon_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \delta_5 & \varepsilon_5 \end{vmatrix}.$$

Wir erhalten eine Relation zwischen Minoren zweiter und dritter Ordnung derselben, wenn wir etwa die Matrix der zweiten, dritten und vierten Zeile durch die Matrix der ersten und zweiten Zeile zu einer neuen Matrix

$$\varDelta' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 & \varepsilon_4 \end{vmatrix}$$

erweitern; die durch sie dargestellte Determinante $\varDelta'$ ist Null wegen der Gleichheit der zweiten und dritten Zeile. Man kann sie nun wieder mit der Determinante

$$D = (b_{11}\, b_{22}\, b_{33}\, b_{44}\, b_{55})$$

vergleichen, letztere nach den Determinanten der beiden ersten Zeilen, also nach den Determinanten der Matrix

$$(C) \qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{vmatrix}$$

entwickeln, und in der Entwicklung hernach die Elemente b_{ik} durch die entsprechenden Elemente in $\varDelta'$ ersetzen. Bezeichnen wir die zehn Determinanten der Matrix (C) mit

$$(b_1\, b_2)_{12},\ (b_1\, b_2)_{13},\ (b_1\, b_2)_{14},\ (b_1\, b_2)_{15},\ (b_1\, b_2)_{23},\ (b_1\, b_2)_{24} \cdots (b_1\, b_2)_{45},$$

dann ist die Entwicklung dargestellt durch

$$D = \sum_{\substack{i=1\\k=2}}^{\substack{k=5\\i=4}} (b_1\, b_2)_{ik} \cdot B_{\substack{1\ 2\\ i\ k}};$$

hier ist

$$B_{\substack{1\ 2\\ i\ k}} = (-1)^{\nu_{ik}} (b_{3\varrho_1}\, b_{4\varrho_2}\, b_{5\varrho_3}),$$

wobei 1) $\nu_{ik} = 1 + 2 + i + k = 3 + i + k$,

2) $\varrho_1, \quad \varrho_2, \quad \varrho_3 \gtrless i$ oder k,

3) $\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3$.

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} D = & (-1)^{3+3}(b_1 b_2)_{12}(b_{33} b_{44} b_{55}) + (-1)^{3+4}(b_1 b_2)_{13}(b_{32} b_{44} b_{55}) \\ & + (-1)^{3+5}(b_1 b_2)_{14}(b_{32} b_{43} b_{55}) + (-1)^{3+6}(b_1 b_2)_{15}(b_{32} b_{43} b_{54}) \\ & + (-1)^{3+5}(b_1 b_2)_{23}(b_{31} b_{44} b_{55}) + (-1)^{3+6}(b_1 b_2)_{24}(b_{31} b_{43} b_{55}) \\ & + (-1)^{3+7}(b_1 b_2)_{25}(b_{31} b_{43} b_{54}) + (-1)^{3+7}(b_1 b_2)_{34}(b_{31} b_{42} b_{55}) \\ & + (-1)^{3+8}(b_1 b_2)_{35}(b_{31} b_{42} b_{54}) + (-1)^{3+9}(b_1 b_2)_{45}(b_{31} b_{42} b_{53}). \end{aligned}$$

Ersetzt man hier die Werthe von b_{ik} durch die entsprechenden Elemente n $\varDelta'$, so kommt:

$$\begin{aligned} 0 = & (\alpha_1 \beta_2)(\gamma_2 \delta_3 \varepsilon_4) - (\alpha_1 \gamma_2)(\beta_2 \delta_3 \varepsilon_4) + (\alpha_1 \delta_2)(\beta_2 \gamma_3 \varepsilon_4) - (\alpha_1 \varepsilon_2)(\beta_2 \gamma_3 \delta_4) \\ & + (\beta_1 \gamma_2)(\alpha_2 \delta_3 \varepsilon_4) - (\beta_1 \delta_2)(\alpha_2 \gamma_3 \varepsilon_4) + (\beta_1 \varepsilon_2)(\alpha_2 \gamma_3 \delta_4) \\ & + (\gamma_1 \delta_2)(\alpha_2 \beta_3 \varepsilon_4) - (\gamma_1 \varepsilon_2)(\alpha_2 \beta_3 \delta_4) \\ & + (\delta_1 \varepsilon_2)(\alpha_2 \beta_3 \gamma_4). \end{aligned}$$

58. *Beispiel* 2. Die viergliedrige Determinante

$$D = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

giebt nach zweigliedrigen Unterdeterminanten entwickelt:

$$\begin{aligned} D = & \Sigma (b_1 b_2)_{ik} B_{\substack{12 \\ ik}} \\ = & (-1)^{3+3}(b_1 b_2)_{12}(b_3 b_4)_{34} + (-1)^{3+4}(b_1 b_2)_{13}(b_3 b_4)_{24} \\ & + (-1)^{3+5}(b_1 b_2)_{14}(b_3 b_4)_{23} + (-1)^{3+5}(b_1 b_2)_{23}(b_3 b_4)_{14} \\ & + (-1)^{3+6}(b_1 b_2)_{24}(b_3 b_4)_{13} + (-1)^{3+7}(b_1 b_2)_{34}(b_3 b_4)_{12}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$b_{1i} = b_{3i} = a_i, \quad b_{2i} = b_{4i} = b_i,$$

dann erhält D zwei Paar gleiche Zeilen und geht über in

$$\begin{aligned} \varDelta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = & (ab)_{12}(ab)_{34} - (ab)_{13}(ab)_{24} + (ab)_{14}(ab)_{23} \\ & + (ab)_{23}(ab)_{14} - (ab)_{24}(ab)_{13} + (ab)_{34}(ab)_{12} \end{aligned}$$

$$= 2\{(ab)_{12}(ab)_{34} - (ab)_{13}(ab)_{24} + (ab)_{14}(ab)_{23}\} = 0.$$

Bezeichnen wir noch kürzer $(-1)^{\nu}(ab)_{ik}$ mit p_{ik}, so liefert die Matrix Δ die Relation:

$$p_{12}\,p_{34}+p_{13}\,p_{42}+p_{14}\,p_{23}=0.$$

Sie entsteht aus ihrem ersten Gliede $p_{12}\,p_{34}$, indem man die 3 Indices 2 3 4 cyclisch vertauscht.

59. *Berechnung des Werthes einer Determinante mit Hilfe der Laplace'schen Entwicklung. Beispiel* 1. Wir berechnen zunächst unter Anwendung dieser Entwicklung von Δ noch einmal den Werth der Determinante (6) in Nr. 15:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 5 & 0 & 3\\ 2 & -2 & 1 & 6\\ 0 & 4 & -5 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & 6\\ -5 & 3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 6\\ 4 & 3\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 4 & -5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2 & 6\\ 0 & 3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & -5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & 4\end{vmatrix}$$

$$=(15-1)(3+30)-(0-1)(-6-24)+(9-2)(10-4)$$

$$+(0-5)(6-0)-(3-10)(-10-0)+(3-0)(8-0)$$

$$=14\cdot 33-30+42-30-70+24=398.$$

60. *Beispiel* 2. Wesentliche Vortheile für die Berechnung des Werthes einer Determinante gewährt die Methode von Laplace dann, wenn die Matrix der Determinante eine grössere Zahl von Elementen enthält, welche Null sind. Hierher gehört in erster Linie der Fall, wobei jene Elemente verschwinden, in welchen sich p Verticalreihen mit q Zeilen schneiden. Wir können dann durch Vertauschung von Zeilen mit Zeilen und Colonnen mit Colonnen die Elemente in der Matrix der gegebenen Determinante so ordnen, dass alle verschwindenden Elemente selbst eine zusammenhängende Matrix von p Colonnen und q Zeilen bilden. Nehmen wir zunächst an $q=n-p$; die gegebene Determinante ist dann:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1p} & a_{1p} & a_{1,p+1} & \ldots & a_{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{p1} & \ldots & a_{pp} & a_{p,p+1} & \ldots & \ldots & a_{pn}\\ 0 & \ldots & 0 & a_{p+1p,+1,} & \ldots & \ldots & a_{p+1,n}\\ 0 & \ldots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & \ldots & 0 & a_{n,p+1} & \ldots & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Entwickeln wir sie nach der Methode von Laplace, indem wir die Determinanten aus der Matrix

$$(A)\quad \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \dots & \dots & a_{pp} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{matrix}\right|$$

bilden, jede mit der correspondirenden Determinante multipliciren und die Summe über alle Producte nehmen, so erkennt man, dass diese Summe sich auf das einzige Product

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix} a_{p+1,p+1} & \dots & a_{p+1,n} \\ a_{p+2,p+1} & \dots & a_{p+2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,p+1} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right| = \Delta^{(p)} \cdot \Delta^{(n-p)}$$

reducirt, weil ja alle Determinanten der Matrix (A) — die in diesem Producte auftretende ausgenommen — verschwinden.

61. *Beispiel* 3. Nehmen wir zweitens an $q = n - p + 1$, dann enthält die Matrix (A) nicht mehr wie vorhin p Colonnen und p Zeilen nicht verschwindender Elemente, sondern sie enthält nun eine Zeile mehr als sie Colonnen hat. Wir können dann aus ihr

$$\binom{p+1}{p} = p + 1$$

nicht verschwindender Determinanten bilden und die zugehörigen correspondirenden ermitteln; die Summe der $(p+1)$ Producte liefert dann die Determinante Δ.

Sei z. B. gegeben:

$$\Delta = \left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 0 & c_4 & d_4 & e_4 \\ 0 & 0 & c_5 & d_5 & e_5 \end{matrix}\right|,$$

dann liefert die Entwicklung nach den Determinanten der Matrix der beiden ersten Colonnen:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & d_3 & e_3 \\ c_4 & d_4 & e_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} + (-1)^{\nu_1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & d_2 & e_2 \\ c_4 & d_4 & e_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{\nu_2} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_4 & d_4 & e_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix},$$

wobei

$$\nu_1 = 1 + 2 + 1 + 3 = 7$$

$$\nu_2 = 1 + 2 + 2 + 3 = 8,$$

also:

$$\Delta = (ab)_{12}\,(cde)_{345} - (ab)_{13}\,(cde)_{245} + (ab)_{23}\,(cde)_{145}.$$

62. *Entwicklung einer Determinante nach Producten von Elementen zweier sich schneidender Reihen.* Manche Aufgaben lassen es wünschenswerth erscheinen, eine Determinante nach den Elementen einer Zeile und Colonne gleichzeitig zu entwickeln. Wir wollen dabei der Einfachheit halber annehmen, diese Elemente würden die erste Zeile und Colonne bilden, die sich also in dem Elemente a_{11} schneiden. Um zur Entwicklungsformel zu gelangen, gehen wir wieder aus von der Gleichung in Nr. 28:

$$\Delta = a_{11}\,A_{11} + a_{12}\,A_{12} + \cdots a_{1n}\,A_{1n}. \tag{1}$$

Von den darin auftretenden Minoren A_{1i} entwickeln wir den ersten A_{11} nicht weiter, die übrigen aber nach den Unterdeterminanten der Elemente in der ersten *Colonne* (während wir sie in Nr. 53 (2) nach den Unterdeterminanten der Elemente in der ersten *Zeile* geordnet hatten).

Wir erhalten also:

$$(2)\quad \begin{cases} A_{12} = a_{21}\,A_{\substack{12\\21}} + a_{31}\,A_{\substack{13\\21}} + a_{41}\,A_{\substack{14\\21}} + \cdots a_{n1}\,A_{\substack{1n\\21}} \\ A_{13} = a_{21}\,A_{\substack{12\\31}} + a_{31}\,A_{\substack{13\\31}} + a_{41}\,A_{\substack{14\\31}} + \cdots a_{n1}\,A_{\substack{1n\\31}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1k} = a_{21}\,A_{\substack{12\\k1}} + a_{31}\,A_{\substack{13\\k1}} + \cdots + a_{k1}\,A_{\substack{1k\\k1}} + \cdots + a_{n1}\,A_{\substack{1n\\k1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n} = a_{21}\,A_{\substack{12\\n1}} + a_{31}\,A_{\substack{13\\n1}} + a_{41}\,A_{\substack{14\\n1}} \cdots + a_{n1}\,A_{\substack{1n\\n1}} \end{cases}$$

Tragen wir diese Werthe in $\varDelta$ ein, so kommt:

$$
(3)\qquad \begin{aligned}
\varDelta = a_{11} A_{11} &+ a_{21} a_{12} A_{12 \atop 21} + a_{31} a_{12} A_{13 \atop 21} + \cdots + a_{n1} a_{12} A_{1n \atop 21} \\
&+ a_{21} a_{13} A_{12 \atop 31} + a_{31} a_{13} A_{13 \atop 31} + \cdots \\
&\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&+ a_{21} a_{1,k-1} A_{12 \atop k1} + \cdots + a_{n1} a_{1n} A_{1n \atop n1} .
\end{aligned}
$$

Man erkennt, dass in dieser Summe durchgehends die Factoren der Minoren $A_{1i \atop k1}$ Producte von Elementen sind, welche der ersten Zeile und ersten Colonne angehören, und zwar tritt jedes solche Product $a_{i1} a_{1k}$ nur einmal auf, indem jedes der $(n - 1)$ Elemente der ersten Zeile mit jedem der $(n - 1)$ Elemente der ersten Colonne — a_{11} ist ja ausgeschlossen — multiplicirt wird. Wir können also, die $(n-1)^2$ Glieder der obigen Entwicklung zusammenfassend, die Gleichung (3) schreiben:

$$
(4)\qquad \varDelta = a_{11} A_{11} + \sum a_{i1} a_{1k} A_{1i \atop k1} ,
$$

oder, weil

$$
A_{1i \atop k1} = - A_{1i \atop 1k} \quad \text{(vergleiche Nr. 49),}
$$

so wird endlich die gesuchte Entwicklung dargestellt durch

$$
(5)\qquad \varDelta = a_{11} A_{11} - \sum a_{i1} a_{1k} A_{1i \atop 1k} ,
$$

$$
k \text{ und } i > 1 ,
$$

wobei erinnert sei, dass $A_{1k \atop 1i}$ der Minor erster Ordnung des Elements a_{ik} in der Determinante A_{11} ist. Wir erhalten sonach die Regel:

> „Um eine Determinante nach den Producten der Elemente zweier sich schneidender Reihen zu entwickeln, bilde man die Determinante A_{11}, so wie ihre $(n - 1)^2$ ersten Minoren $A_{1k \atop 1i}$. Jeden derselben multiplicire man mit dem entsprechenden Producte $a_{i1} a_{1k}$, addire alle Producte und subtrahire die Summe von $a_{11} A_{11}$“.

63. *Entwicklung einer Determinante nach den Producten von Elementen zweier Paare sich schneidender Reihen.* Bisweilen tritt auch die Frage auf, wie lässt sich eine Determinante in der Weise entwickeln, dass sie nach Producten geordnet ist, deren beide erste Factoren zweigliedrige Determinanten sind, entnommen aus der Matrix der zwei ersten Zeilen und der Matrix der zwei ersten Colonnen. Mit Hilfe der

Zerlegung einer Determinante nach der Methode von Laplace können wir auch diese Frage erledigen.

Wir können zunächst nach Laplace die Determinante entwickeln nach den zweigliedrigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix}.$$

Sondern wir hier von vornherein in dieser Summe die Producte

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot A_{\substack{12\\12}}, \quad \sum \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{2i} \end{vmatrix} \cdot A_{\substack{12\\1i}}, \quad \sum \begin{vmatrix} a_{12} & a_{1i} \\ a_{22} & a_{2i} \end{vmatrix} \cdot A_{\substack{12\\2i}}$$

ab, dann sind die übrigen nur Producte von Determinanten der Matrix

$$(B) \qquad \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

in die entsprechenden correspondirenden Determinanten

$$A_{\substack{12\\ik}} = (-1)^{\nu} \left(a_{3\varrho_1} a_{4\varrho_2} a_{5\varrho_3} \cdots a_{n\varrho_{n-2}}\right),$$

wobei

1) $\nu = 1 + 2 + i + k,$
2) $k > i > 2,$
3) $\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 \cdots < \varrho_{n-2},$

und alle ϱ_n von k und i verschieden sind.

Wir haben somit als erstes Resultat:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot A_{\substack{12\\12}} + \sum_{i=3}^{i=n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{2i} \end{vmatrix} \cdot A_{\substack{12\\1i}} \\ + \sum_{i=3}^{i=n} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{1i} \\ a_{22} & a_{2i} \end{vmatrix} \cdot A_{\substack{12\\2i}} + \sum_{\substack{i=3\\k=4}}^{\substack{k=n\\i=n-1}} \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1k} \\ a_{2i} & a_{2k} \end{vmatrix} \cdot A_{\substack{12\\ik}}, \quad k > i > 2. \end{aligned}$$

Jeder der in der letzten Form dieser Entwicklung auftretenden Minoren zweiter Ordnung lässt sich nun aber wieder in eine Summe von Producten entwickeln, deren einer Factor eine Determinante der Matrix

$$(C) \qquad \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{51} & a_{52} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix}$$

ist, während der andere von der entsprechenden correspondirenden

Determinante, einem Minor vierter Ordnung von Δ, gebildet wird. Diese Minoren vierter Ordnung sind also der Determinante entnommen

$$A_{\substack{12\\12}} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ a_{53} & a_{54} & \dots & a_{5n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

sie sind die sämmtlichen Unterdeterminanten zweiter Ordnung von $A_{\substack{12\\12}}$. Trägt man nun diese Entwicklungen der Minoren $A_{\substack{12\\ik}}$ in den vierten Term der Gleichung (1) ein, so erhalten wir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot A_{\substack{12\\12}} + \sum_{i=3}^{i=n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{2i} \end{vmatrix} \cdot A_{\substack{12\\1i}} + \sum_{i=3}^{i=n} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{1i} \\ a_{22} & a_{2i} \end{vmatrix} \cdot A_{\substack{12\\2i}}$$

$$+ \sum \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1k} \\ a_{2i} & a_{2k} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{\varrho 1} & a_{\varrho 2} \\ a_{\sigma 1} & a_{\sigma 2} \end{vmatrix} \cdot A_{\substack{12\varrho\sigma\\ik12}},$$

wo

$$\sigma > \varrho,$$
$$k > i,$$

und $i\varrho$ einestheils, $k\sigma$ anderntheils alle Werthe von 3, resp. 4 bis $n-1$, resp. n annimmt.

Der letzte Term enthält die gesuchte Entwicklung. Er entsteht, indem man einmal alle Determinanten der Matrix (B), und dann alle Determinanten der Matrix (C) bildet, jedesmal also

$$\binom{n-2}{2} = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

an der Zahl. Jede Determinante des einen Systems multiplicire man mit jeder des andern Systems und füge zum Product noch als dritten Factor jene Unterdeterminante vierter Ordnung von Δ, deren Matrix entsteht, wenn man im Minor $A_{\substack{12\\12}}$ die beiden Zeilen und Colonnen streicht, denen die beiden vorhergehenden Factoren entnommen sind. Die Summe aller Producte liefert das gewünschte Resultat.

64. *Specielle Fälle.* Man wird sich natürlich im Allgemeinen nicht der in 62 und 63 klargelegten Methoden bedienen, um eine Determinante zu berechnen, sondern die bereits früher gegebenen, bequemeren vorziehen. Am interessantesten sind diese Entwicklungen, sobald jene Elemente verschwinden, in welchen sich die betreffenden Zeilen und Colonnen, nach denen zu entwickeln ist, schneiden; also im

ersten Falle, wenn $a_{11} = 0$, im zweiten, wenn $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$. Diese Fälle treten in der That bei manchen Problemen der analytischen Geometrie auf. Ist $a_{11} = 0$, so reducirt sich die Entwicklung in Nr. 62 (5) auf

$$\varDelta = -\sum a_{1i}\, a_{k1} \cdot A_{\substack{1k,\\ 1i}}$$

und im zweiten Falle, sind $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$, so wird

$$\varDelta = \sum \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1k} \\ a_{2i} & a_{2k} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{\varrho 1} & a_{\varrho 2} \\ a_{\sigma 1} & a_{\sigma 2} \end{vmatrix} \cdot A_{\substack{12\varrho\sigma,\\ ik12}}$$

da ja die zweigliederigen Determinanten in den vorausgehenden Formen stets eine Colonne von verschwindenden Elementen besitzen.

65. *Beispiel* 1. Die bereits in Nr. 52 als Beispiel verwendete Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix}$$

wollen wir direct nach den Variabeln $x_1\ x_2\ x_3$, also nach den Elementen der letzten Zeile und Colonne, gleichzeitig entwickeln. Die Entwicklungsformel ist gegeben durch:

$$\varDelta = a_{44}\, A_{44} - \sum a_{i4}\, a_{4k}\, A_{\substack{4i,\\ 4k}}$$

oder weil hier $a_{44} = 0$

$$\varDelta = -\sum a_{i4}\, a_{4k}\, A_{\substack{4i,\\ 4k}} \quad i \text{ und } k < 4.$$

Wir erhalten sonach, wenn wir die Summe entsprechend x_i^2 und $x_i x_k$ in zwei Theile trennen,

$$\varDelta = -\sum_{i=3}^{i=1} a_{i4}\, a_{4i}\, A_{\substack{4i\\ 4i}} - \sum_{i \gtrless k}^{\substack{i=1\,2\,3\\ k=1\,2\,3}} a_{i4}\, a_{4k}\, A_{\substack{4i\\ 4k}}.$$

Hierin ist:

$$A_{\substack{41\\ 41}} = (-1)^{\nu_1} (a_{22}\, a_{33}),\ \nu_1 = (41) + (41) + 2\,(4 + 1) = 12,$$

$$A_{\substack{42\\ 42}} = (-1)^{\nu_2} (a_{11}\, a_{33}),\ \nu_2 = (42) + (42) + 2\,(4 + 2) = 14,$$

$$A_{\substack{43\\ 43}} = (-1)^{\nu_3} (a_{11}\, a_{22}),\ \nu_3 = (43) + (43) + 2\,(4 + 3) = 16,$$

$$A_{\substack{41\\ 42}} = (-1)^{\nu_4} (a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}),\ \nu_4 = 13,\ A_{\substack{42\\ 43}} = (-1)^{\nu_7} (a_{11} a_{32} - a_{31} a_{12}),\ \nu_7 = 15,$$

$$A_{\substack{41\\ 43}} = (1-)^{\nu_5} (a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22}),\ \nu_5 = 14,\ A_{\substack{43\\ 41}} = (-1)^{\nu_8} (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}),\ \nu_8 = 14,$$

$$A_{\substack{42\\ 41}} = (-1)^{\nu_6} (a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32}),\ \nu_6 = 13,\ A_{\substack{43\\ 42}} = (-1)^{\nu_9} (a_{11} a_{23} - a_{13} a_{21}),\ \nu_9 = 15,$$

also

$$\Delta = -\{x_1^2(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + x_2^2(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) + x_3^2(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\}$$
$$+ \{x_1x_2(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23} + a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) - x_1x_3(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$
$$+ a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) + x_2x_3(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} + a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})\}.$$

66. *Beispiel* 2. Für die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & x_1 & y_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & x_2 & y_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & x_3 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

liefert die Entwicklung

$$\Delta = \sum \begin{vmatrix} a_{4i} & a_{4k} \\ a_{5i} & a_{5k} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{\varrho 4} & a_{\varrho 5} \\ a_{\sigma 4} & a_{\sigma 5} \end{vmatrix} \cdot A_{\substack{45\varrho\sigma \\ ik45}}, \quad \begin{cases} \varrho < \sigma < 4 \\ i < k < 4 \end{cases}$$

folgenden Werth:

$$\Delta = (-1)^{\nu_1} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 c_3 + (-1)^{\nu_2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 b_2 + (-1)^{\nu_3} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 a_1$$
$$+ \begin{vmatrix} x_1 & y_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \left\{(-1)^{\nu_4} \begin{vmatrix} x_1 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} b_3 + (-1)^{\nu_5} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} a_3\right\}$$
$$+ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \left\{(-1)^{\nu_6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c_2 + (-1)^{\nu_7} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} a_2\right\}$$
$$+ \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \left\{(-1)^{\nu_8} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c_1 + (-1)^{\nu_9} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} b_1\right\};$$

$$\nu_1 = (4512) + (1245) + 24 = 4 + 0 + 24 = 28, \quad \nu_2 = 30, \quad \nu_3 = 32$$
$$\nu_4 = (4513) + (1245) + 25 = 4 + 0 + 25 = 29, \quad \nu_5 = 30$$
$$\nu_6 = (4512) + (1345) + 25 = 4 + 0 + 25 = 29, \quad \nu_7 = 31$$
$$\nu_8 = (4512) + (2345) + 26 = 4 + 0 + 26 = 30, \quad \nu_9 = 31,$$
$$\Delta = c_3(x_1y_2)^2 + b_2(x_1y_3)^2 + a_1(x_2y_3)^2 - (b_3 + c_2)(x_1y_2)(x_1y_3)$$
$$+ (a_3 + c_1)(x_1y_2)(x_2y_3) - (a_2 + b_1)(x_2y_3)(x_1y_3).$$

67. *Begriff der Ränderung einer Determinante.* Die in Beispiel 1 und 2 aufgestellten Determinanten bezeichnet man als *geränderte* Determinanten. Die Ränderung besteht darin, dass man eine Matrix von n^2 Elementen durch eine Zeile und Colonne von n Elementen erweitert und in den Schnittpunkt der beiden Reihen Null setzt. Dabei ist es nicht nothwendig, dass, wie in den beiden Beispielen, die zugefügte Zeile und Colonne dieselben Elemente enthalten. Die Ränderung kann wie in Beispiel (2) mehr als einmal vollzogen werden; man spricht dann von einem zwei- und dreifachen Saum der Determinante, deren

sämmtliche Elemente in den Schnittpunkten der Saumreihen Null sind. Die Determinante in Beispiel 1 ist also entstanden durch Ränderung der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

mit $x_1\ x_2\ x_3$. Ebenso ist die Determinante in Beispiel 2 durch Ränderung der nämlichen Determinante D mit $x_1\ x_2\ x_3$, $y_1\ y_2\ y_3$ entstanden.

§ 6. Multiplication von Determinanten.

68. *Darstellung des Gedankenganges.* Bereits in Nr. 60 wurde ein Fall besprochen, in welchem eine n-gliederige Determinante Δ in ein einziges Product zweier Determinanten von p^2, bezw. $(n-p)^2$ Elementen zerfiel. Die Bedingung war, dass sämmtliche Elemente, in denen sich p Colonnen und $(n-p)$ Zeilen schneiden, verschwinden mussten. Man sieht leicht, dass umgekehrt das Product zweier Determinanten vom r^{ten} und s^{ten} Grade immer durch eine einzige Determinante $(r+s)^{\text{ten}}$ Grades sich darstellen lässt, indem man etwa in der Matrix der ersten Determinante noch s Zeilen mit verschwindenden Elementen an die r^{te} Zeile anfügt, dagegen die Matrix der zweiten Determinante durch r an die erste angesetzte Zeile mit Elementen, welche beliebig gewählt werden können, erweitert, und die beiden so erhaltenen Matrices von $r+s$ Zeilen und r bezw. s Colonnen zu einer einzigen Matrix mit $r+s$ Colonnen und $r+s$ Zeilen verbindet. Dabei kann $r \gtreqless s$ sein; ist speciell $r=1$, also $\Delta = a_{11}$, so haben wir den bereits in Nr. 30 Beispiel 5 erwähnten Fall vor uns: wir erweitern die Matrix der Determinante mit den s^2 Elementen um eine Colonne von s Elementen Null und um eine Zeile von s beliebigen Elementen. An die Stelle, wo sich Colonne und Zeile schneiden, tritt das eine Element a_{11} der ersten Determinante Δ. Ist $r=s=n$, dann sind die Erweiterungen einer wie der andern Matrix selbst Determinantenmatrices, und zwar die eine mit n^2 Elementen Null, die andere mit n^2 beliebigen Elementen.

Diese Art Determinanten zu multipliciren hat aber das eine Missliche an sich, dass das Product eine Determinante höheren Grades ist, als die beiden Determinanten der Factoren, und es entsteht die Frage, ob es nicht gelingt, sie auf einen niedrigeren Grad zu reduciren. In der That zeigt sich, dass es ganz allgemein möglich ist, die Determinante des Productes bis auf den Grad jener Determinante zu redu-

ciren, welche die höhere unter den beiden Factoren ist. Zum Beweise setzen wir zunächst voraus $r = s = n$, d. h. dass beide Determinanten von gleichem Grade sind, was immer erlaubt ist, da ja nach Beispiel 5 Nr. 30 die Matrix jeder Determinante zur Matrix einer Determinante beliebig hohen Grades sich erweitern lässt, ohne dass der Werth der Determinante sich ändert.

69. *Aufstellung der Matrix der Productdeterminante.* Sei also gegeben:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots a_{2n} \\ a_{31} & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots\dots b_{2n} \\ b_{31} & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdot \quad \cdot \quad b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Wir transponiren zunächst die Determinante Δ und erweitern die Matrix von Δ um n Horizontalreihen von n^2 Elementen Null, die wir an die letzte Zeile ansetzen. Sodann wählen wir die Determinante der n^2 willkürlichen Elemente, wodurch die Matrix von D erweitert werden soll, so dass die Diagonalglieder durchgehends -1, alle übrigen null sein sollen. Die beiden so erhaltenen Matrices von $2n$ Zeilen und je n Colonnen vereinigen wir zu einer einzigen

$$J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \dots a_{n1} & -1 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots\dots a_{n2} & 0 & -1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ a_{13} & a_{23} & \dots\dots & \dots\dots & 0 & 0 & -1 & \dots\dots & 0 \\ \vdots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \vdots & & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots\dots & \dots\dots a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \dots\dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots\dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots\dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \dots\dots & \dots\dots 0 & b_{31} & b_{32} & \dots\dots & \dots\dots & b_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots 0 & b_{n1} & b_{n2} & \dots\dots & \dots\dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die Determinante J ist also nach dem Satze von Laplace gleich dem Producte $\Delta \cdot D$.

70. *Reduction der Productdeterminante J.* Um sie nun auf eine n-gliederige zu reduciren, addiren wir:

1) die mit $b_{11}, b_{12}, b_{13} \dots b_{1n}$ bezw. multiplicirte erste, zweite, dritte ... n^{te} Zeile von J zur $(n+1)^{\text{ten}}$ Zeile,
2) die mit $b_{21}, b_{22}, b_{23} \dots b_{2n}$ bezw. multiplicirte erste, zweite, dritte ... n^{te} Zeile zur $(n+2)^{\text{ten}}$ Zeile,

3) die mit $b_{31}, b_{32}, b_{33} \ldots b_{3n}$ bezw. multiplicirte erste, zweite, dritte ... n^{te} Zeile zur $(n+3)^{\text{ten}}$ Zeile u. s. w.,

endlich: die mit $b_{n,1}, b_{n,2} \ldots b_{nn}$ bezw. multiplicirte n^{te} Zeile zur $2n^{\text{ten}}$ Zeile.

Dadurch erhalten wir die Matrix: $J =$

$$\begin{vmatrix}
a_{11}, & a_{21}, & \cdots, & a_{n,1}, & -1 & 0 \cdots & 0 \\
a_{12}, & a_{22}, & \cdots, & a_{n,2}, & 0 & -1 \cdots & 0 \\
a_{13}, & a_{23}, & \cdots, & a_{n,3}, & 0 & 0 \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a_{1n}, & a_{2n}, & \cdots, & a_{n,n}, & 0 & 0 \cdots & -1 \\
a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}\cdots a_{1n}b_{1n}, & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}\cdots a_{2n}b_{1n}, & \cdots, & a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{12}\cdots a_{nn}b_{1n}, & 0 & 0 \cdots & 0 \\
a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}\cdots a_{1n}b_{2n}, & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}\cdots a_{2n}b_{2n}, & \cdots, & a_{n1}b_{21}+a_{n2}b_{22}\cdots a_{nn}b_{2n}, & 0 & 0 \cdots & 0 \\
a_{11}b_{31}+a_{12}b_{31}\cdots a_{1n}b_{3n}, & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}\cdots a_{2n}b_{3n}, & \cdots, & a_{n1}b_{31}+a_{n2}b_{32}\cdots a_{nn}b_{3n}, & 0 & 0 \cdots & 0 \\
a_{11}b_{41}+a_{12}b_{42}\cdots a_{1n}b_{4n}, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{11}b_{n1}+a_{12}b_{n2}\cdots a_{1n}b_{nn}, & a_{21}b_{n1}+a_{22}b_{n2}\cdots a_{2n}b_{nn}, & \cdots, & a_{n1}b_{n1}+a_{n2}b_{n2}\cdots a_{nn}b_{nn}, & 0 & 0 \cdots & 0
\end{vmatrix}.$$

Entwickeln wir aber mit Hilfe des Laplace'schen Satzes diese Determinante nach den Determinanten der n letzten Colonnen, so sieht man, dass die Summe der Producte sich wieder auf das einzige reducirt:

$$J = (-1)^{\nu} \begin{vmatrix}
-1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\
0 & -1 & 0 \cdots & 0 \\
0 & 0 & -1 \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 \cdots & -1
\end{vmatrix} \cdot$$

$$\begin{vmatrix}
a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+\cdots+a_{1n}b_{1n}, & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}\cdots+a_{2n}b_{1n}, & \cdots a_{n1}b_{n1}+\cdots a_{nn}b_{1n} \\
a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22} \quad \cdots \quad a_{1n}b_{2n}, & \ldots & \ldots \\
a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32} \ldots, & a_{21}b_{31} \ldots, & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
a_{11}b_{n1}+a_{12}b_{n2} \quad \cdots \quad a_{1n}b_{nn}, & a_{21}b_{n1}+ \ldots a_{2n}b_{nn}, & \cdots a_{n1}b_{n1}\cdots+a_{nn}b_{nn}
\end{vmatrix}.$$

Die erste Determinante reducirt sich, wie wir in Beispiel 4 Nr. 30 gezeigt haben, auf das Diagonalglied $(-1)^n$; der Exponent ν aber hat den Werth

$$\begin{aligned}
\nu &= (1+2+3\ldots+n)+[(n+1)+(n+2)+\ldots+2n] \\
&= n(n+1)+n^2 = 2n^2+n.
\end{aligned}$$

Es wird somit

$$(-1)^{\nu}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2n^2+n}.(-1)^n = (-1)^{2(n^2+n)} = +1.$$

Daher ist das Product der beiden Determinanten: $J =$

$$\varDelta\cdot D = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+\dots a_{1n}b_{1n}, & a_{21}b_{11}\dots+a_{2n}b_{1n}, \dots, & a_{n1}b_{11}+\dots+a_{nn}b_{1n} \\ a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+\dots a_{1n}b_{2n}, & a_{21}b_{21}\dots+a_{2n}b_{2n}, \dots, & a_{n1}b_{21}+\dots \quad a_{nn}b_{2n} \\ a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+\dots a_{1n}b_{3n}, & . \quad . \quad . \quad . & . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . & . \quad . \quad . \quad . & . \quad . \quad . \\ a_{11}b_{n1}+a_{12}b_{n2}+\dots a_{1n}b_{nn}, & a_{21}b_{n1}\dots+a_{2n}b_{nn}, \dots, & a_{n1}b_{n1}+\dots \quad a_{nn}b_{nn} \end{vmatrix}.$$

71. *Beispiel* 1. Es seien gegeben die beiden Determinanten

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

alsdann ist das Product der beiden Determinanten

$$J = \varDelta . D = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1, & a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1, & a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1 \\ a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2, & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2, & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2 \\ a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3, & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3, & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Beispiel 2. Es seien gegeben die beiden Determinanten

$$\varDelta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix} \text{ und } D = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}.$$

Um das Product zu bilden, erweitern wir zuerst die Matrix von D, so dass

$$D = D' = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

sodann erhalten wir

$$J = D.\varDelta = \begin{vmatrix} x_1 r_1 + x_2 r_2, & y_1 r_1 + y_2 r_2, & z_1 r_1 + z_2 r_2, & u_1 r_1 + u_2 r_2 \\ x_1 s_1 + x_2 s_2, & y_1 s_1 + y_2 s_2, & z_1 s_1 + z_2 s_2, & u_1 s_1 + u_2 s_2 \\ x_3 \quad , & y_3 \quad , & z_3 \quad , & u_3 \\ x_4 \quad , & y_4 \quad , & z_4 \quad , & u_4 \end{vmatrix}.$$

72. *Zweite Art, die Productdeterminante zu bilden.* Wir haben in diesen beiden Beispielen nach dem Muster der reducirten Determinante J die Determinante des Productes auf eine erste Art in der Weise hergestellt, dass wir die Elemente der ersten *Zeile* von Δ der Reihe nach multiplicirten mit den entsprechenden Elementen aller n *Zeilen* von D; das lieferte die n Elemente der ersten *Colonne* des Productes J; die n Elemente der zweiten Colonne in J entstanden durch Multiplication der zweiten Zeile in Δ, mit den entsprechenden aller n Zeilen von D, u.s.f., endlich die Elemente der k^{ten} Colonne, durch Multiplication der Elemente in der k^{ten} Zeile von Δ, mit den entsprechenden aller n Zeilen von D. Wir hätten aber auch die Determinante J auf eine *zweite* Art erhalten, wenn wir die Elemente der ersten Colonne von Δ mit den entsprechenden aller Colonnen von D multipliciren; dadurch entstehen die Elemente der ersten *Zeile* von J; ihre zweite Zeile entsteht dann durch Multiplication der Elemente der zweiten Colonne von Δ mit den entsprechenden aller Colonnen von D u. s. w.

Die Berechtigung dazu erhalten wir unmittelbar durch das Gesetz, dass die Transposition die beiden Determinanten D und Δ nicht ändert; durch Transposition ordnen sich aber die Elemente einer bestimmten Colonne in eine Zeile, so dass die zweite Methode nur die auf die transponirten Determinanten angewendete erste ist.

73. *Anmerkung* 1. *Symmetrische Determinanten.* Bilden wir ähnlich das Quadrat einer Determinante vierten Grades, etwa indem wir Colonnen mit Colonnen multipliciren, so erhalten wir:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} \sum a_{i1}^2\,, & \sum a_{i1}a_{i2}\,, & \sum a_{i1}a_{i3}\,, & \sum a_{i1}a_{i4} \\ \sum a_{i2}a_{i1}\,, & \sum a_{i2}^2\,, & \sum a_{i2}a_{i3}\,, & \sum a_{i2}a_{i4} \\ \sum a_{i3}a_{i1}\,, & \sum a_{i3}a_{i2}\,, & \sum a_{i3}^2\,, & \sum a_{i3}a_{i4} \\ \sum a_{i4}a_{i1}\,, & \sum a_{i4}a_{i2}\,, & \sum a_{i4}a_{i3}\,, & \sum a_{i4}^2 \end{vmatrix}.$$

Die so erhaltene Matrix hat die Eigenschaft, dass je zwei Elemente, welche zur Hauptdiagonale symmetrisch liegen, einander gleich sind.

Jede Determinante, in deren Matrix also

$$b_{ik} = b_{ki},$$

heisst symmetrische Determinante, und das Beispiel lehrt: „*Das Quadrat einer Determinante ist eine symmetrische Determinante.*" Ist $b_{ik} = -b_{ki}$, also $b_{ii} = 0$, so nennt man die Determinante schiefsymmetrisch oder hemisymmetrisch. Es existiren über diese und ähnliche specielle Fälle von Determinanten zahlreiche Sätze, die sich hauptsächlich auf die Auswerthung derselben beziehen; vgl. Salmon: Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen, fünfte Vorlesung; Mansion, Elemente der Determinantentheorie, Seite 10, 23, 26, 31, 34, 38; Günther, Determinanten Capitel III. Hier sei nur einer Eigenschaft symmetrischer Determinanten Erwähnung gethan, die in den erwähnten Werken nicht besprochen ist.

74. *Anmerkung* 2. *Lineare Relationen zwischen den Minoren von symmetrischen Determinanten.* Wir haben in Nr. 56 gesehen, wie es immer gelingt, beliebige Relationen zwischen Minoren einer Determinante herzustellen, und dies auch an drei Beispielen dargethan. So ist die in Beispiel 2 erhaltene Relation:

$$(ab)_{12}\,(ab)_{34} - (ab)_{13}\,(ab)_{24} + (ab)_{14}\,(ab)_{23} = 0$$

eine Beziehung der vier Minoren zweiter Ordnung, gebildet aus den zwei Zeilen einer Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ u & v & w & m \\ x & y & z & n \end{vmatrix}.$$

Während aber die Relationen, zu welchen die Minoren beliebiger Determinanten Veranlassung geben, immer von höherem als vom ersten Grade sind in den Unterdeterminanten, giebt es, wie sich leicht finden lässt (vgl. Kronecker, Monatsber. der Berl. Akad. 1882), bei *symmetrischen* Determinanten auch *lineare* Relationen zwischen Minoren. Wir wollen dies nur an einem einfachen Falle zeigen. Sei die symmetrische Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & y & o & l \\ b & o & z & m \\ c & l & m & u \end{vmatrix};$$

greifen wir irgend einen Minor zweiter Ordnung aus derselben heraus, der kein Diagonalglied enthält, etwa

$$\begin{vmatrix} b & c \\ o & l \end{vmatrix},$$

so existiren in doppelter Weise noch zwei andere Minoren, deren jeder ein und nur ein Elementenpaar desselben enthält, nämlich

$$\begin{vmatrix} a & b \\ l & m \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} o & a \\ m & c \end{vmatrix}.$$

Die Summe aller drei Determinanten giebt eine der erwähnten Relationen, nämlich:

$$\begin{vmatrix} b & c \\ o & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ l & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} o & a \\ m & c \end{vmatrix} = 0.$$

75. *Multiplication von Matrices, welche keine Determinanten darstellen; Gedankengang.* Wenn man in der Weise, wie es der Productsatz (Nr. 71 erste Art) für zwei Matrices von je n^2 Elementen vorschreibt, aus den beiden Matrices

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \; . \;\; . \;\; . & a_{2n} \\ a_{31} \;\; . \;\; . \;\; . & . \;\; a_{3n} \\ . \;\; . \;\; . \;\; . & . \;\; . \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} \; . \;\; . \;\; . & a_{\nu n} \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \; . \;\; . \;\; . & b_{2n} \\ b_{31} \;\; . \;\; . \;\; . & . \;\; . \\ . \;\; . \;\; . \;\; . & . \;\; . \\ b_{\nu 1} \;\; . \;\; . \;\; . & . \;\; b_{\nu n} \end{vmatrix}, \quad \nu \gtrless n,$$

eine neue bildet, so unterscheiden wir die beiden Fälle, dass die dadurch repräsentirte Determinante von ν^2 Elementen entweder identisch Null oder von Null verschieden ist. Wir werden zunächst den Fall besprechen, in welchem dieselbe *nicht* verschwindet. Zu dem Zwecke bilden wir zuerst nach der in Nr. 68 angegebenen Weise aus beiden Matrices, indem wir die erste vorher transponiren, eine Determinante R von $(n + \nu)^2$ Elementen und reduciren sie nach der Methode in Nr. 70. In zweiter Linie entwickeln wir die noch nicht reducirte Determinante R nach der Methode von Laplace, wodurch wir ihren Werth ausgedrückt erhalten durch eine Summe von Producten je zweier entsprechender Determinanten der beiden gegebenen Matrices. Da im Allgemeinen keine dieser Determinante ν^{ten} Grades verschwindet, so ist der Werth von R in der That von Null verschieden. Hierbei ist jedoch immer vorausgesetzt, dass $\nu < n$, und dass die Elemente der reducirten Productdeterminante R, wie wir sehen werden, gebildet sind durch Multiplication von *Zeilen mit Zeilen* der beiden Matrices.

76. *Aufstellung der Productdeterminante R.* Wir setzen also voraus $\nu < n$; erweitern sodann die erste Matrix, die wir vorher in die Matrix transponiren:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{\nu 1} \\ a_{12} & a_{22} \dots . \\ a_{13} & \dots\dots \\ a_{14} & \dots\dots \\ \dots & \dots\dots \\ \dots & \dots\dots \\ a_{1n} & a_{2n} \dots a_{\nu n} \end{vmatrix},$$

durch ν Zeilen mit je ν verschwindenden Elementen. Die zweite Matrix der Elemente b_{ik} erweitern wir durch n Zeilen von je n willkürlichen Elementen, die wir aber wieder so wählen, dass die Diagonalelemente den Werth -1 haben, alle übrigen null sind. Aus den beiden so erhaltenen Matrices bilden wir nun die Determinante

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \dots a_{\nu 1} & -1 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \dots\dots a_{\nu 2} & 0 & -1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ a_{13} & \dots & \dots\dots a_{\nu 3} & 0 & 0 & -1 & \dots\dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} \dots a_{\nu n} & 0 & 0 & 0 & \dots\dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots\dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \dots\dots 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots\dots & b_{2n} \\ 0 & \dots & \dots\dots 0 & b_{31} & b_{32} & \dots & \dots\dots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & b_{\nu 1} & b_{\nu 2} & \dots & \dots\dots & b_{\nu n} \end{vmatrix}.$$

77. *Reduction der Determinante R.* Wir können nun genau wie früher die Matrix der Determinante J so jetzt die der Determinante R auf weniger Zeilen und Colonnen reduciren. Man addirt zu dem Zwecke wieder die mit $b_{11}, b_{12} \dots b_{1n}$ bezw. multiplicirt gedachte erste, zweite $\dots n^{\text{te}}$ Zeile insgesammt zur $n + 1^{\text{ten}}$; ebenso dieselben n ersten Zeilen der Reihe nach mit $b_{21}, b_{22} \dots b_{2n}$ multiplicirt gedacht, zur $n + 2^{\text{ten}}$ und so weiter, endlich die mit $b_{\nu 1}, b_{\nu 2} \dots b_{\nu n}$ multiplicirte erste bis n^{te} Zeile zur $n + \nu^{\text{ten}}$ Zeile.

Das Resultat dieser Operationen ist dann die Determinante:

$$R=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21}, & \cdots, & a_{\nu 1}, & -1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ a_{12}, & a_{22}, & \cdots, & a_{\nu 2}, & 0 & -1 & 0 \cdots & 0 \\ a_{13}, & a_{23}, & \cdots, & a_{\nu 3}, & 0 & 0 & -1 \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n}, & a_{2,n}, & \cdots, & a_{\nu n}, & 0 & 0 & 0 \cdots & (-1) \\ a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+\cdots a_{1n}b_{1n}, & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}\cdots+a_{2n}b_{1n}, & \cdots, & a_{\nu 1}b_{11}+\cdots a_{\nu n}b_{1n}, & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+\cdots a_{1n}b_{2n}, & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}\cdots a_{2n}b_{2n}, & \cdots, & a_{\nu 1}b_{21}+\cdots a_{\nu n}b_{2n}, & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}\cdots a_{1n}b_{3n}, & a_{21}b_{31}+\cdots+a_{2n}b_{3n}, & \cdots, & a_{\nu 1}b_{31}+\cdots a_{\nu n}b_{3n}, & 0 & 0 & \cdots & \\ a_{11}b_{41}\cdots+a_{1n}b_{4n}, & \cdots & & \cdots & 0 & \cdots & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ a_{11}b_{\nu 1}+a_{12}b_{\nu 2}\cdots a_{1n}b_{\nu n}, & a_{21}b_{\nu n}+\cdots a_{2n}b_{\nu n}, & \cdots, & a_{\nu 1}b_{\nu n}+\cdots a_{\nu n}b_{\nu n}, & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man diese Determinante nach den letzten n Colonnen, so zerfällt sie nach dem Satze von Laplace wieder in das Product zweier Determinanten, und zwar erhält man:

$$R=(-1)^{\bar{\nu}}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -1 \end{vmatrix}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}\cdots+a_{1n}b_{1n}, & a_{21}b_{11}+\cdots+a_{2n}b_{1n}, & \cdots, & a_{\nu 1}b_{11}+\cdots a_{\nu n}b_{1n} \\ a_{11}b_{21}\cdots+a_{1n}b_{2n}, & a_{21}b_{21}+\cdots+a_{2n}b_{2n}, & \cdots, & a_{\nu 1}b_{21}+\cdots a_{\nu n}b_{2n} \\ a_{11}b_{31}\cdots+a_{1n}b_{3n}, & a_{21}b_{31}+\cdots+a_{2n}b_{3n}, & \cdots, & a_{\nu 1}b_{31}+\cdots a_{\nu n}b_{3n} \\ a_{11}b_{41}\cdots+a_{1n}b_{1n}, & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11}b_{\nu 1}\cdots a_{1n}b_{\nu n}, & a_{21}b_{\nu 1}\cdots a_{2n}b_{\nu n}, & \cdots, & a_{\nu 1}b_{\nu 1}\cdots a_{\nu n}b_{\nu n} \end{vmatrix}.$$

Dabei ist der Werth der Determinante mit den Diagonalgliedern (-1) gegeben durch $(-1)^n$; und andererntheils ist der Exponent $\bar{\nu}$ gleich der Summe aller ersten plus der Summe aller zweiten Indices des Diagonalgliedes dieser Determinante, also (vgl. Nr. 55)

$$\bar{\nu}=[1+2+3\cdots+n]+[(\nu+1)(\nu+2)+\cdots(\nu+n)]$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+n\cdot\nu+\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)+n\nu.$$

Nun ist aber $n(n+1)$ jedenfalls eine gerade Zahl; daher können wir setzen:

$$(-1)^{\bar{\nu}}=(-1)^{n(n+1)+n\nu}=(-1)^{n\cdot\nu}.$$

Es wird somit

$$(-1)^{\nu} \cdot \begin{vmatrix} (-1) & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & (-1) & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & (-1) \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots & (-1) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n \cdot \nu} \cdot (-1)^n = (-1)^{n(\nu+1)}.$$

Wir erhalten also: $R =$

$$(-1)^{n(\nu+1)} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12} \cdots + a_{1n}b_{1n}, & a_{21}b_{11}+\cdots+a_{2n}b_{1n}, \cdots, & a_{\nu 1}b_{11}+\cdots a_{\nu n}b_{1n} \\ a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22} \cdots + a_{1n}b_{2n}, & a_{21}b_{21}+\cdots+a_{2n}b_{2n}, \cdots, & a_{\nu 1}b_{21}+\cdots a_{\nu n}b_{2n} \\ a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32} \cdots \; a_{1n}b_{3n}, & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{11}b_{41}+a_{12}b_{42} \cdots + a_{1n}b_{4n}, & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{11}b_{\nu 1}+a_{12}b_{\nu 2} \cdots + a_{1n}b_{\nu n}, & a_{21}b_{\nu 1}+\cdots \; a_{2n}b_{\nu n}, \cdots, & a_{\nu 1}b_{\nu 1}+\cdots a_{\nu n}b_{\nu n} \end{vmatrix}.$$

78. *Entwicklung der Determinante R nach Laplace.* Wir können nun aber auch die Determinante R, ohne sie vorher auf niedrigeren Grad zu reduciren, unter Anwendung der Methode von Laplace direct auf eine zweite Art darstellen. Entwickeln wir sie nämlich nach den Determinanten der ν ersten Colonnen, so erhalten wir eine Summe von Producten je zweier Determinanten, deren eine aus der Matrix der ν ersten Colonnen, deren andere aus der Matrix der n letzten Colonnen entnommen ist. Die Zahl dieser Producte ist gleich der Anzahl nicht verschwindender Determinanten, welche die Matrix der ν ersten Colonnen liefert, also gleich $\binom{n}{\nu}$. Wir erhalten, wenn wir die Determinanten jeder der beiden Matrices mit $\varDelta_\varrho^{(\nu)}$ bezw. $D_\varrho^{(n)}$ bezeichnen,

$$R = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\binom{n}{\nu}} (-1)^\varrho \cdot \varDelta_\varrho^{(\nu)} \cdot D_\varrho^{(n)}, \tag{A}$$

wobei der Factor $(-1)^\varrho$ der jeweiligen correspondirenden Determinante $D_\varrho^{(n)}$ entspricht. Enthält $\varDelta_\varrho^{(\nu)}$ die Zeilen

$$i_1, i_2, i_3 \cdots i_\nu,$$

ist also die Matrix dieser aus den ν ersten Colonnen entnommenen Determinante gegeben durch:

$$\varDelta_\varrho^{(\nu)} = \begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{2i_1} & a_{3i_1} & \dots & a_{\nu i_1} \\ a_{1i_2} & a_{2i_2} & a_{3i_2} & \dots & a_{\nu i_2} \\ a_{1i_3} & a_{2i_3} & a_{3i_3} & \dots & a_{\nu i_3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1i_\nu} & a_{2i_\nu} & a_{3i_\nu} & \dots & a_{\nu i_\nu} \end{vmatrix}. \tag{B}$$

so ist in dem Factor $(-1)^\varrho$ der Exponent

$$\begin{aligned} \varrho &= (1 + 2 \cdots \nu) + (i_1 + i_2 \cdots + i_\nu) \\ &= \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu} i_\varrho \end{aligned} \tag{C}$$

(vergleiche Nr. 55).

79. *Berechnung von* $D_\varrho^{(n)}$. Die Determinanten $D_\varrho^{(n)}$ haben nun aber durchgehends die Eigenschaft, dass ihre $(n-\nu)$ ersten Zeilen:

$$i_{\nu+1},\ i_{\nu+2} \ldots i_n$$

nur verschwindende Elemente besitzen, abgesehen von dem in jeder Zeile einmal auftretenden Elemente (-1), das in der Zeile i_ϱ von einer Colonne ausgeschnitten wird, die in der ursprünglichen Determinante den Index $\nu + i_\varrho$ hat. Denkt man sich also in einer solchen Determinante $D_\varrho^{(n)}$ die Colonnen in der Weise vertauscht, dass diejenigen, in welchen sich das Element (-1) befindet, die $(n-\nu)$ ersten bilden, wobei indes die Indices der Colonnen, so weit es geht, gut geordnet bleiben mögen, dann ist die Matrix einer solchen Determinante:

$$D_\varrho^{(n)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ b_{1 i_{\nu+1}} & b_{1 i_{\nu+2}} & b_{1 i_{\nu+3}} & \ldots & b_{1 i_n} & b_{1 i_1} & b_{1 i_2} & b_{1 i_3} & \ldots b_{1 i_\nu} \\ b_{2 i_{\nu+1}} & b_{2 i_{\nu+3}} & b_{2 i_{\nu+3}} & \ldots & b_{2 i_n} & b_{2 i_1} & b_{2 i_2} & \ldots & \ldots b_{2 i_\nu} \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \\ b_{\nu i_{\nu+1}} & b_{\nu i_{\nu+2}} & b_{\nu i_{\nu+3}} & \ldots & b_{\nu i_n} & b_{\nu i_1} & b_{\nu i_2} & \ldots & \ldots b_{\nu i_\nu} \end{vmatrix}.$$

Sie zerfällt nach der Entwicklung von Laplace selbst wieder in ein Product von zwei Determinanten, nämlich in das Product

$$D_\varrho^{(n)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -1 \end{vmatrix} \cdot B_{\substack{1\,2\,3 \quad \ldots\, n-\nu, \\ i_{\nu+1}, i_{\nu+2} \ldots i_n}} \tag{D}$$

wobei die Matrix der correspondirenden Determinante

$$B_{\substack{1\,2\,3\,\ldots\, n-\nu \\ i_{\nu+1},\, i_{\nu+2}\ldots i_n}} = (-1)^{\bar{\nu}} \begin{vmatrix} b_{1i_1} & b_{1i_2} & \ldots & b_{1i_\nu} \\ b_{2i_1} & b_{2i_2} & \ldots & b_{2i_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\nu i_1} & b_{\nu i_2} & \ldots & b_{\nu i_\nu} \end{vmatrix}.$$

Die Determinante in Gleichung (D), deren Diagonalreihe durch die ($n-\nu$) Elemente (-1) ausgefüllt ist, hat den Werth

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-\nu}.$$

Es handelt sich also nur noch, den Exponenten $\bar{\nu}$ des Factors $(-1)^{\bar{\nu}}$ zu ermitteln. Nach Nr. 48 § 4 ist derselbe aber dargestellt durch:

$$\bar{\nu} = (1 \quad 2 \quad 3 \cdots \quad (n-\nu)) + (i_{\nu+1} \quad i_{\nu+2} \quad \cdots i_n)$$
$$+ [1 + 2 + 3 \cdots + (n-\nu)] + [i_{\nu+1} + i_{\nu+2} + \cdots i_n).$$

Die beiden ersten Terme in dieser Summe haben den Werth Null, da in ihnen die Indices gut geordnet sind; also wird

$$\bar{\nu} = [1 + 2 + 3 \cdots + (n-\nu)] + [i_{\nu+1} + i_{\nu+2} \cdots + i_n]$$
$$= \frac{(n-\nu)(n-\nu+1)}{2} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-\nu} i_{\nu+\varrho}.$$

Demnach wird die Determinante $D_\varrho^{(n)}$ dargestellt durch

$$D_\varrho^{(n)} = (-1)^k \begin{vmatrix} b_{1i_1} & b_{1i_2} & \ldots & b_{1i_\nu} \\ b_{2i_1} & b_{2i_2} & \ldots & b_{2i_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\nu i_1} & b_{\nu i_2} & \ldots & b_{\nu i_\nu} \end{vmatrix},$$

wobei

$$k = (n-\nu) + \frac{(n-\nu)(n-\nu+1)}{2} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-\nu} i_{\nu+\varrho}. \qquad (E)$$

80. *Substitution der Werthe von $D_\varrho^{(n)}$ und $\Delta_\varrho^{(\nu)}$ in die Laplace'sche Entwicklung von R.* Tragen wir nun diese Werthe von $D_\varrho^{(n)}$ und $D_\varrho^{(\nu)}$ in die Gleichung (A) ein, so erhalten wir:

$$R = \sum (-1)^\varrho \cdot (-1)^k \begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{2i_1} & \ldots & a_{\nu i_1} \\ a_{1i_2} & a_{2i_2} & \ldots & a_{\nu i_2} \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1i_\nu} & a_{2i_\nu} & \ldots & a_{\nu i_\nu} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1i_1} & b_{1i_2} & \ldots & b_{1i_\nu} \\ b_{2i_1} & b_{2i_2} & \ldots & b_{2i_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\nu i_1} & b_{\nu i_2} & \ldots & b_{\nu i_\nu} \end{vmatrix}.$$

Es erübrigt nur noch, den Exponenten von $(-1)^{\varrho+k}$ zu vereinfachen. Wegen der Relationen (C) und (E) ist aber

$$\varrho + k = \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu} i_\varrho + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-\nu} i_{\nu+\varrho} + \frac{(n-\nu)(n-\nu+1)}{2} + n - \nu.$$

Da der zweite und dritte Term rechts zusammen nichts anderes ist, als die Summe aller Indices von 1 bis n, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\varrho + k &= \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-\nu)(n-\nu+1)}{2} + n - \nu \\ &= (\nu^2 + \nu + n^2 + n + n^2 - 2\nu n + \nu^2 + n - \tfrac{1}{2}) + n - \nu \\ &= (\nu^2 + n^2 + n - n \cdot \nu) + n - \nu \\ &= (\nu^2 - \nu + n^2 + n) + n(1-\nu).\end{aligned}$$

Das erste Glied dieser Summe: $(\nu^2 - \nu + n^2 + n)$ ist jedenfalls eine gerade Zahl, kann also unberücksichtigt bleiben, das zweite Glied $n(1-\nu)$ gerade oder ungerade, ebenso wie $n(1+\nu)$; wir können daher $\varrho + k$ durch $n(1+\nu)$ ersetzen, so dass wir nun als Endresultat erhalten:

$$R = (-1)^{n(\nu+1)} \sum \begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{2i_1} & \dots & a_{\nu i_1} \\ a_{1i_2} & a_{2i_2} & \dots & a_{\nu i_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1i_\nu} & a_{2i_\nu} & \dots & a_{\nu i_\nu} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1i_1} & b_{1i_2} & \dots & b_{1i_\nu} \\ b_{2i_1} & b_{2i_2} & \dots & b_{2i_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\nu i_1} & b_{\nu i_2} & \dots & b_{\nu i_\nu} \end{vmatrix},$$

oder, wenn wir noch die Matrix mit den Elementen $a_{k i_\varrho}$ transponiren

$$R = (-1)^{n(\nu+1)} \sum \begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \dots & a_{1i_\nu} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \dots & a_{2i_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\nu i_1} & a_{\nu i_2} & \dots & a_{\nu i_\nu} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1i_1} & b_{1i_2} & \dots & b_{1i_\nu} \\ a_{2i_1} & b_{2i_2} & \dots & b_{2i_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\nu i_1} & b_{\nu i_2} & \dots & b_{\nu i_\nu} \end{vmatrix} \qquad (F)$$

81. *Zusammenfassung der Resultate der letzten Untersuchungen.* Wir haben somit für die Determinante R zwei der Form nach verschiedene Entwicklungen erhalten, die beide mit den zwei Matrices

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & a_{\nu 3} & \dots & a_{\nu n} \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\nu 1} & b_{\nu 2} & b_{\nu 3} & \dots & b_{\nu n} \end{vmatrix},$$

wo $n > \nu$, in einer gewissen Beziehung stehen. Verbindet man nämlich die beiden Matrices einmal in der Weise, wie sie das Gesetz über

Multiplication von Determinanten gebietet, so erhält man die zuerst gegebene (Nr. 77) Darstellung von R; multiplicirt man andrerseits je eine Determinante der ersten Matrix mit der entsprechenden, d. h. jener, die aus Colonnen mit gleichem Index gebildet ist, der andern Matrix, und summirt die so erhaltenen $\binom{n}{\nu}$ Producte, so erhält man die zweite Darstellung von R (Nr. 80, F). In beiden Entwicklungen tritt der Factor $(-1)^{n(\nu+1)}$ auf, so dass wir also nach Division mit diesem Factor die Beziehung erhalten:

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+\cdots a_{1n}b_{1n}, & a_{21}b_{11}+\cdots a_{2n}b_{1n}, & \cdots, & a_{\nu 1}b_{11}+\cdots a_{\nu n}b_{1n} \\ a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+\cdots a_{1n}b_{2n}, & a_{21}b_{21}+\cdots a_{2n}b_{2n}, & \cdots, & a_{\nu 1}b_{21}+\cdots a_{\nu n}b_{2n} \\ a_{11}b_{31} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot, & a_{21}b_{31}+ \cdot \cdot \cdot, & \cdots, & a_{\nu 1}b_{31} \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{11}b_{\nu 1}+a_{12}b_{\nu 2}+\cdots a_{1n}b_{\nu n}, & a_{21}b_{\nu 1} \cdots a_{2n}b_{\nu n}, & \cdots, & a_{\nu 1}b_{\nu 1}+\cdots a_{\nu n}b_{\nu n} \end{vmatrix}$$

$$=\sum \begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{2i_2} & \dots & a_{1i_\nu} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \dots & a_{2i_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\nu i_1} & a_{\nu i_2} & \dots & a_{\nu i_\nu} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1i_1} & b_{1i_2} & \dots & b_{1i_\nu} \\ b_{2i_1} & b_{2i_2} & \dots & b_{2i_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\nu i_1} & b_{\nu i_2} & \dots & b_{\nu i_\nu} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdot & \cdot & a_{\nu n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\nu 1} & b_{\nu 2} & b_{\nu 3} & \dots & b_{\nu n} \end{vmatrix}.$$

Dabei hat das letzte Product, also das Product der beiden Matrices, natürlich nur symbolische Bedeutung, insofern damit die unmittelbar vorhergehende Summe von Producten je zweier entsprechender Determinanten ν^{ten} Grades der beiden Matrices ausgedrückt sein soll. So lange also $n > \nu$, liefert das Product der beiden Matrices, gebildet durch Multiplication von Zeilen mit Zeilen, eine Determinante R, welche im Allgemeinen nicht verschwindet.

82. *Besprechung des Falles, bei welchem in beiden Matrices die Zahl der Zeilen jene der Colonnen überschreitet.* Ist nun aber $n < \nu$, d. h. die Zahl der Zeilen grösser als die der Colonnen, dann führt der durch

$$(G) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\nu 1} & b_{\nu 2} & \dots & b_{\nu n} \end{vmatrix}$$

symbolisch angedeutete Multiplicationsprocess (wenn wir wieder die Elemente der Productdeterminante durch Multiplication von Zeilen mit Zeilen entstehen lassen) auf eine Determinante

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} \cdots + a_{1n} b_{1n}, & a_{21} b_{11} \cdots + a_{2n} b_{1n}, \cdots, & a_{\nu 1} b_{11} \cdots + a_{\nu n} b_{1n} \\ a_{11} b_{21} \cdots + a_{1n} b_{2n}, & a_{21} b_{21} \cdots + a_{2n} b_{2n}, \cdots, & a_{\nu 1} b_{21} \cdots + a_{\nu n} b_{2n} \\ a_{11} b_{31} \cdots + a_{1n} b_{3n}, & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{11} b_{\nu 1} \cdots + a_{1n} b_{\nu n}, & a_{21} b_{\nu 1} \cdots + a_{2n} b_{\nu n}, \cdots, & a_{\nu 1} b_{\nu 1} \cdots + a_{\nu n} b_{\nu n} \end{vmatrix},$$

welche aber identisch verschwindet. Denn genau dieselbe Determinante würden wir erhalten, wenn wir vorher jede der beiden Matrices in (G) durch die nöthige Zahl von Colonnen, deren sämmtliche Elemente Null sind, zu Matrices erweitern, welche Determinanten repräsentiren, und nun die beiden Determinanten in der angegebenen Weise multipliciren. Da aber hier die Factoren den Werth Null besitzen, so verschwindet auch das Product, d. h. die Determinante R ist identisch Null, wenn $\nu > n$.

Fassen wir also die erhaltenen Resultate zusammen, so gelangen wir zu dem Satze:

„Die Determinante R ist gleich dem Producte zweier n-gliederiger Determinanten, wenn $\nu = n$; sie zerfällt in die Summe von $\binom{n}{\nu}$ Producten je zweier entsprechender ν-gliederiger Determinanten, wenn $n > \nu$; sie ist endlich identisch Null, wenn $n < \nu$.“

83. *Beispiel* 1.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, & a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 \\ x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3, & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Beispiel 2.

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 a_1 + v_1 b_1, & u_2 a_1 + v_2 b_1, & u_3 a_1 + v_3 b_1 \\ v_1 a_2 + v_1 b_2, & u_2 a_2 + v_2 b_2, & u_3 a_2 + v_3 b_2 \\ v_1 a_3 + v_1 b_3, & u_2 a_3 + v_2 b_3, & u_3 a_3 + v_3 b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

84. *Beispiel* 3. Die Darstellung einer Determinante wie in Beispiel 1 durch eine Summe von Producten wollen wir noch verwenden,

um eine Formel der analytischen Geometrie aufzustellen. Bekanntlich erfüllen die drei Richtungscosinusse einer Geraden im Raume die Relation

$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma,$$

und ferner ist der Neigungswinkel dieser Geraden mit einer zweiten von den Richtungscosinussen $\cos \alpha_1$, $\cos \beta_1$, $\cos \gamma_1$ gegeben durch

$$\cos v = \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1.$$

Gemäss dieser beiden Relationen kann man die Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos v & 1 \\ 1 & \cos v \end{vmatrix} = \sin^2 v$$

auch schreiben

$$\begin{vmatrix} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma, & \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma + \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1, & \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 \end{vmatrix}.$$

Diese zerfällt aber nach Beispiel 1 in die drei Producte je zweier Determinanten, so dass man erhält

$$\sin^2 v = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos \beta & \cos \gamma \\ \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos \gamma & \cos \alpha \\ \cos \gamma_1 & \cos \alpha_1 \end{vmatrix}^2.$$

§ 7. Adjungirte Determinanten und correspondirende Matrices.

85. *Definition der adjungirten Determinante.* Eine Determinante von n^2 Elementen a_{ik} besitzt auch n^2 Unterdeterminanten A_{ik}, aus welchen man, wie aus den Elementen a_{ik} selbst, die Matrix einer Determinante zusammensetzen kann. Ist die Matrix der ursprünglichen Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots\dots\dots\dots & \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

so ist die aus den entsprechenden Unterdeterminanten gebildete

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \dots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \dots\dots & A_{2n} \\ A_{31} & \dots\dots\dots\dots & \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \\ A_{n1} & A_{n2} \dots\dots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Man nennt D die *adjungirte* Determinante zu $\varDelta$. Bei der Untersuchung dieser adjungirten Determinante drängen sich zunächst zwei Fragen

auf: 1) Welches ist der Werth der Determinante selbst, 2) welches sind die Werthe der Unterdeterminanten sowohl der ersten als auch der übrigen Ordnungen?

86. *Berechnung des Werthes der adjungirten Determinante.* Zur Beantwortung der ersten Frage bilden wir das Product der beiden Determinanten D und Δ. Wir erhalten:

$$\begin{vmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots a_{1n}A_{1n}, & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\cdots+a_{1n}A_{2n}, & \cdots, & a_{11}A_{n1}\cdots+a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}\cdots+a_{2n}A_{1n}, & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}\quad\cdots+a_{2n}A_{2n}, & \cdots, & a_{21}A_{n1}\cdots+a_{2n}A_{nn} \\ a_{31}A_{11}+\cdots+a_{3n}A_{1n}, & \cdots\cdots\cdots & \cdots, & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}A_{11}\quad\cdots+a_{nn}A_{1n}, & a_{n1}A_{21}+a_{n2}A_{22}\quad\cdots+a_{nn}A_{1n}, & \cdots, & a_{n1}A_{n1}+a_{nn}A_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= D\cdot\Delta.$$

In dieser Determinante verschwinden aber wegen der Relationen (C) Nr. 32 alle ausserhalb der Diagonale stehenden Elemente, während die n in ihr befindlichen Elemente den Werth Δ besitzen; sie reducirt sich also auf ihr Diagonalglied, so dass die Beziehung entsteht

(1) $$D\cdot\Delta = \Delta^n,$$

oder

$$D = \Delta^{n-1}.$$

87. *Berechnung eines Minors beliebiger Ordnung der adjungirten Determinante.* Auch die zweite Frage lässt sich mit Hilfe des Productsatzes für Determinanten erledigen. Wir erweitern zu diesem Zwecke nur zuerst die Matrix der Unterdeterminante $(n-\varrho)^{\text{ter}}$ Ordnung zu einer Matrix von n^2 Elementen, wozu ja der Satz von Laplace in einfacher Weise die Mittel liefert.

Sei in erster Linie die gegebene Unterdeterminante von D dargestellt durch

$$D^{(n-\varrho)} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}\cdots & A_{1\varrho} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots\cdots & A_{2\varrho} \\ A_{31} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{\varrho 1} & A_{\varrho 2} & \cdots\cdots & A_{\varrho\varrho} \end{vmatrix},$$

so bildet man die Erweiterung dieser Matrix dadurch, dass man zunächst in der Richtung der Diagonale noch $(n-\varrho)$ Elemente vom Werthe 1 anfügt; die übrigen Stellen unterhalb der ϱ^{ten} Zeile füllt man mit dem Elemente 0 aus, während in die rechts der ϱ^{ten} Colonne befindlichen Stellen diejenigen Elemente A_{ik} einrücken, welche bereits in der ursprünglichen Determinante D dieselben innehaben. Dadurch wird die Matrix von $D^{(n-\varrho)}$:

$$D^{(n-\varrho)} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1\varrho} & A_{1,\varrho+1} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2\varrho} & A_{2,\varrho+1} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{\varrho 1} & A_{\varrho 2} & \dots & A_{\varrho\varrho} & A_{\varrho,\varrho+1} & \dots & A_{\varrho n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Die so erhaltene Determinante multipliciren wir nun wieder mit der Determinante Δ.

Das Product ist dargestellt durch:

$$\Delta \cdot D^{(n-\varrho)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & & \dots & a_{3n} \\ \dots & & & & \\ a_{\varrho 1} & a_{\varrho 2} & a_{\varrho 3} & \dots & a_{\varrho n} \\ a_{\varrho+1,1} & \dots & & \dots & a_{\varrho+1,n} \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1\varrho} & A_{1,\varrho+1} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2\varrho} & A_{2,\varrho+1} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{\varrho 1} & A_{\varrho 2} & \dots & A_{\varrho\varrho} & A_{\varrho,\varrho+1} & \dots & A_{\varrho n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} A_{11} \dots + a_{1n} A_{1n}, \dots, & a_{11} A_{\varrho 1} \dots + a_{1n} A_{\varrho n}, & a_{1,\varrho+1}, & a_{1,\varrho+2}, \dots, & a_{1n} \\ a_{21} A_{11} \dots + a_{2n} A_{1n}, \dots, & a_{21} A_{\varrho 1} \dots + a_{2n} A_{\varrho n}, & a_{2,\varrho+1}, & a_{2,\varrho+2}, \dots, & a_{2n} \\ a_{31} A_{11} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & a_{3,\varrho+1}, & \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \dots, & a_{3n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho 1} A_{11} \dots + a_{\varrho n} A_{1n}, \dots, & a_{\varrho 1} A_{\varrho,1} \dots + a_{\varrho n} A_{\varrho n}, & a_{\varrho,\varrho+1}, & a_{\varrho,\varrho-2}, \dots, & a_{\varrho n} \\ a_{\varrho+1,1} A_{11} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & a_{\varrho+1,\varrho+1} & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & , a_{\varrho+1,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} A_{11} \dots + a_{nn} A_{1n}, \dots, & a_{n1} A_{\varrho 1} \dots + a_{nn} A_{\varrho n}, & a_{n,\varrho+1}, & a_{n,\varrho+2}, \dots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \dots 0, & a_{1,\varrho+1}, & a_{1,\varrho+2}, \dots, & a_{1n} \\ 0 & \Delta & 0 \dots 0, & a_{2,\varrho+1}, & a_{2,\varrho+2}, \dots, & a_{2n} \\ 0 & 0 & \Delta \dots 0, & a_{3,\varrho+1}, & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & , \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots \Delta, & a_{\varrho,\varrho+1}, & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & , a_{\varrho n} \\ 0 & 0 & 0 \dots 0, & a_{\varrho+1,\varrho+1}, & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & , a_{\varrho+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 \dots 0, & a_{n,\varrho+1}, & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & , a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die zuletzt erhaltene Determinante reducirt sich nach Laplace auf das Product $\Delta^\varrho \cdot A_{\substack{12\ldots\varrho \\ 12\ldots\varrho}}$, so dass wir erhalten:

$$\Delta \cdot D^{(n-\varrho)} = \Delta \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \ldots A_{1\varrho} \\ A_{21} & A_{22} \ldots A_{2\varrho} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{\varrho 1} & A_{\varrho 2} \ldots A_{\varrho\varrho} \end{vmatrix}$$

$$= \Delta^\varrho \cdot \begin{vmatrix} a_{\varrho+1,\varrho+1}, & a_{\varrho+1,\varrho+2}, \ldots, & a_{\varrho+1,n} \\ a_{\varrho+2,\varrho+1}, & a_{\varrho+2,\varrho+2}, \ldots, & a_{\varrho+2,n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{n,\varrho+1} & , a_{n,\varrho+2} \quad , \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

oder nach Division mit Δ:

$$D^{(n-\varrho)} = A_{\substack{12\ldots\varrho \\ 12\ldots\varrho}} \cdot \Delta^{\varrho-1} \,. \tag{4}$$

Die Determinante $A_{\substack{12\ldots\varrho \\ 12\ldots\varrho}}$ entsteht aber aus Δ durch Unterdrückung derjenigen Zeilen und Colonnen, welche sich in den Elementen der Matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1\varrho} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2\varrho} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{\varrho 1} & a_{\varrho 2} \ldots a_{\varrho\varrho} \end{vmatrix}$$

schneiden, d. h. in jenen Elementen von Δ, deren Minoren erster Ordnung gerade die Elemente des Minors $D^{(n-\varrho)}$ bilden.

88. *Besprechung des allgemeinen Falles.* Die Relation (4) gilt zunächst für den speciellen Minor $(n-\varrho)^{\text{ter}}$ Ordnung, dessen Elemente die ϱ^2 ersten Plätze in D einnehmen. Ist der Minor beliebig gewählt, etwa

$$D^{(n-\varrho)} = \begin{vmatrix} A_{i_1 k_1}, & A_{i_1 k_2} \ldots A_{i_1 k_\varrho} \\ A_{i_2 k_1}, & A_{i_2 k_2} \ldots A_{i_2 k_\varrho} \\ A_{i_3 k_1} & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{i_\varrho k_1}, & A_{i_\varrho k_2} \ldots A_{i_\varrho k_\varrho} \end{vmatrix},$$

dann können wir auf ganz analogem Wege seinen Werth berechnen. Wir erweitern wieder die Matrix dieses Minors in der unter Nr. 87

geschilderten Weise zu einer Matrix von n^2 Elementen, indem wir zunächst jene $(n-\varrho)$ Colonnen anfügen, durch deren Unterdrückung die Colonnen des Minors entstanden sind, natürlich möglichst gut geordnet unter Beachtung der Anordnung ihrer Elemente nach Zeilen, welche jenen des Minors entsprechen. Sodann erweitern wir die Anzahl der Zeilen der so erhaltenen Matrix gerade so wie im speciellen Falle. Die Determinante $D^{(n-\varrho)}$ ist alsdann inclusive Vorzeichen durch die Matrix dargestellt:

$$D^{(n-\varrho)} = \begin{vmatrix} A_{i_1k_1} & A_{i_1k_2} & A_{i_1k_3}\dots & A_{i_1k_\varrho} & A_{i_1k_{\varrho+1}} & A_{i_1k_{\varrho+2}}\dots & A_{i_1k_n} \\ A_{i_2k_1} & A_{i_2k_2} & \dots\dots & A_{i_2k_\varrho} & A_{i_2k_{\varrho+1}} & \dots\dots & A_{i_2k_n} \\ A_{i_3k_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{i_\varrho k_1} & A_{i_\varrho k_2} & \dots\dots & A_{i_\varrho k_\varrho} & A_{i_\varrho k_{\varrho+1}} & A_{i_\varrho k_{\varrho+2}}\dots & A_{i_\varrho k_n} \\ 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 1 & 0\dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 & 1\dots\dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 & 0\dots\dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Bringen wir nun auch in der Determinante Δ die den Elementen $A_{i_\mu k_\mu}$ des Minors $D^{(n-\varrho)}$ entsprechenden Elemente $a_{i_\mu k_\mu}$ durch cyclische Vertauschung an die ϱ^2 ersten Plätze, dann hat gemäss den Entwicklungen in Nr. 48 die so erhaltene Matrix den Werth

$$\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & \dots & a_{i_1k_\varrho} & a_{i_1k_{\varrho+1}}\dots & a_{i_1k_n} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} & \dots & a_{i_2k_\varrho} & a_{i_2k_{\varrho+1}}\dots & a_{i_2k_n} \\ a_{i_3k_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_nk_1} & a_{i_nk_2} & \dots & a_{i_nk_\varrho} & a_{i_nk_{\varrho+1}}\dots & a_{i_nk_n} \end{vmatrix} = (-1)^{\nu}\cdot\Delta,$$

$$\text{wo } \nu = (i_1\ i_2\ i_3\dots i_\varrho) + (k_1\ k_2\dots k_\varrho) + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\varrho} i_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\varrho} k_\sigma.$$

Bildet man jetzt das Product der beiden Determinanten $D^{(n-\varrho)}$ und $(-1)^\nu\Delta$, indem man die so umgestalteten Matrices derselben zu Grunde legt, so erhält man durch Multiplication der Elemente nach ihren Zeilen

$$(-1)^{\nu}\cdot\varDelta\cdot D^{(n-\varrho)}=\begin{vmatrix} \varDelta & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{i_1 k_{\varrho+1}} & a_{i_1 k_{\varrho+2}} & \dots & a_{i_1 k_n} \\ 0 & \varDelta & 0 & \dots & 0 & a_{i_2 k_{\varrho+1}} & a_{i_2 k_{\varrho+2}} & \dots & a_{i_2 k_n} \\ 0 & 0 & \varDelta & \dots & 0 & a_{i_3 k_{\varrho+1}} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varDelta & a_{i_\varrho k_{\varrho+1}} & a_{i_\varrho k_{\varrho+2}} & \dots & a_{i_\varrho k_n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{i_{\varrho+1} k_{\varrho+1}} & a_{i_{\varrho+1} k_{\varrho+2}} & \dots & a_{i_{\varrho+1} k_n} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{i_{\varrho+2} k_{\varrho+1}} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{i_n k_{\varrho+1}} & a_{i_n k_{\varrho+2}} & \dots & a_{i_n k_n} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante spaltet sich nach dem Satze von Laplace wieder in das Product zweier anderer, so dass wir erhalten:

$$(-1)^{\nu}\cdot\varDelta\cdot D^{(n-\varrho)}=\varDelta^{\varrho}\cdot\begin{vmatrix} a_{i_{\varrho+1} k_{\varrho+1}} & a_{i_{\varrho+1} k_{\varrho+2}} & \dots & a_{i_{\varrho+1} k_n} \\ a_{i_{\varrho+2} k_{\varrho+1}} & a_{i_{\varrho+2} k_{\varrho+2}} & \dots & a_{i_{\varrho+2} k_n} \\ a_{i_{\varrho+3} k_{\varrho+1}} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_n k_{\varrho+1}} & a_{i_n k_{\varrho+2}} & \dots & a_{i_n k_n} \end{vmatrix} \qquad (A)$$

Die Matrix rechts stellt aber mit $(-1)^{\nu}$ multiplicirt gerade den Minor $A_{\substack{i_1 i_2 \dots i_\varrho \\ k_1 k_2 \dots k_\varrho}}$ dar, d. h. die correspondirende Determinante zu jener Unterdeterminante von $\varDelta$, deren Elemente den Elementen des Minors $D^{(n-\varrho)}$ entsprechen. Multipliciren wir also die Gleichung (A) mit $(-1)^{\nu}$, und dividiren wir sie mit $\varDelta$, so kommt

$$D^{(n-\varrho)}=\varDelta^{\varrho-1}\cdot A_{\substack{i_1 i_2 \dots i_\varrho \\ k_1 k_2 \dots k_\varrho}}.$$

Wir können daher den Satz aufstellen:

„Ein Minor ϱ^{ten} Grades der zu $\varDelta$ adjungirten Determinante D ist gleich dem Producte der $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Potenz von $\varDelta$ in die correspondirende Determinante jenes Minors von $\varDelta$, dessen Elemente a_{ik} den Elementen A_{ik} des Minors von D entsprechen."

89. *Beispiel.* Es seien

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \dots & a_{25} \\ a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{55} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{15} \\ A_{21} & \cdot & \dots & A_{25} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{51} & A_{52} & \dots & A_{55} \end{vmatrix}.$$

die Determinante $\varDelta$ und ihre adjungirte D; der Werth des Minors

$$D^{(3)} = \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} \\ A_{41} & A_{42} \end{vmatrix}$$

bestimmt sich dann aus dem Producte

$$(-1)^{\nu} \varDelta \cdot D^{(3)} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \varDelta & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & \varDelta & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \varDelta^2 \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix},$$

$$\nu = (34) + (12) + (3+4) + (1+2) = 10.$$

Daher: $D^{(3)} = \varDelta \cdot A_{\substack{34\\12}}$, oder:

$$\begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} \\ A_{41} & A_{42} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{25} \\ a_{31} & \dots & \dots & \\ & \dots & \dots & \\ a_{51} & \dots & \dots & a_{55} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

90. *Definition der correspondirenden Matrices.* Ehe wir zu den Anwendungen der Determinantentheorie übergehen, wollen wir noch einen Satz beweisen, der die Determinanten zweier solcher Matrices in Beziehung setzt, zwischen deren Elementen gewisse Relationen bestehen. Seien die beiden Matrices, deren eine n Colonnen und μ Zeilen, deren andere n Colonnen und ν Zeilen besitzen, dargestellt durch

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & \dots & a_{\mu \nu} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{\nu 1} & b_{\nu 2} & \dots & \dots & b_{\nu n} \end{vmatrix},$$

wobei $\mu + \nu = n$ vorausgesetzt ist, dann können wir aus ihnen nach der Methode der Multiplication für Determinantenmatrices eine neue Matrix bilden, indem wir die Elemente jeder Zeile der ersten mit dem ent-

entsprechenden jeder der zweiten multipliciren. Diese neue Matrix enthält in μ Colonnen und ν Zeilen $\mu \cdot \nu$ Elemente von der Form:

$$a_{\varrho 1}\, b_{\sigma 1} + a_{\varrho 2}\, b_{\sigma 2} + a_{\varrho 3}\, b_{\sigma 3} + \cdots + a_{\varrho n}\, b_{\sigma n} \tag{1}$$

$$\varrho = 1, 2, \cdots \mu; \; \sigma = 1, 2, \cdots \nu.$$

Wir setzen nun im Folgenden fest, dass die Elemente a_{ik}, b_{ik} solche Werthe besitzen, dass jede Summe, wie sie in (1) dargestellt ist, den Werth Null habe. Die Zahl der Relationen, die hierdurch zwischen den Elementen a_{ik} und b_{ik} bestehen soll, ist $\mu \cdot \nu$. Nun können wir aber die beiden gegebenen Matrices zu einer einzigen Matrix zusammenfügen, welche, da $\mu + \nu = n$, eine Determinante $\varDelta$ repräsentirt. Jeder ihrer Unterdeterminanten von der Ordnung $\mu = n - \nu$, die nur Elemente a_{ik} enthält, entspricht eine correspondirende Unterdeterminante ν^{ter} Ordnung, die nur Elemente b_{ik} besitzt. Wir werden demgemäss je eine Determinante der ersten und je eine der zweiten Matrix correspondirende (complementäre) nennen, wenn die Determinante der Elemente b_{ik} durch Colonnen gebildet ist mit solchen Indices, die bei Bildung der ersten Determinante der Elemente a_{ik} nicht verwendet werden. Beide Matrices werden überdies selbst als *correspondirende* bezeichnet, wenn zwischen ihren Elementen die $\mu \cdot \nu$ Relationen bestehen:

$$a_{\varrho 1}\, b_{\sigma 1} + a_{\varrho 2}\, b_{\sigma 2} + \cdots a_{\varrho n}\, b_{\sigma n} = 0.$$

91. *Lehrsatz über correspondirende Matrices.* Der oben erwähnte Satz lautet nun:

„Die correspondirenden Determinanten zweier correspondirender Matrices sind einander proportional.“

Wir geben zunächst von dem Satze einen ersten Beweis; ein zweiter Beweis wird sich später (vgl. Nr. 106) darbieten.

Die Matrix der Elemente a_{ik} ergänzen wir durch Anfügung von ν Zeilen willkürlicher Elemente a_{ik} zur Matrix einer Determinante $\varDelta$, ebenso erweitern wir die zweite Matrix durch μ Zeilen willkürlicher Elemente b_{ik} zur Matrix der Determinante D, so dass wir erhalten:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdot \cdot \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} \cdot \cdot \cdot & a_{\mu n} \\ a_{\mu+1,1} & a_{\mu+1,2} \cdot \cdot \cdot & a_{\mu+1,n} \\ \vdots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot \cdot \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ und } D = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdot \cdot \cdot & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\nu 1} & b_{\nu 2} \cdot \cdot & b_{\nu n} \\ b_{\nu+1,1} & b_{\nu+1,2} \cdot \cdot \cdot & b_{\nu+1,n} \\ \vdots & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdot \cdot \cdot & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Das Product beider Determinanten — wir wollen es durch Multiplication von Zeilen mit Zeilen entstehen lassen — enthält Elemente von der Form

$$c_{\varrho\sigma} = a_{\varrho 1}\, b_{\sigma 1} + a_{\varrho 2}\, b_{\sigma 2} \ldots + a_{\varrho n}\, b_{\sigma n}.$$

Diese sind null, wenn sowohl $\varrho \leq \mu$ als auch $\sigma \leq \nu$ ist; die Matrix des Productes enthält somit als einen Theil die schon Eingangs erwähnte Matrix von $\mu\nu$ Elementen, welche verschwinden. Sie ist nämlich dargestellt durch:

$$\varDelta \cdot D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0, & c_{1,\mu+1}, & c_{1,\mu+2} \ldots & c_{1n} \\ 0 & 0 \ldots\ldots & \ldots\ldots 0, & c_{2,\mu+1}, & c_{2,\mu+2} \ldots & c_{2n} \\ 0 & \ldots & \ldots & c_{3,\mu+1} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0, & c_{\nu,\mu+1} & \ldots & c_{\nu n} \\ c_{\nu+1,1} & c_{\nu+1,2} & \ldots c_{\nu+1,\mu}, & c_{\nu+1,\mu+1} & \ldots & c_{\nu+1,n} \\ c_{\nu+2,1} & c_{\nu+2,2} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{\nu+2,n} \\ c_{\nu+3,1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots c_{n\mu}, & c_{n,\mu+1} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

92. Daher zerfällt sie nach dem Satze von Laplace in das Product der beiden Determinanten

$$B = \begin{vmatrix} c_{1,\mu+1}, & c_{1,\mu+2} \ldots & c_{1n} \\ c_{2,\mu+1}, & c_{2,\mu+2} \ldots & c_{2n} \\ c_{3,\mu+1} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{\nu,\mu+1}, & c_{\nu,\mu+2} \ldots & c_{\nu n} \end{vmatrix}$$

und

$$A = \begin{vmatrix} c_{\nu+1,1}, & c_{\nu+1,2} \ldots & c_{\nu+1,\mu} \\ c_{\nu,+2,1}, & c_{\nu+2,2} \ldots & c_{\nu+2,\mu} \\ c_{\nu+3,1}, & c_{\nu+3,2} \ldots & c_{\nu+3,\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1}, & c_{n2} \ldots & c_{n\mu} \end{vmatrix}.$$

Die Determinante A besitzt μ^2 Elemente

$$c_{\varrho\sigma} = a_{\varrho 1}\, b_{\nu+\sigma,1} + a_{\varrho 2}\, b_{\nu+\sigma,2} \ldots + a_{\varrho n}\, b_{\nu+\sigma,n} \begin{cases} \varrho = 1 \text{ bis } \mu \\ \nu + \sigma = \nu \text{ bis } n. \end{cases}$$

Die Determinante B enthält ν^2 Elemente

$$c_{\varrho\sigma} = a_{\mu+\varrho,1}\, b_{\sigma 1} + a_{\mu+\varrho,2}\, b_{\sigma 2} \ldots + a_{\mu+\varrho,n}\, b_{\sigma n} \begin{cases} \mu + \varrho = \mu \text{ bis } n \\ \sigma = 1 \text{ bis } \nu. \end{cases}$$

Wir erhalten somit als Product von $D \cdot \varDelta$ den Werth

$$\varDelta \cdot D = (-1)^{\bar{\nu}} A \cdot B. \tag{2}$$

Der Exponent $\bar{\nu}$ bestimmt sich dabei nach Nr. 52 aus der Relation

$$\bar{\nu} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu} (\mu + \varrho) + \sum_{1}^{\nu} \varrho = \nu \cdot \mu + \nu(\nu + 1),$$

oder auch aus

$$\bar{\nu} = \sum_{1}^{\mu} \varrho + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mu} (\nu + \varrho) = \mu(\mu + 1) + \nu\mu.$$

Da sowohl $\nu(\nu + 1)$ als $\mu(\mu + 1)$ eine gerade Zahl, so kann der Exponent $\bar{\nu} = \mu \cdot \nu$ gesetzt werden. Die Relation (2) wird also:

$$\varDelta \cdot D = (-1)^{\mu \cdot \nu} A \cdot B \tag{3}$$

oder

$$\frac{\varDelta}{B} = (-1)^{\mu \cdot \nu} \frac{A}{D}. \tag{4}$$

93. Nun enthält aber die linke Seite dieser Gleichung weder im Nenner noch im Zähler die willkürlich später zugefügten Elemente $b_{\nu+\sigma,i}$. Setzen wir also diesen Bruch gleich λ, so ist λ unabhängig von diesen Elementen; die Gleichung (4) aber wird:

$$\lambda = (-1)^{\mu \cdot \nu} \cdot \frac{A}{D}, \text{ oder } (-1)^{\mu \cdot \nu} A = \lambda \cdot D, \tag{5}$$

worin nun A und D Functionen der willkürlichen Elemente $b_{\nu+\sigma,i}$ sind, über die wir nun passend verfügen können. Wählen wir nämlich die Elemente $b_{\nu+1,i_1}\ b_{\nu+2,i_2} \ldots b_{\nu+\mu,i_\mu}$ gleich 1, alle übrigen aber gleich null, dann reducirt sich durch Unterdrückung der Zeilen und Colonnen, welche das Element 1 enthalten, die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots\ldots b_{2n} \\ b_{31} & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} \ldots b_{nn} \end{vmatrix}$$

auf eine Determinante von ν^2 Elementen der zweiten correspondirenden Matrix, nämlich auf:

$$D' = B_{\substack{\nu+1, \nu+2, \ldots \nu+\mu \\ i_1 \quad i_2 \ \ldots \ i_\mu}} = (-1)^{\nu_1} \begin{vmatrix} b_{1 i_{\mu+1}}, b_{1 i_{\mu+2}} \ldots b_{1 i_{\mu+\nu}} \\ b_{2 i_{\mu+1}}, b_{2 i_{\mu+2}} \ldots b_{2 i_{\mu+\nu}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{\nu i_{\mu+1}}, b_{\nu i_{\mu+2}} \ldots b_{\nu i_{\mu+\nu}} \end{vmatrix},$$

wobei:

$$\nu_1 = (\nu+1,\ \nu+2,\ldots\nu+\mu) + (i_1\, i_2 \ldots i_\mu) + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\mu}(\nu+\sigma) + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\mu} i_\sigma,$$

oder, weil die Indices $\nu+1,\ \nu+2,\ldots\nu+\mu$ a priori gut geordnet sind, und die Reihenfolge der Indices $i_1\, i_2 \ldots i_\mu$ stets als gut geordnet vorausgesetzt werden kann:

$$\nu_1 = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\mu}(\nu+\sigma) + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\mu} i_\sigma = \mu\cdot\nu + \frac{\mu(\mu+1)}{2} + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\mu} i_\sigma = \mu\nu + k.$$

wobei
$$k = \frac{\mu(\mu+1)}{2} + \sum_1^\mu i_\sigma \text{ ist.}$$

94. Nun ist andererntheils die Determinante A dargestellt durch die Matrix:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}b_{\nu+1,1}+\cdots a_{1n}b_{\nu+1,n}, & a_{11}b_{\nu+2,1}+\cdots a_{1n}\,b_{\nu+2,n}, & \cdots, & a_{11}b_{n1}+\cdots\ a_{1n}\,b_{nn} \\ a_{21}b_{\nu+1,1}+\cdots a_{2n}\,b_{\nu+1,n}, & a_{21}b_{\nu+2,1}+\cdots a_{2n}\,b_{\nu+2,n}, & \cdots, & a_{21}b_{n1}+\cdots a_{2n}\,b_{nn} \\ a_{31}b_{\nu+1,1}+\cdots a_{3n}\,b_{\nu+1,n}, & a_{32}b_{\nu+2,1}+\cdots a_{3n}\,b_{\nu+2,n}, & \cdots, & a_{31}\,b_{n1}+\cdots a_{3n}\,b_{nn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu 1}\,b_{\nu+1,1}\cdots a_{\mu n}\,b_{\nu+1,n}, & a_{\mu 1}\,b_{\nu+2,1}\cdots a_{\mu n}\,b_{\nu+2,n}, & \cdots, & a_{\mu 1}\,b_{n1}+\cdots a_{\mu n}\,b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Setzen wir in ihr alle Elemente $b_{\nu+\sigma,\varrho}$, ausgenommen die oben erwähnten, gleich null, so reducirt sie sich auf

$$A' = \begin{vmatrix} a_{1i_1}\cdot b_{\nu+1,i_1}, & a_{1i_2}\cdot b_{\nu+2,i_2}, & a_{1i_3}\cdot b_{\nu+3,i_3}\ldots & a_{1i_\mu}\cdot b_{\nu+\mu,i_\mu} \\ a_{2i_1}\cdot b_{\nu+1,i_1}, & a_{2i_2}\cdot b_{\nu+2,i_2}, & \ldots\ldots & a_{2i_\mu}\cdot b_{\nu+\mu,i_\mu} \\ a_{3i_1}\cdot b_{\nu+1,i_1}, & a_{3i_2}\cdot b_{\nu+2,i_2} & \ldots\ldots & a_{3i_\mu}\cdot b_{\nu+\mu,i_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu i_1}\cdot b_{\nu+1,i_1}, & a_{\mu i_2}\cdot b_{\nu+2,i_2} & \ldots\ldots & a_{\mu i_\mu}\cdot b_{\nu+\mu,i_\mu} \end{vmatrix},$$

und weil die darin noch auftretenden Factoren b durchgehends gleich 1 sind, so wird endlich

$$A' = \begin{vmatrix} a_{1i_1}, & a_{1i_2}, & a_{1i_3}\ldots & a_{1i_\mu} \\ a_{2i_1}, & a_{2i_2} & \ldots & a_{2i_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu i_1}, & a_{\mu i_2} & \ldots & a_{\mu i_\mu} \end{vmatrix},$$

d. h. A reducirt sich auf eine Determinante der ersten correspondirenden Matrix, und zwar auf diejenige, deren Colonnen Indices führen, welche gerade bei Bildung der Determinante aus der zweiten Matrix nicht

benutzt werden. Tragen wir also die so berechneten Werthe für D und A in die Gleichung (5) ein, so erhalten wir:

$$(6)\qquad (-1)^{\mu\nu}\begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & a_{1i_3} \dots a_{1i_\mu} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & a_{2i_3} \dots a_{2i_\mu} \\ a_{3i_1} & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \\ a_{\mu i_1} & a_{\mu i_2} & \dots a_{\mu i_\mu} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\mu\nu+k}\cdot\lambda\begin{vmatrix} b_{1i_{\mu+1}} & b_{1i_{\mu+2}} & b_{1i_{\mu+3}} \dots b_{1i_{\mu+\nu}} \\ b_{2i_{\mu+1}} & b_{2i_{\mu+2}} & \dots b_{2i_{\mu+\nu}} \\ b_{3i_{\mu+1}} & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \\ b_{\nu i_{\mu+1}} & b_{\nu i_{\mu+2}} & \dots b_{\nu i_{\mu+\nu}} \end{vmatrix},$$

oder nach Division mit dem Factor $(-1)^{\mu\nu}$:

$$(7)\qquad (a_{1i_1}\ a_{2i_2}\cdots a_{\mu i_\mu}) = (-1)^k\cdot\lambda\cdot(b_{1i_{\mu+1}}\ b_{2i_{\mu+2}}\cdots b_{\nu i_{\mu+\nu}}),$$

wobei

$$k = \frac{\mu(\mu+1)}{2} + \sum_1^\mu i_\sigma,$$

das ist gleich der Summe aller Doppelindices des Diagonalgliedes in $(a_{1i_1}\ a_{2i_2}\dots a_{\mu i_\mu})$. Dadurch ist der aufgestellte Satz bewiesen; der Proportionalitätsfactor λ ist natürlich unbestimmt.

95. *Beispiel.* Seien gegeben die beiden Matrices, für welche $\mu = \nu = 2$ ist,

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix}.$$

Zwischen den Elementen derselben sollen die vier Relationen

$$u_x = 0,\quad u_y = 0,\quad v_x = 0,\quad v_y = 0$$

bestehen, wobei

$$u_x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4$$

zu setzen ist, und

$$u_y,\ v_x \text{ und } v_y,$$

Symbole analoger Ausdrücke sind.

Dann ist nach dem vorigen Satze:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = +\lambda\begin{vmatrix} u_3 & u_4 \\ v_3 & v_4 \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} = -\lambda\begin{vmatrix} u_2 & u_4 \\ v_2 & v_4 \end{vmatrix}, \text{ u. s. w.,}$$

oder wenn wir der Kürze halber setzen

$$p_{ik} = (x_i y_k - y_i x_k),$$

und

$$q_{ik} = (u_i v_k - v_i u_k),$$

so bestehen die sechs Relationen:

$$1)\quad p_{12} = \lambda q_{34}, \quad p_{13} = \lambda q_{42}, \quad p_{14} = \lambda q_{23},$$

$$2)\quad p_{23} = \lambda q_{14}, \quad p_{42} = \lambda q_{13}, \quad p_{34} = \lambda q_{12}.$$

Man kann die Grössen p_{ik}, resp. q_{ik} als Coordinaten der geraden Linie auffassen, welche als Schnitt der beiden Ebenen

$$u_x = 0, \quad v_x = 0$$

auftritt, und erkennt somit den Satz: Die Strahlencoordinaten p_{ik} sind proportional den Axencoordinaten q_{ik}.

Zweiter Theil.

Anwendungen der Determinantentheorie.

§ 8. Systeme linearer Gleichungen und deren Auflösung.

96. *Auflösung eines Systemes von n linearen homogenen Gleichungen mit n Unbekannten.* Die Aufgabe, ein lineares System von Gleichungen mit mehreren Unbekannten aufzulösen, war es zunächst, welche Leibnitz und Cramer auf die Determinantenrechnung führten. Betrachtet man nämlich das folgende System linearer homogener Gleichungen

$$
\text{(I)} \qquad \begin{cases}
a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 \cdots + a_{1n}\, x_n = 0 \\
a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 \cdots + a_{2n}\, x_n = 0 \\
a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 \cdots + a_{3n}\, x_n = 0 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + a_{n3}\, x_3 \cdots + a_{nn}\, x_n = 0,
\end{cases}
$$

so erkennt man, dass in demselben gerade n^2 willkürliche Grössen a_{ik} auftreten, die wir zur Matrix einer Determinante zusammensetzen können. Wir wollen sie die Determinante Δ des simultanen Systemes (I) nennen. Fragen wir uns nun nach denjenigen Werthen der Unbekannten $x_1\, x_2 \cdots x_n$, welche dieses System befriedigen, so sehen wir zunächst unmittelbar, dass durch das System von Lösungen

$$x_1 = x_2 = x_3 = \text{ u. s. w. } = x_n = 0,$$

das System der Gleichungen (I) in der That erfüllt wird. Wir nennen diese Lösung eine identische, und sehen von ihr, da sie kein weiteres Interesse erweckt, in den folgenden Betrachtungen ab.

97. *Aufsuchung anderweitiger Lösungen.* Indem wir uns nun die Aufgabe stellen, andere Lösungen des Systemes (I) zu finden, können wir auf irgend einem elementaren Wege der gewöhnlichen Eliminationsmethoden vorgehen. Am besten nach der Methode von Bézout, indem wir die Gleichungen des Systemes (I) mit solchen Factoren $\lambda_1\, \lambda_2 \cdots \lambda_n$

multipliciren, dass nach Addition der so erhaltenen Producte die Coefficienten aller Unbekannten, mit Ausnahme desjenigen von x_μ, verschwinden. Solche Factoren sind gerade die Unterdeterminanten

$$A_{1\mu},\quad A_{2\mu},\quad A_{3\mu}\ldots A_{n\mu}$$

der Elemente der μ^{ten} Colonne in der Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1\mu} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2\mu} \ldots a_{2n} \\ a_{31} & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad a_{3n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{n\mu} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir also die Gleichungen des Systemes (I) der Reihe nach mit den erwähnten Unterdeterminanten und addiren, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 (a_{11}A_{1\mu} + a_{21}A_{2\mu} \cdots a_{n1}A_{n\mu}) + x_2(a_{12}A_{1\mu} + a_{22}A_{2\mu} + \cdots a_{n2}A_{n\mu}) \\ + \cdots + x_\mu (a_{1\mu} A_{1\mu} + a_{2\mu} A_{2\mu} + \cdots a_{n\mu} A_{n\mu}) + \cdots \\ + x_n (a_{1n} A_{1\mu} + a_{2n} A_{2\mu} + \cdots a_{nn} A_{n\mu}) = 0. \end{aligned}$$

Gemäss den Relationen (C) in Nr. 32 reducirt sich diese Gleichung auf

$$\text{(II)} \qquad x_\mu \cdot \varDelta = x_\mu (a_{1\mu} A_{1\mu} + a_{2\mu} A_{2\mu} + \cdots a_{n\mu} A_{n\mu}) = 0.$$

Ist hier die Determinante $\varDelta$ von Null verschieden, so wird diese Gleichung nur befriedigt für $x_\mu = 0$, d. h. die Gleichungen des Systemes (I) haben, wenn $\varDelta \gtrless 0$, keine andere Lösung als die identische. Verschwindet dagegen die Determinante $\varDelta$, so kann dem Systeme (I) ein System von Werthen der Unbekannten genügen, und die Aufgabe ist, unter dieser Bedingung dasselbe zu ermitteln.

98. *Resultante des Systemes* (I). Man nennt die Determinante $\varDelta$ die Resultante des Systemes der linearen Gleichungen und aus dem eben Erwähnten folgt eine erste Eigenschaft derselben, dass sie nämlich verschwinden muss, sobald die Gleichungen (I) eine gemeinschaftliche Lösung haben. Umgekehrt werden wir sogleich auch eine zweite Eigenschaft derselben erkennen, dass, wenn sie verschwindet, ein gemeinschaftliches Lösungssystem wirklich vorhanden ist.

Anmerkung. Doch ist die Resultante durch diese beiden Eigenschaften nicht eindeutig definirt. Denn einerseits erkennt man aus Gleichung (II), dass wenn $x_\mu \gtrless 0$, d. h. wenn eine Lösung vorhanden, nicht nur $\varDelta$, sondern auch $\varDelta \cdot \varphi$ verschwindet, wo φ eine beliebige ganze Function der Coefficienten a_{ik}, so dass man also nicht be-



haupten kann: Jene ganze Function der Coefficienten, die beim Vorhandensein einer gemeinschaftlichen Lösung des Systemes (I) verschwindet, ist die Resultante des Systemes. Andrerseits kann man zwar nicht behaupten, dass mit $\Delta \cdot \varphi = 0$ ein Lösungssystem existirt, so lange φ eine Function der Coefficienten a_{ik}, die von Δ selbst verschieden ist. Wenn aber

$$\varphi = c, \text{ oder } \varphi = c \cdot \Delta^{\varrho},$$

d. h. also eine von Null verschiedene Constante oder eine Potenz von Δ multiplicirt mit einer solchen Constanten, dann haben die Gleichungen (I) auch eine gemeinschaftliche Lösung, wenn

$$c \cdot \Delta^{\varrho} = 0.$$

Mit andern Worten: Beide Eigenschaften selbst zusammengenommen definiren nicht bloss Δ, sondern $c \cdot \Delta$, resp. $c \cdot \Delta^{\varrho}$. Es ist aber $c \cdot \Delta^{\varrho}$ Resultante jedes Gleichungssystemes, das aus (I) hervorgeht, wenn wir die Coefficienten dieses Systemes irgendwie linear transformiren. Eine also definirte Resultante ist daher keine bestimmte lineare Function der Coefficienten speciell dieser Gleichungen.

99. *Die gemeinschaftlichen Lösungen des Systemes* (I), *wenn die Resultante verschwindet.* Wir nehmen nun im Folgenden an, dass

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

und überdies der Allgemeinheit halber, dass sämmtliche Minoren dieser Determinante von der ersten bis zur $(\mu - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung ebenfalls verschwinden. Dagegen soll von den Minoren der μ^{ten} Ordnung wenigstens einer von Null verschieden sein.

Dieser nicht verschwindende Minor μ^{ter} Ordnung sei etwa

$$D^{(\mu+1)} = \begin{vmatrix} a_{\mu+1,\mu+1} & a_{\mu+1,\mu+2} & \cdots & a_{\mu+1,n} \\ a_{\mu+2,\mu+1} & a_{\mu+2,\mu+2} & \cdots & a_{\mu+2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,\mu+1}, & a_{n,\mu+2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Wir betrachten dann zunächst das System der $(n - \mu + 1)$ letzten Gleichungen des Systemes (I) in Nr. 96

$$
\text{(III)}\begin{cases}
a_{\mu 1} x_1 + a_{\mu 2} x_2 + \cdots \quad a_{\mu,\mu} x_\mu + a_{\mu,\mu+1} x_{\mu+1} \cdots\cdots + a_{\mu n} x_n = 0 \\
a_{\mu+1,1} x_1 + a_{\mu+1,2} x_2 + \cdots a_{\mu+1,\mu} x_\mu + a_{\mu+1,\mu+1} x_{\mu+1} \cdots + a_{\mu+1,n} x_n = 0 \\
a_{\mu+2,1} x_1 + a_{\mu+2,2} x_2 + \cdots a_{\mu+2,\mu} x_\mu + a_{\mu+2,\mu+1} x_{\mu+1} \cdots + a_{\mu+2,n} x_n = 0 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
a_{n 1} x_1 + a_{n 2} x_2 + \cdots \quad a_{n\mu} x_\mu + a_{n\mu+1} x_{\mu+1} \quad \cdots + a_{nn} x_n = 0
\end{cases}
$$

Die Matrix der Coefficienten dieses Systemes ist dargestellt durch

$$
(A) \quad \left|\begin{matrix}
a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & a_{\mu 3} & \ldots & a_{\mu\mu} & a_{\mu\,\mu+1} & \ldots & a_{\mu n} \\
a_{\mu+1,1} & a_{\mu+1,2} & \ldots & \ldots & a_{\mu+1,\mu} & a_{\mu+1,\mu+1} & \ldots & a_{\mu+1,n} \\
a_{\mu+2,1} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{\mu+2,\mu} & a_{\mu+2,\mu+1} & \ldots & a_{\mu+2,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n 1} & a_{n 2} & a_{n 3} & \ldots & a_{n\mu} & a_{n,\mu+1} & \ldots & a_{nn}
\end{matrix}\right|
$$

und die sämmtlichen Determinanten dieser Matrix sind nach Voraussetzung identisch null, unter ihnen insbesondere die Determinante

$$
D^{(\mu)} = \left|\begin{matrix}
a_{\mu\mu} & a_{\mu,\mu+1} & \ldots & a_{\mu n} \\
a_{\mu+1,\mu} & a_{\mu+1,\mu+1} & \ldots & a_{\mu+1,n} \\
a_{\mu+2,\mu} & a_{\mu+2,\mu+1} & \ldots & a_{\mu+2,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n\mu} & a_{n,\mu+1} & \ldots & a_{nn}
\end{matrix}\right| = 0.
$$

Von ihren Unterdeterminanten ist wie oben vorausgesetzt, die zum Elemente $a_{\mu\mu}$ gehörige

$$A_{\mu\mu} = D^{(\mu+1)}$$

von null verschieden, während alle übrigen, also auch die den Elementen der ersten Colonne entsprechenden

$$A_{\mu+1,\mu}, \quad A_{\mu+2,\mu}, \quad A_{\mu+3,\mu} \ \ldots \ A_{n\mu}$$

beliebige Werthe, null nicht ausgeschlossen, besitzen können.

100. *Erste Folgerung aus diesen Voraussetzungen: mindestens eine Gleichung ist eine Folge der übrigen.* Multipliciren wir nun das System der Gleichungen (III) der Reihe nach durch die Unterdeterminanten der ersten Colonne von $D^{(\mu)}$

$$A_{\mu\mu}, \quad A_{\mu+1,\mu}, \quad A_{\mu+2,\mu} \ \ldots \ A_{n\mu},$$

und addiren dieselben, so erhalten wir die Gleichung

$$
\begin{aligned}
\text{(IV)} \quad (a_{\mu\mu} A_{\mu\mu} + a_{\mu+1,\mu} A_{\mu+1,\mu} \cdots + a_{n\mu} A_{n\mu}) x_1 \\
+ (a_{\mu,\mu+1} A_{\mu\mu} \cdots + a_{n,\mu+1} A_{n\mu}) x_2 + \cdots \\
+ (a_{\mu n} A_{\mu\mu} + a_{\mu+1,n} A_{\mu+1,\mu} \cdots + a_{nn} A_{n\mu}) x_n = 0.
\end{aligned}
$$

Hierin ist der Coefficient von x_1 gemäss der Voraussetzung null, alle übrigen Coefficienten verschwinden identisch, gemäss den Relationen (C) Nr. 32. Gleichung (IV) ist also eine Identität; wir können sie auch, wenn wir die Gleichungen des Systemes (III) einen Augenblick mit

$$f_\mu, \quad f_{\mu+1} \cdots f_n$$

bezeichnen, in der Form schreiben

$$\text{(V)} \qquad A_{\mu\mu} f_\mu + A_{\mu+1,\mu} + \cdots A_{n\mu} f_n = 0.$$

Aus dieser Identität schliesst man aber, dass eine der Gleichungen $f_{\mu+i}$ eine Folge aller übrigen sein muss, und zwar etwa gerade die erste des Systemes (II)

$$f_\mu = a_{\mu 1} x_1 + a_{\mu 2} x_2 \cdots + a_{\mu n} x_n = 0,$$

da sie mit einem Factor multiplicirt auftritt, von dem wir vorausgesetzt haben, dass er von Null verschieden sei.

101. *Zweite Folgerung: μ Gleichungen sind eine Folge der $n-\mu$ übrigen.* Ersetzen wir in dem Systeme (III) die Gleichung f_μ durch irgend eine der vorhergehenden Gleichungen f_i, dann ist die Matrix dieses Systemes dargestellt durch

$$(B) \qquad \left|\begin{array}{llllllll} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{i\mu} & a_{i,\mu+1} & \ldots & a_{in} \\ a_{\mu+1,1} & a_{\mu+1,2} & \ldots & \ldots & a_{\mu+1,\mu} & a_{\mu+1,\mu+1} & \ldots & a_{\mu+1,n} \\ a_{\mu+2,1} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{\mu+2,\mu} & \ldots & \ldots & a_{\mu+2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n\mu} & a_{n,\mu+1} & \ldots & a_{nn} \end{array}\right|.$$

Ihre Determinanten sind noch immer nach Voraussetzung null, während die Unterdeterminanten derselben nicht durchwegs verschwinden; insbesondere ist noch immer der Minor

$$A_{\mu\mu}$$

von Null verschieden, und daher schliessen wir ganz auf dieselbe Weise wie vorhin, dass auch f_i eine Folge der letzten $n-\mu$ Gleichungen sein muss.

Wir sind daher berechtigt, ganz allgemein den Satz aufzustellen:

> „Sind in einem Systeme homogener linearer Gleichungen sowohl die Determinante des Systemes selbst, als auch alle Unterdeterminanten bis zur $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Ordnung inclus. gleich Null, aber nicht alle der nächsthöheren Ordnung, so sind μ Gleichungen die Folge der übrigen richtig gewählten $n-\mu$ Gleichungen."

Aus diesen $n-\mu$ Gleichungen lassen sich aber die Werthe von



$n-\mu$ Variabeln x_i in Function der übrigen μ Variabeln berechnen, wie wir sogleich sehen werden.

102. *Auflösung eines Gleichungssystemes, in welchem die Zahl μ der Gleichungen kleiner ist als die Zahl n der Unbekannten. Erster Fall.* Wenn wir uns nun damit befassen, Werthsysteme x_μ aufzufinden, welche diese $n-\mu$ Gleichungen mit μ Unbekannten befriedigen, so dürfen wir zunächst die Annahme machen, dass nicht sämmtliche Determinanten der Matrix dieses Systemes von $n-\mu$ Gleichungen verschwinden. Denn würde dies eintreten, dann wäre nach dem eben Erwähnten mindestens eine derselben eine Folge der übrigen, und die Zahl der selbstständigen Gleichungen würde sich eben nur noch weiter reduciren.

Wir beginnen mit dem ersten Falle $\mu = n - 1$. Das System der $n-1$ Gleichungen mit n Unbekannten können wir dann in der Form aufstellen:

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + \cdots a_{2n}\,x_n = 0 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + \cdots a_{3n}\,x_n = 0 \\ a_{41}\,x_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad a_{4n}\,x_n = 0 \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + a_{n3}\,x_3 + \cdots a_{nn}\,x_n = 0. \end{cases}$$

Vergleichen wir alsdann dieses System von Gleichungen mit dem in Nr. 34 aufgestellten System von Identitäten

$$(D) \qquad \begin{cases} a_{21}\,p_1 + a_{22}\,p_2 + a_{23}\,p_3 \; . \; . \; . \; a_{2n}\,p_n = 0 \\ a_{31}\,p_1 + a_{32}\,p_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; a_{3n}\,p_n = 0 \\ a_{41}\,p_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; = 0 \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{n1}\,p_1 + a_{n2}\,p_2 + a_{n3}\,p_3 \; . \; . \; . \; a_{nn}\,p_n = 0, \end{cases}$$

wo die Grössen $p_1\,p_2 \ldots p_n$ nichts anderes sind als die mit wechselndem Vorzeichen genommenen Determinanten der Matrix:

$$(A) \qquad \left| \begin{matrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & \ldots & \ldots & a_{4n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{matrix} \right|,$$

so erkennt man, dass das Gleichungssystem (VI) befriedigt wird durch

$$x_i = \frac{1}{\varrho} \cdot p_i,$$

wo $\frac{1}{\varrho}$ ein beliebiger Factor und

$$p_i = (-1)^{i-1}(a_{21}\, a_{32} \ldots a_{i,i-1}\, a_{i+1,i+1} \ldots a_{nn}) \text{ ist.}$$

103. *Eindeutigkeit der erhaltenen Lösung.* Dass diese Lösung die einzige ist, welche das System (VI) zulässt, kann man durch directe Berechnung derselben erweisen. Bezeichnet man nämlich die ersten Unterdeterminanten der Determinante

$$p_n = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3,n-1} \\ a_{41} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

mit A_{ik}, wo $i > 1$, und $k < n$, dann können wir zunächst die Gleichungen (VI) mit den Minoren ihrer ersten Colonne der Reihe nach multipliciren und addiren; dies liefert, da die Coefficienten der Unbekannten x_2 bis x_{n-1} verschwinden, und da einestheils

$$(a_{21}\, A_{21} + a_{31}\, A_{31} \cdots a_{n1}\, A_{n1}) = (-1)^{n-1}\, p_n,$$

und anderntheils

$$(a_{2n}\, A_{21} + a_{3n}\, A_{31} \cdots + a_{nn}\, A_{n1}) = (-1)^{n-2}\, p_1,$$

die Gleichung

$$1) \quad p_n\, x_1 - p_1\, x_n = 0.$$

Ganz ebenso liefern die Multiplicationen mit den Minoren der zweiten, dritten ... $(n-1)^{\text{ten}}$ Colonne von p_n und die darauffolgende Addition der Reihe nach die Gleichungen

$$2) \quad p_n\, x_2 - p_2\, x_n = 0,$$
$$3) \quad p_n\, x_3 - p_3\, x_n = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(n) \quad p_n\, x_{n-1} - p_{n-1}\, x_n = 0.$$

Aus diesen (n) Gleichungen folgt zunächst, dass x_n proportional p_n ist, so dass man hat:

$$\varrho\, x_n = p_n.$$

Setzt man diesen Werth in die erhaltenen Gleichungen ein, so folgt der Reihe nach (wobei die geeigneten Vorzeichen bereits im Symbol p_i mit inbegriffen)

$$\varrho x_1 = p_1, \quad \varrho x_2 = p_2, \quad \varrho x_3 = p_3 \cdots \text{ u. s. w.},$$

also gerade die schon oben angeführten Werthe der Unbekannten. Aus



diesem direct durch Berechnung erhaltenen Resultate folgt aber, dass die gewonnene Lösung die einzig mögliche ist. — Man kann daher den Satz aufstellen:

„Ein System von $(n-1)$ homogenen linearen Gleichungen mit n Unbekannten hat, wenn die Determinanten der Matrix des Systemes nicht durchwegs verschwinden, als einziges System von Lösungen die durch die continuirliche Proportion

$$x_1 : x_2 : x_3 \cdots : x_n = A_{11} : A_{12} : A_{13} \cdots : A_{1n}$$

gegebenen Werthe von x, wenn A_{1i} die mit wechselndem Vorzeichen genommenen Determinanten der Matrix des Systemes sind.“

104. *Anwendungen. Beispiel* 1. Seien gegeben die beiden Gleichungen:

$$1)\quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$
$$2)\quad v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0,$$

dann ist nach dem erhaltenen Satze das System von Lösungen gegeben durch:

$$x_1 : x_2 : x_3 = (u_2 v_3 - v_2 u_3) : -(u_1 v_3 - v_1 u_3) : (u_1 v_2 - u_2 v_1)$$
$$= (u_2 v_3) : (u_3 v_1) : (u_1 v_2),$$

was man unmittelbar durch die gewöhnlichen Methoden der Elimination verificiren kann. Deutet man die Gleichungen 1) und 2) geometrisch, so stellen sie zwei Gerade vor, und die Aufgabe ist, ihren Schnittpunkt suchen. Man erhält die Lösung: die Coordinaten des Schnittpunktes sind proportional den Determinanten der Liniencoordinaten beider Geraden, oder (vergleiche auch den Satz über correspondirende Matrices und Beispiel Nr. 95) die Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

sind proportional den correspondirenden Determinanten der Matrix

$$| \, x_1, \quad x_2, \quad x_3 \, | .$$

Beispiel 2. Seien ferner gegeben die drei Gleichungen

$$1)\quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$
$$2)\quad v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4 = 0,$$
$$3)\quad w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + w_4 x_4 = 0.$$

Das gemeinschaftliche System der Lösungen ist dargestellt durch die Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix},$$

die wir bezeichnen mit

$$A_{11} = (u_2\, v_3\, w_4)\,, \quad A_{12} = -\,(u_1\, v_3\, w_4)\,, \quad A_{13} = (u_1\, v_2\, w_4)\,,$$
$$A_{14} = -\,(u_1\, v_2\, w_3);$$

daher sind die Coordinaten des Schnittpunktes der drei Ebenen 1), 2), 3) dargestellt durch

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : = A_{11} : A_{12} : A_{13} : A_{14}\,,$$

wodurch abermals der Satz über correspondirende Matrices verificirt ist.

105. *Zweiter Fall. Die Zahl μ der Gleichungen ist um mehr als 1 kleiner als die Zahl n der Unbekannten.* Gehen wir nun zum allgemeinen Falle über, in welchem

$$n > \mu + 1,$$

so treten uns sofort zwei Fragen entgegen; nämlich: 1) Wie findet man Lösungen überhaupt? 2) Welches ist die allgemeinste Lösung eines solchen Systemes von homogenen Gleichungen? Wir beantworten zunächst die erste Frage, und nehmen dabei an, dass das System von Gleichungen die Form habe

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 + \cdots a_{1n}\ x_n = 0 \\ a_{21}\ x_2 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 + \cdots a_{2n}\ x_n = 0 \\ a_{31}\ x_3 + a_{32}\ x_2\ \ .\ .\ .\ .\ .\ \ a_{3n}\ x_n = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{\mu 1}\ x_1 + a_{\mu 2} x_2 + a_{\mu 3} + x_3 + \cdots a_{\mu n}\ x_n = 0, \end{cases}$$

$$\mu + 1 < n\,, \text{ oder}$$
$$n - \mu = \nu > 1\,.$$

Man kann nun eine Reihe von Lösungen dadurch finden, dass man eine Anzahl der Variabeln von vornherein gleich null setzt, etwa so viele, dass in den μ Gleichungen noch $\mu + 1$ Unbekannte auftreten. Löst man dieselben hierauf nach der in Nr. 102 und 103 gegebenen Methode auf, so erhält man in Verbindung mit den Variabeln, deren Werthe null sind, ein erstes Werthsystem, das die Gleichungen (I) befriedigt. Setzt man nun andere $n - (\mu + 1)$ Unbekannte gleich null, so erhält man auf dieselbe Weise ein zweites System von Werthen, das vom ersten im Allgemeinen verschieden ist. Wir

können uns so eine ganze Reihe von Werthsystemen verschaffen, und nehmen an, wir hätten ν von einander unabhängige Lösungen bereits gefunden, welche der Reihe nach durch die ν Zeilen der folgenden Matrix

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & \ldots & b_{2n} \\ b_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\nu 1} & b_{\nu 2} & b_{\nu 3} & \ldots & \ldots & b_{\nu n} \end{vmatrix}$$

dargestellt sein sollen. Tragen wir der Reihe nach diese ν Werthsysteme in (I) ein, so erhalten wir $\mu \cdot \nu$ Identitäten von der Form

$$(\text{II})\qquad c_{ik} = a_{i1}\, b_{k1} + a_{i2}\, b_{k2} + a_{i3}\, b_{k3} \cdots + a_{in}\, b_{kn} = 0,$$

wo i die Werthe von 1 bis μ, und k die Werthe von 1 bis ν annehmen kann. Vermöge dieser Gleichungen (II) sind die Elemente der Matrix (2) mit denen der Matrix des Systemes (I)

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & a_{\mu 3} & a_{\mu 4} & \ldots & a_{\mu n} \end{vmatrix}$$

in eine Beziehung gesetzt, welche die beiden Matrices (1) und (2) als correspondirende erscheinen lässt. (Vergleiche Nr. 94.)

106. *Zweiter Beweis des Satzes über correspondirende Matrices.* Wenn wir nun im Gleichungssystem (I) Nr. 105 setzen:

$$x_\mu = l x_\mu,\; x_{\mu+1} = l x_{\mu+1},\; x_{\mu+2} = l x_{\mu+2} \cdots x_n = l x_n,$$

wo l den Werth 1 besitzt, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
&a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots a_{1,\mu-1}\, x_{\mu-1} + l(a_{1\mu}\, x_\mu + a_{1,\mu+1}\, x_{\mu+1} + \cdots a_{1n}\, x_n) = 0 \\
&a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots a_{2,\mu-1}\, x_{\mu-1} + l(a_{2\mu}\, x_\mu + \cdots\cdots a_{2n}\, x_n) = 0 \\
&a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + \cdots\cdots + l(a_{3\mu}\, x_\mu + \cdots\cdots a_{3n}\, x_n) = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_{\mu 1} x_1 + a_{\mu 2} x_2 + \cdots\cdots + l(a_{\mu\mu}\, x_\mu + \cdots\cdots a_{\mu n}\, x_n) = 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen, μ an der Zahl, sind homogen in den μ Variabeln

$$x_1\, x_2\, x_3 \cdots x_{\mu-1},\, l;$$

sollen sie also ein gemeinschaftliches System von Lösungen besitzen, so muss ihre Resultante verschwinden, d. h. es muss sein:

$$\text{(III)} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1,\mu-1}, & a_{1\mu}\, x_\mu + a_{1,\mu+1}\, x_{\mu+1} + \cdots a_{1n}\, x_n \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2,\mu-1}, & a_{2\mu}\, x_\mu + a_{2,\mu+1}\, x_{\mu+1} + \cdots a_{2n}\, a_n \\ a_{31} & a_{32} \cdots a_{3,\mu-1}, & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} \cdots a_{\mu,\mu-1}, & a_{\mu\mu}\, x_\mu + a_{\mu,\mu+1}\, x_{\mu+1} + \cdots a_{\mu n}\, x_n \end{vmatrix} = 0.$$

Da in dieser Resultante die letzte Colonne eine Summe von $n - \mu + 1$ Gliedern ist, so können wir dieselbe nach dem Additionsgesetze (vergl. Nr. 35 und 36) für Determinanten in die Summe zerlegen:

$$\sum_{k=0}^{k=n-\mu} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,\mu-1} & a_{1,\mu+k} \cdot x_{\mu+k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,\mu-1} & a_{2,\mu+k} \cdot x_{\mu+k} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu,\mu-1} & a_{\mu,\mu+k} \cdot x_{\mu+k} \end{vmatrix} = 0.$$

Weil aber die letzte Colonne jeder Determinante dieser Summe mit $x_{\mu+k}$ multiplicirt ist, so können wir diese Entwicklung der Resultante unter Einführung der Bezeichnung

$$A_{\mu+k} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,\mu-1}, & a_{1,\mu+k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2,\mu-1}, & a_{2,\mu+k} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & \cdots & a_{\mu,\mu-1}, & a_{\mu,\mu+k} \end{vmatrix}$$

auch darstellen in der Form:

$$\text{(III}_a\text{)} \quad \sum_{k=0}^{k=n-\mu} A_{\mu+k}\, x_{\mu+k} = A_\mu\, x_\mu + A_{\mu+1}\, x_{\mu+1} + A_{\mu+2}\, x_{\mu+2} + \cdots + A_n\, x_n = 0.$$

Diese Gleichung (III$_a$) muss wie das System von Gleichungen (I) für die ν Werthsysteme bestehen, welche durch die Zeilen der Matrix (1) repräsentirt sind. Es folgen daher aus (III$_a$) die ν Relationen:

$$\begin{aligned} A_\mu\, b_{1\mu} + A_{\mu+1}\, b_{1\mu+1} + \cdots A_n\, b_{1n} &= 0 \\ A_\mu\, b_{2\mu} + A_{\mu+1}\, b_{2\mu+1} + \cdots A_n\, b_{2n} &= 0 \\ A_\mu\, b_{3\mu} + A_{\mu+1}\, b_{3\mu+1} + \cdots A_n\, b_{3n} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_\mu\, b_{\nu\mu} + A_{\mu+1}\, b_{\nu\mu+1} + \cdots A_n\, b_{\nu n} &= 0. \end{aligned}$$

Betrachtet man in diesen Relationen die $\nu + 1$ Grössen

$$A_\mu, \quad A_{\mu+1}, \ldots A_n$$

als Unbekannte und eliminirt dieselben, so erhält man nach Nr. 103:

$$(A) \qquad \begin{aligned} \varrho A_\mu \quad &= B_\mu \\ \varrho A_{\mu+1} &= B_{\mu+1} \\ \varrho A_{\mu+2} &= B_{\mu+2} \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \varrho A_n \quad &= B_n. \end{aligned}$$

Dabei sind die Grössen $B_{\mu+k}$ (inclus. Vorzeichen) Determinanten der Matrix (1), und zwar ist $B_{\mu+k}$ dadurch entstanden, dass man die $n - 1$ ersten und überdies die $n + k^{te}$ Colonne in derselben unterdrückt hat, während die Grösse $A_{\mu+k}$ aus Matrix (2) gerade durch die hier unterdrückten Colonnen gebildet ist. Die Colonnen entsprechender Grössen A und B bilden also gerade eine Permutation der Zahlen

$$1, 2, 3 \ldots n;$$

ihr Vorzeichen entspricht der Anzahl der Derangements dieser Permutation, wie man aus den Beziehungen (A) erkennt, in denen die Determinanten $A_{\mu+i}$ stets positiv, die Determinanten $B_{\mu+i}$ aber mit wechselndem Vorzeichen der Reihe nach zu nehmen sind. Die Determinanten

$$A_{\mu+k} \text{ und } B_{\mu+k}$$

sind also correspondirende Determinanten gemäss unserer Definition in Nr. 90.

Hätte man statt der $\nu + 1$ Unbekannten

$$x_\mu, x_{\mu+1} \ldots x_n$$

andere des Systems (I) mit dem Factor l multiplicirt und die übrigen auf die angegebene Weise eliminirt, so wäre man geradeso auf eine zweite Reihe von Relationen (A) gekommen, so dass man erkennt: Alle correspondirenden Determinanten beider correspondirender Matrices sind einander proportional, wie wir auch früher bereits bewiesen haben.

107. *Allgemeinste Lösung des Systemes* (I) *homogener linearer Gleichungen.* Nehmen wir nun an, die allgemeinste Lösung des Systemes (I) in Nr. 105 sei gefunden, und zwar soll das Werthsystem der n Variabeln dargestellt sein durch Werthe:

$$b_1, b_2, b_3 \ldots b_n.$$

Tragen wir diese Werthe in die Gleichungen (II) Nr. 105 ein, so müssen dieselben befriedigt werden. Es ist also auch die Matrix

(3)
$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{vmatrix},$$

die aus der Matrix (1) hervorgeht, indem man in ihr die letzte Zeile ersetzt durch die Elemente

$$b_1\ b_2\ \dots\ b_n,$$

eine correspondirende Matrix mit Matrix (2), und ihre Determinanten sind proportional den correspondirenden der Matrix (2). Daher sind sie auch proportional den entsprechenden, d. h. den aus gleichen Colonnen gebildeten Determinanten der Matrix (1).

108. Erweitern wir also diese Matrix (1) durch Anfügung der Zeile

$$b_1\ b_2\ b_2\ \dots\ b_n$$

zur Matrix

(4)
$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\nu 1} & b_{\nu 2} & b_{\nu 3} & \dots & b_{\nu n} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

und entnehmen aus dieser Matrix irgend eine Determinante, etwa

$$D = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,\nu+1} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,\nu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\nu 1} & b_{\nu 2} & \dots & b_{\nu,\nu+1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{\nu+1} \end{vmatrix},$$

so sind in dieser Determinante die Minoren der ν^{ten} Zeile proportional den entsprechenden Minoren der $\nu + 1^{\text{ten}}$ Zeile.

Es verhält sich:

$$B_{\nu 1} : B_{\nu 2} : B_{\nu 3} \dots B_{\nu,\nu+1} = B_{\nu+1,1} : B_{\nu+1,2} : B_{\nu+1,3} \dots B_{\nu+1,\nu+1}.$$

Folglich ist:

$$B_{\nu+1,i}\, B_{\nu k} - B_{\nu+1,k}\, B_{\nu i} = 0.$$

Nach den Lehrsätzen über adjungirte Determinanten und deren Minoren ist aber (vergl. Nr. 88)

$$\begin{vmatrix} B_{\nu i} & B_{\nu k} \\ B_{\nu+1,i} & B_{\nu+1,k} \end{vmatrix} = D \cdot B_{\substack{\nu,\nu+1 \\ i\ \ k}} = 0, \begin{cases} i = 1 \cdots n-1 \\ k = 2 \cdots n \end{cases},$$

wo

$$B_{\substack{\nu,\nu+1 \\ i\ k}}$$

jede Determinante sein kann, die sich aus den $\nu - 1$ ersten Zeilen von D bilden lässt. Nehmen wir nun auch an

$$B_{\substack{\nu,\nu+1 \\ i\ \ k}} = 0,$$

so folgt immer auch $D = 0$, da eine Determinante verschwinden muss, wenn alle ihre Minoren zweiter Ordnung verschwinden, nach welchen sie man ja hätte entwickeln können. In derselben Weise aber, wie wir gefunden haben $D = 0$, können wir auch schliessen, dass überhaupt jede Determinante der Matrix (4) verschwinden muss. Daraus folgt, dass es immer Werthe λ_i giebt, so beschaffen, dass

$$\begin{aligned} b_1 &= \lambda_1 b_{11} + \lambda_2 b_{21} + \lambda_3 b_{31} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \lambda_\nu b_{\nu 1} \\ b_2 &= \lambda_1 b_{12} + \lambda_2 b_{22} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \lambda_\nu b_{\nu 2} \\ b_3 &= \lambda_1 b_{13} + \lambda_2 b_{23} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \lambda_\nu b_{\nu 3} \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ b_n &= \lambda_1 b_{1n} + \lambda_2 b_{2n} + \lambda_3 b_{3n} + \cdot \cdot \cdot \lambda_\nu b_{\nu n}. \end{aligned}$$

Denn tragen wir diese Werthe für b_i in irgend eine der Determinanten D ein, so ist dieselbe Null, gemäss den Sätzen in Nr. 35 bis 39.

Wir haben also den Satz gewonnen: „Sind die Zeilen der Matrix (2) ν beliebige von einander linear unabhängige Lösungen, so ist die allgemeinste Lösung des Systemes von Gleichungen (I) eine lineare Function derselben.“

109. *Beispiel.* Es seien gegeben zwei Gleichungen mit vier Unbekannten, also

$$n = 4, \quad \mu = 2, \quad \nu = 2,$$

etwa das System

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_3 x_4 &= 0 \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass sie befriedigt werden einmal durch das System von speciellen Werthen

$$x_1\ x_2\ x_3\ x_4,$$

dann aber auch durch das System von Werthen

$$y_1\ y_2\ y_3\ y_4.$$

Während also die Matrix der Coefficienten des gegebenen Gleichungssystemes dargestellt ist durch

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix},$$

ist die Matrix der beiden speciellen Werthsysteme, für welche die Gleichungen (I) bestehen sollen, gegeben durch

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix},$$

sodass ausser den Relationen (I) auch noch die Relationen

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{aligned} u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4 &= 0 \\ v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + v_4 y_4 &= 0 \end{aligned}$$

vorhanden sind. Setzen wir dann im System (I)

$$x_2 = lx_2, \quad x_3 = lx_3, \quad x_4 = lx_4, \quad \text{wo } l = 1,$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} u_1 x_1 + l(u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4) &= 0 \\ v_1 x_1 + l(v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4) &= 0. \end{aligned}$$

Die Resultante dieser Gleichung muss verschwinden, wenn Werthe x_1 und l vorhanden sein sollen, für welche sie bestehen; d. h. es muss sein:

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 \\ v_1 & v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnet man die Determinanten der Matrix (1) mit q_{ik}, so dass

$$q_{ik} = u_i v_k - v_i u_k,$$

und setzt man ebenso die Determinanten der Matrix (2)

$$p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k,$$

so liefert die Gleichung (III) nach den Unbekannten geordnet:

$$(\mathrm{III^a})\qquad x_2\, q_{12} + x_3\, q_{13} + x_4\, q_{14} = 0,$$

und ebenso folgt

$$y_1\, q_{11} + y_3\, q_{13} + y_4\, q_{14} = 0,$$

wenn wir mit dem System (II) ebenso verfahren, wie mit (I). Löst man diese Gleichungen nach den Determinanten q_{ik} auf, so kommt:

$$\begin{aligned} \varrho \cdot q_{12} &= p_{34} \\ \varrho \cdot q_{13} &= p_{42} \\ \varrho \cdot q_{14} &= p_{23}. \end{aligned}$$

Ganz ebenso folgt aber, indem wir etwa $x_1 = lx_1$, $x_3 = lx_3$, $x_4 = lx_4$ setzen, und entsprechend die Unbekannten $y_1 = ly_1$ u. s. w.,

$$\varrho \cdot q_{23} = p_{14}, \; \varrho \cdot q_{42} = p_{13}, \; \varrho \cdot q_{34} = p_{14}.$$

Dadurch ist zunächst die Proportionalität correspondirender Determinanten der beiden Matrices (1) und (2) nachgewiesen, wie wir sie schon in Nr. 95 erkannt haben.

110. Suchen wir nun die allgemeinste Lösung der beiden Gleichungen (I); sie sei gegeben durch

$$z_1 \; z_2 \; z_3 \; z_4.$$

Wir bilden die Matrix

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_2 & x_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix},$$

deren Determinanten dargestellt sein mögen durch

$$\bar{p}_{ik} = x_i \, z_k - z_i \, x_k.$$

Dann bestehen auch die Gleichungen:

$$\sigma \cdot q_{12} = \bar{p}_{34}, \; \sigma \cdot q_{13} = \bar{p}_{42}, \; \sigma \cdot q_{14} = \bar{p}_{23}$$

$$\sigma \cdot q_{23} = \bar{p}_{14}, \; \sigma \cdot q_{42} = \bar{p}_{13}, \; \sigma \cdot q_{34} = \bar{p}_{14},$$

und folglich wenn wir setzen $\frac{\sigma}{\varrho} = \tau$:

$$\tau \cdot p_{ik} = \bar{p}_{ik}.$$

Betrachten wir daher die Matrix

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

und in dieser wiederum die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

dann ist

$$\tau \cdot p_{12} = \bar{p}_{12}, \; \tau \cdot p_{13} = \bar{p}_{13}, \; \tau \cdot p_{23} = \bar{p}_{23}$$

oder

$$\tau \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \; \tau \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}, \; \tau \cdot \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

und folglich:

$$x_1 D = 0, \; x_2 D = 0, \; x_3 D = 0,$$

d. h. $D = 0$. Das Nämliche folgt für die drei andern Determinanten

der Matrix (4). Folglich giebt es Werthe λ und μ, so dass die allgemeinste Lösung des Gleichungssystems (I) dargestellt ist durch:

$$(B) \qquad \begin{aligned} z_1 &= \lambda x_1 + \mu y_1, & z_2 &= \lambda x_2 + \mu y_2 \\ z_3 &= \lambda x_3 + \mu y_3, & z_4 &= \lambda x_4 + \mu y_4. \end{aligned}$$

Betrachtet man die Gleichungen (I) als die Gleichungen zweier Ebenen, und sind (x_i) und (y_i) zwei Punkte, welche in beiden gleichzeitig liegen, so liegt jeder andere Punkt der beiden Ebenen gemeinschaftlich auf der Verbindungslinie der beiden Punkte, eine Gerade, die in der That durch die vier Gleichungen (B) dargestellt ist.

111. *Auflösung eines Systems nicht homogener linearer Gleichungen.* Die Aufgabe, ein System von Gleichungen zu lösen, die nicht homogen sind, lässt sich auf die Auflösung eines Systems von homogenen Gleichungen zurückführen. Wir behandeln daher nur den Fall, der zunächst von Interesse ist, nämlich die Auflösung von n nicht homogenen Gleichungen mit n Unbekannten. Sie seien:

$$\begin{aligned} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 + \cdots a_{1n} y_n + a_{1,n+1} &= 0 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 + \cdots a_{2n} y_n + a_{2,n+1} &= 0 \\ a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3 + \cdots a_{3n} y_n + a_{3,n+1} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + a_{n3} y_3 + \cdots a_{nn} y_n + a_{n,n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Wir können dieselben in zweierlei Weise homogen machen, entweder, indem wir setzen

$$y_k = \frac{x_k}{x_{n+1}},$$

und mit x_{n+1} jede Gleichung multipliciren, oder, indem wir den Coefficienten 1 der Absolutglieder als $n + 1^{\text{te}}$ Unbekannte x_{n+1} betrachten.

Beide Male erhalten wir n homogene Gleichungen mit $n + 1$ Unbekannten. Da die Matrix des gegebenen Gleichungssystems dargestellt ist durch

$$\left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ a_{31} & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & a_{3,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdot & \cdot & a_{nn+1} \end{matrix} \right|,$$

so erhalten wir als einziges Werthsystem, das die Gleichungen befriedigt, gemäss den Entwicklungen in Nr. 103

$$p_{n+1} x_1 = p_1 x_{n+1}, \; p_{n+1} x_2 = p_2 x_{n+1}, \; \dots \; p_{n+1} x_n = p_n x_{n+1},$$

oder weil

$$\frac{x_k}{x_{n+1}} = y,$$

$$y_1 = \frac{p_1}{p_{n+1}}, \quad y_2 = \frac{p_2}{p_{n+1}}, \ldots y_n = \frac{p_n}{p_{n+1}},$$

wobei die Grössen p_i die mit wechselndem Zeichen genommenen Determinanten der Matrix sind, welche man erhält, indem man in dieser Matrix die i^{te} Colonne unterdrückt.

112. *Discussion der Lösung.* Ist die Determinante $p_{n+1} \gtrless 0$, so besitzen die Unbekannten $y_1\ y_2 \ldots y_n$ endliche und bestimmte Werthe, für welche die Gleichungen zusammen bestehen können. Ist dagegen $p_{n+1} = 0$, ohne dass sämmtliche übrige Determinanten verschwinden, so ergeben sich die Lösungen durchweg in der Form

$$0 \cdot y_i = p_i;$$

da es aber keinen endlichen Werth von y_i giebt, der diese Relation befriedigen kann, so müssen die Gleichungen unvereinbar sein. Sind endlich ausser p_{n+1} auch die übrigen Grössen $p_i = 0$, dann erscheinen die Werthe der Unbekannten in der unbestimmten Form

$$0 \cdot y = 0.$$

Nun sahen wir aber in Nr. 100, dass in diesem Falle, wo sämmtliche Determinanten der Matrix verschwinden, zum mindesten eine Gleichung eine Folge der $n - 1$ übrigen ist.

Es giebt dann unendlich viele Werthsysteme y_i, welche zwar alle n Gleichungen befriedigen, die aber schon durch die $n - 1$ übrigen Gleichungen bestimmt sind.

113. *Beispiel* 1. In den Gleichungen:

$$3x + 7y - 26 = 0$$
$$2x - y - 6 = 0,$$

deren Matrix dargestellt ist durch

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -26 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix},$$

ist die Determinante

$$p_1 = \begin{vmatrix} 7 & -26 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = -68$$

$$p_2 = -\begin{vmatrix} 3 & -26 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -34$$

$$p_3 = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -17,$$

also:

$$x = \frac{p_1}{p_3} = 4; \quad y = \frac{p_2}{p_3} = +2.$$

2. Die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 4z - 3y - 2x - 7 &= 0 \\ 7x - 4y - 1 &= 0 \\ 4z - 9x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

haben als Matrix

$$\left| \begin{matrix} 4 & -3 & -2 & -7 \\ 0 & -4 & +7 & -1 \\ 4 & 0 & -9 & -1 \end{matrix} \right| .$$

Deren Determinanten besitzen die Werthe:

$$p_1 = \left| \begin{matrix} -3 & -2 & -7 \\ -4 & 7 & -1 \\ 0 & -9 & -1 \end{matrix} \right|, \quad p_2 = - \left| \begin{matrix} 4 & -2 & -7 \\ 0 & 7 & -1 \\ 4 & -9 & -1 \end{matrix} \right|,$$

$$p_3 = \left| \begin{matrix} 4 & -3 & -7 \\ 0 & -4 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{matrix} \right|, \quad p_4 = - \left| \begin{matrix} 4 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & -7 \\ 4 & 0 & -9 \end{matrix} \right|,$$

also:

$$p_1 = -196, \quad p_2 = -140, \quad p_3 = -84, \quad p_4 = -28.$$

Daher:

$$z = 7, \quad y = 5, \quad x = 3.$$

3. In den beiden folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} 6x - 15y - 7 &= 0 \\ -14x + 35y + 3 &= 0, \end{aligned}$$

deren Matrix

$$\left| \begin{matrix} 6 & -15 & -7 \\ -14 & 35 & 3 \end{matrix} \right|$$

ist, wird $p_3 = 0$, während $p_1 = 200$ und $p_2 = -80$ ist; die Unbekannten stellen sich also in der Form $0 \cdot x = 200$, $0 \cdot y = 80$, es sind also beide Gleichungen unvereinbar. In der That, dividirt man die erste Gleichung mit 3, die zweite mit -7, so kommt

$$2x - 5y = \frac{7}{3}$$

$$2x - 5y = \frac{3}{7},$$

woraus man erkennt, dass beide Gleichungen sich widersprechen.

4. Dagegen ist in dem System von Gleichungen

$$\begin{aligned} 3x_3 - 4x_1 - 2 &= 0 \\ 4x_2 + 5x_3 - 1 &= 0 \\ 20x_1 + 12x_2 - 7 &= 0, \end{aligned}$$

deren Matrix

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \\ 20 & 12 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

ist,

$$p_4 = -\begin{vmatrix} 20 & 12 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

ebenso

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0.$$

Es ist also eine der drei Gleichungen eine Folge der zwei andern, etwa die dritte eine Folge der beiden ersten. Daher wird das Werthsystem, das alle drei Gleichungen befriedigt, bereits durch Auflösung der beiden ersten Gleichungen gefunden, indem wir die Gleichungen zuerst mit x_4 homogen machen, und dann nach dem bereits in Nr. 109 gegebenen Beispiele verfahren.

§ 9. Functionaldeterminanten.

114. *Definition der Functionaldeterminante.* Eine zweite Reihe von Anwendungen der Lehre von den Determinanten eröffnet sich beim Studium der Eigenschaften gewisser Determinanten, die bereits von Jacobi aufgestellt und in einer Abhandlung „de determinantibus functionalibus" untersucht wurden. Bei der grossen Bedeutung derselben auf allen Gebieten der Algebra wurden sie bis in die neueste Zeit herein zum Gegenstand zahlreicher Forschungen gemacht, von denen wir im Folgenden die wichtigsten Resultate besprechen werden. Insbesondere aber werden wir uns damit beschäftigen, gewisse Aehnlichkeiten derselben mit Brüchen eingehender zu untersuchen.

Es seien gegeben n Functionen

$$y_1\ y_2 \cdots y_n,$$

deren jede von n Variabeln

$$x_1\ x_2 \ldots x_n$$

abhängig ist; etwa

$$y_2 = f_1(x_1\ x_2 \ldots x_n), \quad y_2 = f_2(x_1\ x_2 \ldots x_n), \cdots y_n = f_n(x_1\ x_2 \ldots x_n).$$

Man nennt alsdann die Grössen x_i die unabhängigen Veränderlichen, im Gegensatz zu den abhängigen Grössen y_i.

Aus den sämmtlichen n^2 ersten partiellen Differentialquotienten dieser Functionen y_i nach den n unabhängigen Veränderlichen x_i können wir eine Determinante

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \frac{\partial y_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

bilden, und diese Determinante bezeichnet man nach Jacobi mit dem Namen: Functionaldeterminante des Systems der Functionen. Wir werden uns im Folgenden einer kürzeren Schreibweise derselben bedienen, indem wir setzen

$$R = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \cdots & y_n \\ x_1 & x_2 & x_3 \ldots & x_n \end{pmatrix},$$

wobei also die untere Reihe stets jene Veränderlichen enthält, nach welchen jede Grösse der oberen Reihe als partiell differenzirt gedacht werden muss. Späterhin werden wir öfters die obere Reihe als Zähler, die untere Reihe als Nenner von R bezeichnen.

115. *Die Functionaldeterminante ist eine alternirende Function.* Aus der Definition der Functionaldeterminante erkennt man unmittelbar einmal, dass dieselbe ihr Zeichen ändert, sobald man y_i mit y_k vertauscht, dann aber auch, dass sie ihr Zeichen ändert bei Vertauschung zweier Veränderlicher x_i und x_k. Denn dadurch gehen nur zwei Zeilen, resp. zwei Colonnen in einander über. In unserer abgekürzten Bezeichnungsweise ist also z. B.

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_2 & y_1 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_4 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}.$$

116. *Darstellung der Minoren der Functionaldeterminante.* Wir wissen (vgl. Nr. 21 und 26), dass der Minor des Elementes a_{ik} einer Determinante gegeben ist durch

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}(a_{11}\, a_{22} \ldots a_{i-1,i-1}\; a_{i+1,i}\, a_{i+2,i+1} \ldots a_{k,k-1}\, a_{k+1,k+1} \ldots a_{nn}).$$

Daher ist der Minor des Elementes

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$$

hier symbolisch dargestellt durch

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \cdots y_{i-1}, & y_{i+1} \cdots y_n \\ x_1 & x_2 \ldots x_{k-1}, & x_{k+1} \ldots x_n \end{pmatrix}, \tag{1}$$

in welchem einmal alle partiellen Differentialquotienten nach x_k, dann

aber auch jene von y_i nach $x_1\ x_2 \dots x_n$ fehlen. Wir können indess diesen Minor auch in folgender Form schreiben:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{i-1} & x_k & y_{i+1} & \dots & y_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{k-1} & x_k & x_{k+1} & \dots & x_n \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Denn in dieser Functionaldeterminante treten auch die partiellen Differentialquotienten von x_k nach $x_1,\ x_2 \dots x_n$ genommen auf, die aber alle bis auf

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_k} = 1$$

verschwinden. Es sind also in derselben alle Elemente der i^{ten} Colonne bis auf das k^{te} Element, das den Werth 1 besitzt, null, so dass sich die in (2) dargestellte Determinante auf A_{ik} reducirt.

Ganz ebenso kann man einen Minor zweiter Ordnung von R etwa bezeichnen durch

$$A_{\substack{i\,r \\ k\,s}} = (-1)^{\nu} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{i-1} & x_k & y_{i+1} & \dots & y_{r-1} & x_s & y_{r+1} & \dots & y_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{k-1} & x_k & x_{k+1} & \dots & x_{s-1} & x_s & x_{s+1} & \dots & x_n \end{pmatrix},$$

wo

$$\nu = i + k + r + s,$$

und analog den Minor ϱ^{ter} Ordnung von R. Bei der Art unserer Bezeichnungsweise für eine Functionaldeterminante können wir also sagen:

„Lässt man in dem Symbole

$$R = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

zwei übereinanderstehende Grössen weg, so stellt der Rest einen Minor erster Ordnung von R dar, und ferner: Sind in einer Functionaldeterminante zwei übereinanderstehende Grössen gleich, so kann man sie auch weglassen."

117. *Productsatz für Functionaldeterminanten.* Stellen wir uns nun vor, dass auch n Grössen z_i gegeben seien, deren jede wiederum von allen Grössen y_i abhängig ist, etwa:

$$z_1 = \varphi_1(y_1\, y_2 \dots y_n),\quad z_2 = \varphi_2(y_1\, y_2 \dots y_n),\quad \dots\ z_n = \varphi_n(y_1\, y_2 \dots y_n).$$

Diese n Functionen z_i besitzen eine Functionaldeterminante

$$R' = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \frac{\partial z_1}{\partial y_3} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} & \frac{\partial z_2}{\partial y_3} & \dots & \frac{\partial z_2}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial z_n}{\partial y_1} & \frac{\partial z_n}{\partial y_2} & \frac{\partial z_n}{\partial y_3} & \dots & \frac{\partial z_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \end{pmatrix}.$$

Denken wir uns nun aber in diese Functionen $z_i = \varphi_i(y)$ die Werthe von $y_k = f_k(x)$ eingetragen, so können wir auch noch eine zweite Functionaldeterminante der Functionen z_i

$$R' = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \frac{\partial z_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial z_n}{\partial x_1} & \frac{\partial z_n}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \ldots & z_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$$

bilden, und man kann leicht zeigen: Die Functionaldeterminante des Systems der Grössen z_i als Functionen von x gedacht, ist gleich dem Producte der Functionaldeterminante, welche zu den Systemen

$$y_i = f_i(x)$$

und

$$z_i = \varphi_i(y)$$

gehören; oder symbolisch

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \ldots & z_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \end{pmatrix}.$$

In der That, bildet man das Product der beiden Determinanten R und R', so erhält man (wenn man vorher noch die Determinante R transponirt)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial z_n}{\partial y_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \cdots & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_1} + \cdots \frac{\partial z_1}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial z_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \frac{\partial z_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_n} + \cdots \frac{\partial z_1}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial z_2}{\partial y^n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial z_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \cdots \frac{\partial z_2}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial z_n}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_n}{\partial y_2}\frac{\partial y_n}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial z_n}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial z_n}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_n}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_n} + \cdots \frac{\partial z_n}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Die Elemente der Determinante rechts sind aber nichts anderes als die partiellen Differentialquotienten der Function z_i, wenn man sich

in denselben die Veränderlichen y_i durch ihre Functionen $f_1(x)$ ersetzt denkt; denn nach den Regeln der Differentialrechnung ist

$$(2) \qquad \frac{\partial z_k}{\partial x_i} = \frac{\partial z_k}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial z_k}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \frac{\partial z_k}{\partial y_3} \cdot \frac{\partial y_3}{\partial x_i} + \cdots \frac{\partial z_k}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_i}.$$

Damit ist aber der aufgestellte Satz bewiesen.

118. *Specieller Fall* $z_i = x_i$. Sind die Functionen z_i nichts anderes als die inversen Functionen von $y_i = f_i(x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_n)$, also $z_i = \varphi(y_1\ y_2 \ldots y_n)$ mit x_i übereinstimmend, dann ist

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_k} = \frac{\partial x_k}{\partial x_k} = 1, \text{ und } \frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = 0 \ (i \gtrless k),$$

demnach auch die Functionaldeterminante

$$\begin{pmatrix} z_1\ z_2\ z_3 \ldots z_n \\ x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_n \\ x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_n \end{pmatrix} = 1.$$

Die Relation (1) in Nr. 117 geht alsdann über in

$$\begin{pmatrix} y_1\ y_2\ y_3 \ldots y_n \\ x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_n \\ y_1\ y_2\ y_3 \ldots y_n \end{pmatrix} = 1.$$

119. *Berechnung der Differentialquotienten* $\frac{\partial x_i}{\partial y_k}$. In dem zweiten Factor der letzten Gleichung treten die Differentialquotienten $\frac{\partial x_i}{\partial y_k}$ auf, deren Werthe wir uns auf zwei verschiedenen Wegen verschaffen können. Einmal, indem wir uns in der inversen Function $x_i = \varphi_i(y)$ die Veränderlichen y durch die Functionen in x_k ersetzt denken, und diese inverse Function nach x_k differentiiren. Wir erhalten dann die n^2 Relationen

$$(1) \qquad \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x_i}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial x_i}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \cdots \frac{\partial x_i}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_k} = 1 \text{ oder } 0,$$

je nachdem $i = k$, oder i von k verschieden ist. Aus diesen kann man n Gleichungen herausgreifen und für die n Unbekannten $\frac{\partial x_i}{\partial y_k}$ die Werthe aus ihnen berechnen. Rascher gelangen wir aber auf folgendem Wege zum Ziele. Wir können $\frac{\partial x_i}{\partial y_k}$ darstellen durch die Functionaldeterminante

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_k} = \begin{pmatrix} y_1\ y_2 \ldots y_{k-1}\ x_i\ y_{k+1} \ldots y_n \\ y_1\ y_2 \ldots y_{k-1}\ y_k\ y_{k+1} \ldots y_n \end{pmatrix},$$

gemäss den vorhin in Nr. 116 gemachten Bemerkungen. Multipliciren wir aber dieselbe nun mit der Functionaldeterminante

$$R = \begin{pmatrix} y_1 \; y_2 \; y_3 \dots y_n \\ x_1 \; x_2 \; x_3 \dots x_n \end{pmatrix},$$

so erhalten wir gemäss unserm Satze über das Product zweier Functionaldeterminanten Nr. 117 (1)

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} y_1 \; y_2 \; y_3 \dots y_n \\ x_1 \; x_2 \; x_3 \dots x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \; y_2 \dots y_{k-1} \; x_i \; y_{k+1} \dots y_n \\ y_1 \; y_2 \dots y_{k-1} \; y_k \; y_{k+1} \dots y_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} y_1 \; y_2 \dots y_{k-1} \; x_i \; y_{k+1} \dots y_n \\ x_1 \; x_2 \dots x_{k-1} \; x_k \; x_{k+1} \dots x_n \end{pmatrix}.$$

Die Determinante rechts ist aber nichts anderes als der Minor des Elementes $\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ in der Determinante R [vgl. Nr. 116 (2)]. Wir haben somit für den partiellen Differentialquotienten

$$(3) \qquad R \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_k} = \frac{\partial R}{\partial \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right)} = A_{ik},$$

oder

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_k} = \frac{A_{ki}}{R}.$$

119. *Die Functionaldeterminante als ein Product partieller Differentialquotienten.* Wenn n Veränderliche y gegeben sind, deren jede abhängig ist von n Veränderlichen x, so steht es uns frei, irgend n von diesen $2n$ Grössen als Function der übrigen zu betrachten. Nehmen wir der Einfachheit halber zunächst drei Functionen y_i abhängig von drei Grössen x_i, etwa

$$(1) \qquad y_1 = f_1(x_1 \; x_2 \; x_3), \quad y_2 = f_2(x_1 \; x_2 \; x_3), \quad y_3 = f_3(x_1 \; x_2 \; x_3),$$

so können wir festsetzen, y_1 als abhängig zu betrachten von $x_1 \, x_2 \, x_3$; dagegen y_2 als Function von $y_1 \, x_2 \, x_3$, y_3 als Function von $y_1 \, y_2$ und x_3, etwa als Functionen:

$$(2) \qquad y_1 = f(x_1 \; x_2 \; x_3), \quad y_2 = \varphi(y_1 \; x_2 \; x_3), \quad y_3 = \psi(y_1 \; y_2 \; x_3).$$

Bilden wir nun die Functionaldeterminante des gegebenen Systems (1), so ist dieselbe

$$R = \begin{pmatrix} y_1 \; y_2 \; y_3 \\ x_1 \; x_2 \; x_3 \end{pmatrix}.$$

Bilden wir anderntheils die partiellen Differentialquotienten von y_1 nach x_1, y_2 nach x_2, y_3 nach x_3, indem wir die durch das System (2) ausgedrückte Abhängigkeit zu Grunde legen, so können wir dieselben gemäss unserer Uebereinkunft betreffs der abgekürzten Schreibweise (vgl. Nr. 116) darstellen durch

$$\text{(I)}\qquad \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & x_3 \\ y_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial y_3}{\partial x_3} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

wonach die Variabeln des Zählers als Functionen der Grössen im Nenner stets nach denen des Nenners zu differenziren sind, und je zwei übereinanderstehende gleiche unterdrückt werden können. Nun ist aber [nach Nr. 117 (1)]

$$(a)\qquad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1 & y_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & x_3 \\ y_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = D;$$

und ebenso

$$(b)\qquad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = R.$$

Substituiren wir also den Werth von D in die Relation (b), so kommt

$$(3)\qquad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1 & y_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & x_3 \\ y_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

oder

$$R = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial y_3}{\partial x_3}, \qquad \text{(II)}$$

wobei also jeder der drei Differentialquotienten der rechten Seite in anderem Sinne zu nehmen ist, nämlich in jenem, der durch die Vorstellung

$$y_1 = f(x_1\, x_2\, x_3), \quad y_2 = \varphi(y_1\, x_2\, x_3), \quad y_3 = \psi(y_1\, y_2\, x_3)$$

bestimmt ist.

Von dieser Beziehung (II) wird bei der Transformation dreifacher Integrale Gebrauch gemacht. Um nämlich in dem dreifachen Integrale

$$\int F(y_1\, y_2\, y_3)\, dy_1\, dy_2\, dy_3$$

an Stelle der Veränderlichen y_i drei neue Veränderliche x_i einzuführen, welche mit den alten durch die Relation (1) verbunden sind, kann man sich zunächst, indem man etwa die Integration nach y_3 zuerst auszuführen gedenkt, y_3 als Function $\psi(y_1\, y_2\, x_3)$ vorstellen. In diesem Falle darf man alsdann das Differential dy_3 ersetzen durch $\frac{\partial \psi}{\partial x_3} dx_3$. In dem neuen dreifachen Integral kann man die Integration mit y_2 beginnen; stellt man sich daher y_2 als Function von $\varphi(y_1\, x_2\, x_3)$ vor, so darf man dy_2 ersetzen durch $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2$. So kann man endlich an Stelle von dy_1 auch $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1$ einführen und erhält zum Schlusse:

$$\int F(y_1\, y_2\, y_3)\, dy_1\, dy_2\, dy_3 = \int F(f_1\,(x_1\, x_2\, x_3) \cdots) \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_3}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$= \int \Phi(x_1\, x_2\, x_3) \cdot R \cdot dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

Allgemein ist, wenn $y_1\ y_2 \ldots y_n$ Functionen der Grössen $x_1\ x_2 \ldots x_n$ sind, die in (3) gegebene Relation dargestellt durch

$$R = \begin{pmatrix} y_1\ y_2\ y_3 \ldots y_n \\ x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1\ y_2 \ldots y_n \\ y_1\ y_2 \ldots x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1\ y_2 \ldots y_{n-1}\ x_n \\ y_1\ y_2 \ldots x_{n-1}\ x_n \end{pmatrix} \ldots$$
$$\ldots \begin{pmatrix} y_1\ y_2 \ldots y_{n-2}\ x_{n-1}\ x_n \\ y_1\ y_2 \ldots x_{n-2}\ x_{n-1}\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1\ x_2\ x_3 \ldots x_{n-1}\ x_n \\ x_1\ x_2\ x_3 \ldots \ldots x_n \end{pmatrix}.$$

120. *Differentialquotienten von Minoren der Functionaldeterminante.* Bezeichnen wir die Minoren erster Ordnung von R mit $A_{11}\ A_{12} \ldots A_{nn}$, dann sind die Minoren der Elemente, welche sich in der k^{ten} Zeile befinden, dargestellt durch

$$A_{k1} = \pm \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial y_k}{\partial x_1}}, \quad A_{k2} = \mp \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial y_k}{\partial x_2}}, \ldots, \quad A_{kn} = \pm \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial y_k}{\partial x_n}}.$$

Bildet man nun für jeden solchen Minor A_{ki} den dem Index i entsprechenden Differentialquotienten nach x_i: $\frac{\partial A_{ki}}{\partial x_i}$, so existirt der Satz:

„Die Summe der partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial A_{ki}}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2 \ldots n,$$

ist identisch Null.“ Der Beweis lässt sich einfach rechnerisch führen*). Der Minor A_{ik} ist eine Determinante von $(n-1)$ Colonnen und $(n-1)$ Zeilen, und in jedem Elemente $\frac{\partial y_l}{\partial x_m}$ derselben tritt im All-

*) In der Invariantentheorie würde dieser Satz selbstverständlich erscheinen. Denn da dort die Functionaldeterminante symbolisch dargestellt ist durch

$$R = (abc \ldots q)\ a_x^{n-1}\ b_x^{m-1} \ldots q_x^{s-1},$$

so würde die Summe der entsprechenden Differentialquotienten aller Minoren einer Zeile nur den Ausdruck ergeben

$$\sum \left[(abc \ldots a)\ a_x^{n-2}\ b_x^{n-1} \ldots \right],$$

von dem man aus den Klammerfactoren unmittelbar erkennt, dass er verschwindet. Ist z. B. $R = (abc)\ a_x^6\ b_x^6\ c_x^6$, so ist die Summe der Differentialquotienten aller Minoren der Elemente in der zweiten Zeile (immer von Zahlenfactoren abgesehen)

$$-\frac{\partial (a_2 c_3) a_x^6 c_x^6}{\partial x_1} + \frac{\partial (a_1 c_3) a_x^6 c_x^6}{\partial x_2} - \frac{\partial (a_1 c_2) a_x^6 c_x^6}{\partial x_3}$$
$$= -(a_1 a_2 c_3) a_x^5 c_x^6 - (c_1 a_2 c_3) a_x^6 c_x^5.$$

In dem Ausdruck rechts ist aber jedes Glied Null, da die Determinanten $(a_1 a_2 c_3)$, $(c_1 a_2 c_3)$ gleiche Zeilen enthalten.

gemeinen noch x_i auf. Wir differenziren also die Determinante A_{ki} nach jedem ihrer Elemente und multipliciren jedesmal mit dem Differentialquotienten dieses Elementes nach x_i. Das Resultat ist dargestellt durch

$$\frac{\partial A_{ki}}{\partial x_i} = \sum_{l,m} \frac{\partial A_{ki}}{\partial\left(\frac{\partial y_l}{\partial x_m}\right)} \cdot \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \, \partial x_m} = \sum_{l,m} A_{\substack{k\,l\\ i\,m}} \cdot \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \, \partial x_m}.$$

Geben wir nun dem Index i alle Werthe von 1 bis n und addiren die so erhaltenen Relationen, so gelangen wir zur Gleichung

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial A_{ki}}{\partial x_i} = \sum_{i,l,m} A_{\substack{k\,l\\ i\,m}} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \, \partial x_m}.$$

Je zwei Glieder der Summe rechts sind aber bekanntlich gleich und entgegengesetzt; denn es ist $A_{\substack{k\,l\\ i\,m}} = - A_{\substack{k\,l\\ m\,i}}$ (vgl. Nr. 49); die rechte Seite verschwindet demnach; also auch die linke Seite dieser Gleichung.

121. *Die Functionaldeterminante eines Systemes von Functionen y, zwischen denen eine Relation besteht, verschwindet.* Wenn n Functionen y_i von n unabhängigen Variabeln x_i gegeben sind, so kann man sich die Aufgabe stellen, $(n-1)$ der Grössen x_i der Reihe nach zu eliminiren, etwa x_1 bis x_{n-1}, d. h. also eine der Functionen, etwa y_1, durch die übrigen $y_2\, y_3 \ldots y_n$ und die Veränderliche x_n darzustellen. Dabei kann der Fall eintreten, dass bei diesem Eliminationsprocess sich zugleich die n^{te} Veränderliche x_n mit hinweghebt, d. h. dass sich y_1 darstellen lässt in Function der übrigen Grössen $y_2\, y_3 \ldots y_n$ allein, etwa in der Form

$$(1) \qquad y_1 = F(y_i).$$

Es besteht alsdann in diesem Falle eine Relation zwischen den Functionen y, die wir mit

$$(2) \qquad \Theta(y) = y_1 - F(y_2\, y_3 \cdots y_n) = 0$$

bezeichnen wollen. Wir können dann den Satz beweisen: „Besteht zwischen den n Functionen y eine Relation $\Theta(y) = 0$, so ist ihre Functionaldeterminante R identisch Null.“ Es möge dabei erwähnt sein, dass die Relation $\Theta(y) = 0$ als Function der Grössen y keineswegs eine Identität ist, wie schon aus der Art und Weise hervorgeht, auf welcher wir zu ihr gelangt sind.

122. *Beweis des Satzes.* Um nun den Satz zu beweisen, denken wir uns die Veränderlichen y_i durch ihre Functionen $f_i(x)$ ersetzt;

die entstehende Relation in x_i ist aber dann identisch null, und daher auch alle ihre partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} = 0, \quad \cdots \frac{\partial \Theta}{\partial x_n} = 0.$$

Dieselben geben also, da die Grössen x_i nur in Functionen y_i auftreten, Veranlassung zu den n Relationen:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Theta}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \cdots \frac{\partial \Theta}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial \Theta}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Theta}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \cdots \frac{\partial \Theta}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_2} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial \Theta}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \Theta}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_n} + \cdots \frac{\partial \Theta}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = 0.$$

Wir können dieselben als n homogene Gleichungen mit n Unbekannten $\frac{\partial \Theta}{\partial y_k}$ betrachten; dann ist das Werthsystem, das diese Gleichungen befriedigt (nach Nr. 97) dargestellt durch

$$R \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial y_k} = 0.$$

Da nun aber die Grössen $\frac{\partial \Theta}{\partial y_k}$ nicht sämmtlich verschwinden können, — es ist ja beispielsweise $\frac{\partial \Theta}{\partial y_1} = 1$ wegen der Relation (1) — so muss der andere Factor verschwinden; d. h. in diesem Fall ist $R = 0$.

123. *Umkehrung.* Ist nun von vornherein die Functionaldeterminante R identisch Null, so ist es immer möglich, bei geeignetem Vorgehen aus den Functionen y_i alle Grössen x zu eliminiren, d. h. in diesem Falle existirt eine Relation $\Theta(y) = 0$.

Um den Satz zu beweisen nehmen wir an, dass dessen Richtigkeit für $(n-1)$ Functionen von $(n-1)$ Variabeln bereits dargethan sei, und haben nur zu zeigen, dass er dann auch für n Functionen mit n Variabeln giltig ist. Denn für eine Function y mit einer Variabeln x ist er evident, da aus $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $y = c$ hervorgeht.

Wir unterscheiden hierbei zwei Fälle, indem wir zunächst annehmen, dass neben $R = 0$ nicht zugleich alle Minoren erster Ordnung verschwinden sollen, dass also etwa

$$A_{nn} = \begin{pmatrix} y_1\, y_2 \ldots y_{n-1} \\ x_1\, x_2 \ldots x_{n-1} \end{pmatrix} \gtrless 0$$

sei. Benutzen wir alsdann den in Nr. 117 aufgestellten Productsatz, so ist, weil wir A_{nn} auch darstellen können durch

$$A_{nn} = \begin{pmatrix} y_1\, y_2 \ldots y_{n-1}\, x_n \\ x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}\, x_n \end{pmatrix}$$

die Functionaldeterminante R gegeben durch

$$\begin{pmatrix} y_1\, y_2\, y_3 \ldots y_n \\ x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1\, y_2 \ldots y_{n-1}\, x_n \\ x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}\, x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1\, y_2\, y_3 \ldots y_{n-1}\, y_n \\ y_1\, y_2 \ldots \ldots y_{n-1}\, x_n \end{pmatrix}.$$

Nun ist die linke Seite nach Voraussetzung gleich Null, der erste Factor rechts dagegen nach Voraussetzung von Null verschieden. Daher muss nothwendig der zweite Factor verschwinden. Derselbe aber ist nichts anderes als der Differentialquotient von y_n nach x_n, wobei y_n gemäss der Bedeutung unserer Schreibweise als Function von

$$y_1\, y_2 \ldots y_{n-1}\, x_n$$

zu betrachten ist. Wenn aber dieser Differentialquotient

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_n} = 0$$

sein soll, dann kann y_n nicht mehr abhängig sein von x_n, d. h. y_n ist eine Function der übrigen Grössen

$$y_1\, y_2 \ldots y_{n-1}$$

allein und es existirt somit nothwendig eine Relation zwischen den Grössen y_i.

124. *Zweiter Fall.* Nehmen wir nun an, es verschwinden neben $R = 0$ auch alle ihre Minoren erster Ordnung, deren einer gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} y_1\, y_2 \ldots y_{k-1}\, y_{k+1} \ldots y_n \\ x_1\, x_2 \;\ldots\ldots\ldots\; x_{n-1} \end{pmatrix} = 0.$$

Dieser Ausdruck stellt aber nichts anderes dar, als eine Functionaldeterminante der $(n-1)$ Functionen y_i, die nur von $(n-1)$ der Veränderlichen x_i als abhängig zu betrachten sind. Da unser Satz nach Voraussetzung für diesen Fall gilt, so besteht zwischen den $n-1$ Functionen

$$y_1\, y_2 \ldots y_{k-1}\, y_{k+1} \ldots y_n$$

eine Relation, die natürlich auch noch die Grösse x_n enthalten kann. Solche Relationen erhalten wir n an der Zahl je nach der Grösse y,

die wir in der ersten Zeile des symbolischen Ausdruckes unterdrücken. Dieselben können nicht durchwegs identisch gleich sein, da ja jede derselben eine andere Grösse y nicht enthält. Es müssen daher mindestens zwei der Relationen verschiedener Art sein; sie seien

$$F_1 = 0 \text{ und } F_2 = 0.$$

Eliminiren wir aus diesen beiden aber die Grösse x_n, so erhalten wir eine einzige Relation $\Theta(y) = 0$, wie behauptet war.

125. *Beispiel.* Sind n lineare Functionen y_i mit n Unbekannten gegeben

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 + \cdots a_{in} x_n = y_i,$$

so ist nach Nr. 111

$$p_{n+1} x_i = p_i = y_1 A_{i1} + y_2 A_{i2} + \cdots y_n A_{in}.$$

Nun ist p_{n+1} nichts anderes als die Functionaldeterminante der gegebenen Functionen y_i; verschwindet sie, so besteht zwischen den gegebenen Functionen die lineare Relation

$$y_1 A_{i1} + y_2 A_{i2} + \cdots y_n A_{in} = 0$$

und wir wissen, dass in diesem Falle eine dieser Functionen y_i eine Folge der übrigen ist.

§ 10. Der grösste gemeinsame Factor.

126. *Euclid'sches Verfahren für zwei ganze Zahlen a und b.* Wenn zwei Zahlen a und b gegeben sind, $a > b$, so kann man sich die Aufgabe stellen, den grössten gemeinsamen Factor der beiden Zahlen zu bestimmen. Das Euclid'sche Verfahren, diese Aufgabe zu lösen, besteht einfach darin, dieselbe auf leichtere Aufgaben zurückzuführen. Man dividirt nämlich bekanntlich mit b in a und erhält so einestheils einen Quotienten q und anderntheils einen Rest b_1, so dass die Beziehung besteht:

$$a = bq + b_1.$$

Daraus erkennt man, dass jeder gemeinsame Factor — also auch der grösste —, welcher in a und b enthalten ist, auch in b_1 enthalten sein muss, d. h. dass wir ihn auch ermitteln können, indem wir den grössten gemeinsamen Factor von den beiden kleineren Zahlen b und b_1 suchen. Verfahren wir hier auf die gleiche Weise und setzen diese Methode fort, bis wir endlich zu einem Reste b_ϱ gelangen, über welchen hinaus keiner mehr auftritt, also $b_{\varrho+1} = 0$ ist, so erhalten wir ϱ Divisionsgleichungen

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} a = b\,q + b_1 \\ b = b_1 q_1 + b_2 \\ b_1 = b_2 q_2 + b_3 \\ b_2 = b_3 q_3 + b_4 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ b_{\varrho-2} = b_{\varrho-1}\, q_{\varrho-1} + b_\varrho . \end{cases}$$

In denselben nehmen die Reste $b_1\, b_2 \ldots b_\varrho$ fortwährend ab und der letzte Rest b_ϱ ist der gemeinschaftliche Factor aller vorhergehenden und also insbesondere auch von a und b. Man hat dieses Verfahren auch mit dem Namen Kettenbruchsverfahren bezeichnet.

127. *Darstellung der Reste $b_1 \ldots b_\varrho$ als lineare Functionen von a und b.* Der Algorithmus (I) lehrt uns aber, dass die Grössen $b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_\varrho$ sich ausdrücken lassen in der Form:

$$\text{(II)} \qquad b_\mu = A_\mu\, a + B_\mu b .$$

Der Beweis wird einfach durch Rechnung geführt. Es ist:

1) $b_1 = a - bq = A_1 a + B_1 b,$

wobei:

$$A_1 = 1, \quad B_1 = -q;$$

2) $b_2 = b - q_1\,(a - bq) = A_2 a + B_2 b,$

wobei:

$$A_2 = -q_1, \quad B_2 = +(1 + qq_1);$$

3) $b_3 = (a - bq) - q_2\,[(b - q_1\,(a - bq)] = A_3\, a + B_3 b,$

wobei:

$$A_3 = +(1 + q_1 q_2), \quad B_3 = -(q + q_2 + q\,q_1 q_2);$$

4) $b_4 = [b - q_1(a - bq)] - q_3[(a - bq) - q_2(b - q_1(a - bq)] = A_4 a + B_4 b,$

wobei:

$$A_4 = -(q_1 + q_3 + q_1 q_2 q_3),$$
$$B_4 = +(1 + qq_1 + qq_3 + q_2 q_3 + qq_1 q_2 q_3) \text{ u. s. w.}$$

Allgemein ist also:

$$b_\mu = A_\mu\, a + B_\mu b,$$

wobei für A_μ und B_μ die Recursionsformeln gelten:

$$A_\mu = A_{\mu-2} - q_{\mu-1}\, A_{\mu-1}$$
$$B_\mu = B_{\mu-2} - q_{\mu-1}\, B_{\mu-1} .$$

Man folgert aus der Relation (II) direct, dass jeder gemeinsame Factor von a und b auch Factor des Restes b_μ ist. Denkt man sich mit demselben die Relation (II) dividirt, also a und b relativ prim zu einander, so kann man sie leicht direct beweisen mit Hilfe zweier einfacher Sätze der Lehre von den Kettenbrüchen. Sind nämlich $\frac{\beta_\mu}{\alpha_\mu}$ die Näherungswerthe des Bruches $\frac{b}{a}$, so ist nach bekannten Sätzen:

$$(1) \qquad \frac{b}{a} = \frac{\beta_\mu\, b_{\mu-1} + \beta_{\mu-1}\, b_\mu}{\alpha_\mu\, b_{\mu-1} + \alpha_{\mu-1}\, b_\mu};$$

$$(2) \qquad \alpha_\mu\, \beta_{\mu-1} - \alpha_{\mu-1}\, \beta_\mu = (-1)^\mu.$$

Subtrahirt man von Gleichung (1) $\frac{\beta_\mu}{\alpha_\mu}$ auf beiden Seiten, so ergiebt sich nach leichter Umformung mit Hilfe der Relation (2)

$$(\mathrm{III}) \qquad (-1)^\mu \cdot b_\mu = -\beta_\mu a + \alpha_\mu b,$$

eine Relation, die direct mit (II) übereinstimmt und woraus man erkennt, dass die Coefficienten A_μ und B_μ nichts anderes sind als der Zähler und Nenner (absolut genommen) des μ^{ten} Näherungswerthes von $\frac{b}{a}$.

128. *Grösster gemeinschaftlicher Theiler zweier Functionen* $f(\overset{m}{x})$ und $\varphi(\overset{n}{x})$. Ganz in derselben Weise wie vorhin der Theiler zweier Zahlen ermittelt wurde, kann man verfahren, um den grössten gemeinschaftlichen Theiler zweier Functionen $f(\overset{m}{x})$ und $\varphi(\overset{n}{x})$ zu bestimmen.

Sei

$$\left.\begin{aligned} f(\overset{m}{x}) &= a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \cdots a_m \\ \varphi(\overset{n}{x}) &= b_0x^n + b_1\, x^{n-1} + b_2\, x^{n-2} + \cdots b_n \end{aligned}\right\} m > n,$$

wobei also der Index über der Variabeln hier wie im Folgenden stets den Grad der betreffenden Function in x bedeuten soll und a_m und b_n von Null verschieden sind. — Dividiren wir $f(x)$ durch $\varphi(x)$, mit dem entstehenden Rest f_1 wieder in φ, mit dem weitern Rest f_2 in f_1 u. s. w., dann entstehen wieder eine Reihe von Divisionsgleichungen wie vorhin. Dabei wollen wir jene Grössen erst als Reste definiren, in denen der Coefficient der höchsten Potenz von x die Zahl 1 ist, und ferner wollen wir zunächst alle Coefficienten a_i und b_i als Variable ansehen; dann

ist jeder folgende Rest immer um einen Grad niedriger als der vorhergehende.

Unsere Divisionsgleichungen werden demnach:

$$f\overset{m}{(x)} = q\overset{m-n}{(x)}\,\varphi\overset{n}{(x)} + c_1 f_1\overset{n-1}{(x)}$$

$$\varphi\overset{n}{(x)} = q_1\overset{1}{(x)}\,f_1\overset{n-1}{(x)} + c_2 f_2\overset{n-2}{(x)}$$

$$f_1\overset{n-1}{(x)} = q_2\overset{1}{(x)}\,f_2\overset{n-2}{(x)} + c_3 f_3\overset{n-3}{(x)}$$

$$f_2\overset{n-2}{(x)} = q_3\overset{1}{(x)}\,f_3\overset{n-3}{(x)} + c_4 f_4\overset{n-4}{(x)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{n-3}\overset{3}{(x)} = q_{n-2}\overset{1}{(x)}\,f_{n-2}\overset{2}{(x)} + c_{n-1} f_{n-1}\overset{1}{(x)}$$

$$f_{n-2}\overset{2}{(x)} = q_{n-1}\overset{1}{(x)}\,f_{n-1}\overset{1}{(x)} + c_n f_n\overset{0}{(x)},$$

wobei

$$f_n\overset{0}{(x)} = 1$$

und die Constanten $c_1\, c_2 \ldots c_n$ davon herrühren, dass der Coefficient der höchsten Potenz jedes Restes gleich 1 genommen wurde. Wir wollen nun wieder aus diesen Divisionsgleichungen die Reste f_1 bis f_n in der Form darstellen

(I) $$f_\mu\overset{n-\mu}{(x)} = A_\mu\overset{\mu-1}{(x)}\,f\overset{m}{(x)} + B_\mu\overset{m-n+\mu-1}{(x)}\,\varphi\overset{n}{(x)}.$$

Es ist:

(1) $$f_1\overset{n-1}{(x)} = \frac{1}{c_1}\left\{f\overset{m}{(x)} - q\overset{m-n}{(x)}\,\varphi\overset{n}{(x)}\right\} = A_1\overset{0}{(x)}\,f\overset{m}{(x)} + B_1\overset{m-n}{(x)}\,\varphi\overset{n}{(x)},$$

wobei

$$A_1\overset{0}{(x)} = +\,\frac{1}{c_1}, \quad B_1\overset{n-m}{(x)} = -\,\frac{q\overset{m-n}{(x)}}{c_1};$$

(2) $$f_2\overset{n-2}{(x)} = \frac{1}{c_2}\left\{\varphi\overset{n}{(x)} - q_1\overset{1}{(x)}\Big[A_1\overset{0}{(x)}\,f\overset{m}{(x)} + B_1\overset{m-n}{(x)}\,\varphi\overset{n}{(x)}\Big]\right\}$$

$$= A_2\overset{1}{(x)}\,f\overset{m}{(x)} + B_2\overset{m-n+1}{(x)}\,\varphi\overset{n}{(x)},$$

wobei

$$A_2\overset{1}{(x)} = -\,\frac{1}{c_1 c_2}\cdot q_1\overset{1}{(x)}, \quad B_2\overset{m-n+1}{(x)} = +\,\frac{1}{c_1 c_2}\left(c_1 + q\overset{m-n}{(x)}\,q_1\overset{1}{(x)}\right);$$

(3) $$f_3\overset{n-3}{(x)} = \frac{1}{c_3}\left\{f_1\overset{n-1}{(x)} - q_2\overset{1}{(x)}\Big[A_2\overset{1}{(x)}\,f\overset{m}{(x)} + B_2\overset{m-n+1}{(x)}\,\varphi\overset{n}{(x)}\Big]\right\}$$

$$= \frac{1}{c_3}\left\{A_1(\overset{0}{x})\, f(\overset{m}{x}) + B_1(\overset{m-n}{x})\, \varphi(x) - q_2(\overset{1}{x})\, A_2(\overset{1}{x})\, f(\overset{m}{x})\right.$$

$$\left. - q_2(\overset{1}{x})\, B_2(\overset{m-n+1}{x})\, \varphi(\overset{n}{x})\right\} = A_3(\overset{2}{x})\, f(\overset{m}{x}) + B_3(\overset{m-n+2}{x})\, \varphi(\overset{n}{x}),$$

wobei

$$A_3(\overset{2}{x}) = \frac{1}{c_3}\left[A_1(\overset{0}{x}) - q_2(\overset{1}{x})\, A_2(\overset{1}{x})\right] = + \frac{1}{c_1 c_2 c_3}\left[c_2 + q_1(\overset{1}{x})\, q_2(\overset{1}{x})\right],$$

$$B_3(\overset{2}{x}) = \frac{1}{c_3}\left[B_1(\overset{m-n}{x}) - q_2(\overset{1}{x})\, B_2(\overset{m-n+1}{x})\right]$$

$$= - \frac{1}{c_1 c_2 c_3}\left[c_2\, q(\overset{m-n}{x}) + c_1\, q_2(\overset{1}{x}) + q(\overset{n-m}{x})\, q_1(\overset{1}{x})\, q_2(\overset{1}{x})\right] \text{ u. s. w.}$$

Man sieht hieraus, dass die Grössen $A_\mu(x)$ und $B_\mu(x)$ sich wieder durch die Recursionsformeln darstellen lassen:

$$A_\mu(\overset{\mu-1}{x}) = \frac{1}{c_\mu}\left\{A_{\mu-2}(\overset{\mu-3}{x}) - q_{\mu-1}(\overset{1}{x})\, A_{\mu-1}(\overset{\mu-2}{x})\right\}$$

$$B_\mu(\overset{m-n+\mu-1}{x}) = \frac{1}{c_\mu}\left\{B_{\mu-2}(\overset{m-n+\mu-3}{x}) - q_{\mu-1}(\overset{1}{x})\, B_{\mu-1}(\overset{m-n+\mu-2}{x})\right\}.$$

Insbesondere erhalten wir als Ausdruck des letzten Restes

$$(n) \qquad f_n(\overset{0}{x}) = 1 = A_n(\overset{n-1}{x})\, f(\overset{m}{x}) + B_n(\overset{m-1}{x})\, \varphi(\overset{n}{x}).$$

129. *Exposition der hier zu lösenden Aufgaben.* Die rechte Seite der Gleichungen (1) bis (n) ist stets eine ganze Function der x, ebenso wie die linke; dagegen ist sie als Function der Coefficienten betrachtet im Allgemeinen eine gebrochene Function derselben, so lange a_i und b_i variabel sind. Bezeichnen wir in dem Ausdrucke für $f_\mu(\overset{n-\mu}{x})$ den Hauptnenner der ganzen rechten Seite mit $D_{n-\mu}$, so können wir die Gleichung (I) in Nr. 128 auch schreiben

$$\text{(II)} \qquad D_{n-\mu}\, f_\mu(\overset{n-\mu}{x}) = \overline{A}_\mu(\overset{\mu-1}{x})\, f(\overset{m}{x}) + \overline{B}_\mu(\overset{m-n+\mu-1}{x})\, \varphi(\overset{n}{x}),$$

wo nun $\overline{A}_\mu$ und $\overline{B}_\mu$ andere Functionen der Grössen a und b sind, also vorhin A_μ und B_μ. In dieser Relation (II) sind aber nun sowohl $D_{n-\mu} f(\overset{n-\mu}{x})$, als auch $\overline{A}_\mu$, $\overline{B}_\mu$, $f(x)$ und $\varphi(x)$ ganze Functionen der Coefficienten wie der Variabeln. Der Nenner $D_{n-\mu}$ kann verschwinden; in diesem Falle tritt überhaupt kein Rest vom Grade $n - \mu$ in x auf,

sondern es folgt auf den Rest vom Grade $n-\mu+1$ ein Rest vom Grade $n-\mu-1$, oder von noch niedrigerem Grade, wie wir sogleich auch noch ausführlicher sehen werden. Ist dagegen der Nenner $D_{n-\mu} \gtrless 0$, so können wir uns die Aufgabe stellen, den zugehörigen Rest f_μ, oder vielmehr das Product $D_\mu \cdot f_\mu$ zu bestimmen.

Es kann ferner eintreten, dass alle Nenner vom letzten D_0 an gerechnet bis zum ν^{ten} $D_{n-\nu+1}$ verschwinden, $D_{n-\nu}$ aber nicht; dann verschwinden nach dem eben Erwähnten auch alle Reste

$$f_n,\ f_{n-1} \ldots f_{n-\nu+1}.$$

Der erste nicht verschwindende Rest ist $f_{n-\nu}$ vom Grade ν in x, und dieser ist nothwendig der grösste gemeinsame Factor von $f(\overset{m}{x})$ und $\varphi(\overset{n}{x})$. Daraus erkennt man: Es sind ν Bedingungen nöthig

$$D_0 = 0,\quad D_1 = 0,\quad D_2 = 0 \cdots,\ D_{n-\nu+1} = 0,$$

damit f und φ einen gemeinsamen Factor vom Grade ν in x besitzen und dieser gemeinsame Factor ist der letzte Rest, der nicht verschwindet.

Wir haben also hier zwei Aufgaben zu lösen: einmal die Bedingungen aufzustellen, dass ein gemeinsamer Factor vom Grade ν vorhanden ist; sodann, diesen Factor selbst zu ermitteln.

130. *Berechnung von D_0.* Um zur Lösung der ersten Aufgabe zu gelangen, berechnen wir zuerst

$$D_0 = D_0 f_n(\overset{0}{x}),$$

indem wir dabei die Identität benutzen

$$\text{(I)}\qquad 1 = A_n(\overset{n-1}{x})\, f(\overset{m}{x}) + B_n(\overset{m-1}{x})\, \varphi(\overset{n}{x}).$$

Wir folgen hierbei ganz den Entwicklungen der diesbezüglichen Arbeit Nöther's, veröffentlicht in Faà di Bruno's Einleitung zur Invariantentheorie pag. 58 (deutsche Uebersetzung von Walter. Teubner 1881). Die Bestimmung von A_n und B_n, welche wir als Functionen vom Grade $n-1$, bezw. $m-1$ darstellen können durch

$$A_n = p_0 x^{n-1} + p_1 x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}$$
$$B_n = q_0 x^{m-1} + q_1 x^{m-2} + \cdots + q_{n-1}$$

geschieht aus der Identität (I) durch Coefficientenvergleichung. Man erhält aus ihr für die $m+n$ Unbekannten

$$p_0,\ p_1, \ldots p_{n-1},\quad q_0,\ q_1 \ldots q_{m-1}$$

die $m+n$ linearen Gleichungen:



$$
\text{(II)} \begin{cases}
0 = a_0\, p_0 \cdots\cdots\cdots\cdots + b_0\, q_0 \\
0 = a_1\, p_0 + a_0\, p_1 \cdots\cdots\cdots + b_1\, q_0 + b_0\, q_1 \\
0 = a_2\, p_0 + a_1\, p_1 + a_0\, p_2 \cdots + b_2\, q_0 + b_1\, q_1 + b_2\, q_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 = a_n\, p_0 + a_{n-1}\, p_1 + \cdots\cdots\cdots \\
\qquad \cdots + b_n\, q_0 + b_{n-1}\, q_1 + b_{n-2}\, q_2 \cdots + b_{n-m+1}\, q_{m-1} \\
0 = a_{n+1}\, p_0 + a_n\, p_1 + \cdots\cdots\cdots \\
\qquad + b_n\, q_1 + b_{n-1}\, q_2 \cdots + b_{n-m+2}\, q_{m-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 = a_m\, p_0 + a_{m-1}\, p_1 + \cdots + a_{m-n+2}\, p_{n-2} + a_{m-n+1}\, p_{n-1} \\
\qquad + b_n\, q_{m-n} + b_{n-1}\, q_{m-n+1} \cdots \\
0 = \qquad a_m\, p_1 + \cdots + a_{m-n+3}\, p_{n-2} + a_{m-n+2}\, p_{n-1} \\
\qquad + b_n\, q_{m-n+1} + b_{n-1}\, q_{m-n+2} \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 = \qquad a_m\, p_{n-2} + a_{m-1}\, p_{n-1} \\
\qquad + b_n\, q_{m-2} + b_{n-1}\, q_{m-1} \\
1 = \qquad a_m\, p_{n-1} \\
\qquad + b_n\, q_{m-1}
\end{cases}
$$

Löst man diese Gleichungen nach p_i und q_i auf, so haben die Werthe von p_i und q_i durchwegs den Nenner:

$$
D_0 = \begin{vmatrix}
a_0 & 0 & 0 & \ldots & b_0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\
a_1 & a_0 & 0 & \ldots & b_1 & b_0 & 0 & 0 \ldots 0 \\
a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \ldots 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \ldots & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \ldots & 0 & b_n & b_{n-1} & \cdots \\
a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \ldots & 0 & 0 & b_n & \cdots \\
0 & a_m & a_{m-1} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & a_m & \ldots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{n-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & a_m & 0 & 0 & \ldots b_n
\end{vmatrix}.
$$

Transponirt man diese Determinante, so erhält man

$$D_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & & & & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & \dots \\ 0 & \dots & & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & & b_n & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & & & b_n & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & & & & b \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & & & & b_0 & b_1 \dots & b_n \end{vmatrix} = R_{f,\varphi}.$$

131. *Definition der Resultante von $f(x)$ und $\varphi(x)$.* Dieser Nenner kann im Allgemeinen nicht verschwinden, wenn die Identität (I) Nr. 130 besteht, da ja sonst nicht die Gleichungen (II) Nr. 130 zusammen existiren könnten (vergleiche Nr. 112), die aus dieser Identität hervorgehen. Wir nennen diese Determinante D_0 „die Resultante" der beiden Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ und bezeichnen sie als solche mit $R_{f,\varphi}$. Sie ist eine ganze Function der Coefficienten und offenbar auch homogen sowohl in a_i als b_i, und zwar in a_i vom Grade n, in b_i vom Grade m, wie man aus der Anzahl der Zeilen in D_0 erkennt, die einestheils die Elemente a_i, anderntheils die Elemente b_i enthalten.

Ersetzt man in der Identität (I) alle Coefficienten p und q von A_n und B_n durch jene Werthe, welche sich aus dem System (II) Nr. 130 von linearen Gleichungen ergeben und multiplicirt mit dem Nenner aller dieser Coefficienten die Identität, so erhält man die andere Form derselben:

$$D_0 = \overset{n-1}{\overline{A}_n(x)}\overset{m}{f(x)} + \overset{m-1}{\overline{B}_n(x)}\varphi(x) = R_{f,\varphi}.$$

Diese Identität kann man auch direct aus der Determinante $R_{f,\varphi}$ selbst herleiten, wenn man in dieser Determinante die erste Colonne mit x^{n-m-1}, die zweite mit x^{n-m-2} u. s. w. sich multiplicirt denkt und zur letzten addirt. Es wird dann:

$$R_{f,\varphi} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & & x^{n-1}\cdot f(x) \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & & x^{n-2}\cdot f(x) \\ \dots & & & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{m-1}, & & f(x) \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & & x^{m-1}\ \varphi(x) \\ 0 & b_1 & b_2 & \dots & & x^{m-2}\ \varphi(x) \\ \dots & & & & & \dots \\ \dots & & & b_{n-1}, & & \varphi(x) \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man diese Determinante nach der letzten Colonne, so erhält man gerade

$$R_{f,\varphi} = \overset{m}{f(x)}\left\{\bar{p}_0 x^{n-1} + \bar{p}_1 x^{n-2} \cdots \bar{p}_{n-1}\right\}$$

$$+ \overset{m}{\varphi(x)}\left\{\bar{q}_0 x^{m-1} + \bar{q}_1 x^{m-2} + \cdots \bar{q}_{m-1}\right\}$$

oder

$$R_{f,\varphi} = \overset{n-1}{\bar{A}_n(x)}\,\overset{m}{f(x)} + \overset{m-1}{\bar{B}_n(x)} \cdot \overset{n}{\varphi(x)}.$$

Sind die Coefficienten a_i und b_i so beschaffen, dass D_0 identisch verschwindet, dann wird diese Identität

$$0 = \overset{n-1}{\bar{A}_n(x)}\,\overset{m}{f(x)} + \overset{m-1}{\bar{B}_n(x)}\,\overset{n}{\varphi(x)}.$$

Die Functionen f und φ haben alsdann einen gemeinschaftlichen linearen Factor f_{n-1}, vorausgesetzt dass — wie wir gleich noch eingehender untersuchen werden — D_1 nicht verschwindet.

132. *Berechnung von D_1.* Unsere nächste Aufgabe ist, den Nenner D_1 zu berechnen. Wir benutzen dazu wiederum die Identität (I) Nr. 128, indem wir dort $n-1$ für μ substituiren; man erhält

$$\text{(II)} \qquad \overset{1}{f_{n-1}(x)} = \overset{n-2}{A_{n-1}(x)}\,\overset{m}{f(x)} + \overset{m-2}{B_{n-1}(x)}\,\overset{n}{\varphi(x)} = x + r.$$

Die Functionen A_{n-1}, B_{n-1} kann man in der Form annehmen:

$$A_{n-1} = p_0 x^{n-2} + p_1 x^{n-3} \cdots + p_{n-2}$$

$$B_{n-1} = q_0 x^{m-2} + q_1 x^{m-3} \cdots + q_{m-2}.$$

Vergleicht man zunächst auf beiden Seiten die Coefficienten von x^{m+n-2}, $x^{m+n-3} \ldots$ bis herab zu x^2, so erhält man für die $m+n-2$ Unbekannten:

$$p_0\; p_1\; p_2 \cdots p_{n-2},\; q_0,\; q_1 \cdots q_{m-2}$$

$(m+n-3)$ lineare und homogene Gleichungen:

$$\text{(I)} \begin{cases} a_0\, p_0 & + b_0 q_0 = 0 \\ a_1\, p_0 + a_0\, p_1 & + b_1\, q_0 + b_1 q_1 = 0 \\ a_2\, p_0 + a_1\, p_1 \quad + a_0\, p_2 & + b_2 q_0 + b_1\, q_1 + b_0 q_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_m p_0 + a_{m-1} p_1 + \cdots + a_{m-n+2} p_{n-2} + \cdots & \cdots + b_{m-n+2} q_{n-2} = 0 \\ a_m p_1 + \cdots + a_{m-n+3} p_{n-2} + \cdots & \cdots + b_{m-n+3} q_{n-2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_m p_{n-4} + a_{m-1} p_{n-3} + a_{m-2} p_{n-2} + b_n q_{n-4} + b_{n-1} q_{n-3} + b_{n-2} q_{n-2} = 0. \end{cases}$$

Hiezu tritt noch als weitere Gleichung jene, welche man durch Comparation des Coefficienten der ersten Potenz von x in der Identität (II) gewinnt, d. i.

$$(2) \qquad 1 = a_m p_{n-3} + a_{m-1} p_{n-2} + b_n q_{m-3} + b_{n-1} q_{n-2}.$$

Beide Systeme zusammen liefern $(m + n - 2)$ Gleichungen mit $m + n - 2$ Unbekannten p_i und q_i; die letzteren ergeben sich also aus ihnen in Bruchform mit dem gemeinsamen Nenner

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . & a_m & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & . & . & . & . & a_m & . & . & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ & . & . & . & . & . & . & . & . & . & a_m \\ 0 & . & . & . & . & . & a_0 & a_1 & a_2 & & a_{m-1} \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . & . & b_n & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & . & . & . & . & b_n & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & . & . & . & . & . & b_n & . & 0 \\ & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \\ & . & . & . & . & . & . & . & . & . & b_n \\ 0 & . & . & . & . & . & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 . & b_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Derselbe ist nichts anderes als eine Unterdeterminante zweiter Ordnung von D_0; man erhält sie aus D_0, wenn in ihr die zwei letzten Colonnen und die letzte Zeile sowohl der Elemente a, als die letzte der Elemente b unterdrückt werden. Die Unbekannten p_i und q_i sind dann, wenn man die Minoren der letzten Colonne in D_1 mit

$$D_{10} \; D_{11} \ldots D_{1,n-2} \; \varDelta_{10} \; \varDelta_{11} \ldots \varDelta_{1,m-2}$$

bezeichnet, dargestellt durch

$$p_i = \frac{D_{1i}}{D_1}, \quad q_i = \frac{\varDelta_{1i}}{D_1}.$$

Trägt man diese Werthe in die Gleichung ein, welche durch Comparation des Coefficienten von x^0 aus der Identität (II) hervorgeht, also in

$$(3) \qquad r = a_m p_{n-2} + b_n q_{n-2},$$

so erhält man auch den Werth dieser Grösse r, woraus hervorgeht, dass sie nur auf eine einzige Art bestimmt werden kann. Der Rest $x + r = \overset{1}{f_{n-1}(x)}$ ist somit eindeutig ermittelt.

Die Determinante D_1 ist jene Grösse, deren Verschwinden ausdrückt, dass kein Rest vom ersten Grade in x existirt. Denn tragen wir in die Identität

$$\overset{1}{f_{n-1}(x)} = x + r = \overset{n-2}{A_{n-1}(x)}\overset{m}{f(x)} + \overset{m-2}{B_{n-1}(x)}\overset{n}{\varphi(x)}$$

die Werthe von p_i und q_i ein und multipliciren mit dem gemeinsamen Nenner D_1, so erhalten wir

$$D_1 \cdot \overset{1}{f_{n-1}(x)} = \overset{n-2}{\overline{A}_{n-1}(x)}\overset{m}{f(x)} + \overset{m-2}{B_{n-1}(x)}\overset{n}{\varphi(x)},$$

woraus die Behauptung direct hervorgeht.

133. *Berechnung von* $\overset{1}{f_{n-1}(x)}$. Verschwinden D_0 und D_1 gleichzeitig, so besitzen also die beiden Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ einen gemeinsamen Factor zweiten Grades. Verschwindet nur D_0 allein, so existirt, wie schon in Nr. 130 erwähnt, ein gemeinsamer Factor ersten Grades, der erhalten wird, wenn wir in der Identität (II) Nr. 132 den Ausdruck auf der rechten Seite in zwei Glieder zusammenfassen, eines mit dem Factor x^1, das andere mit dem Factor x^0, also diese Identität (II) in der Form schreiben

$$\overset{1}{f_{(n-1)}(x)} = M \cdot x^1 + N \cdot x^0$$

und nun in M und N die Grössen p_i und q_i vermöge der Relationen

$$p_i = \frac{D_{1i}}{D_1}, \quad q_i = \frac{\Delta_{1i}}{D_1}$$

eliminiren.

134. *Berechnung von* D_2. Wir gehen wieder aus von der Identität

$$\text{(III)} \quad \overset{2}{f_{n-2}(x)} = \overset{n-3}{A_{n-2}(x)}\overset{m}{f(x)} + \overset{m-3}{B_{n-2}(x)}\overset{n}{\varphi(x)} = x^2 + rx + s$$

und vergleichen darin zunächst die Coefficienten von x^{m+n-1}, $x^{m+n-2} \ldots$ bis x^3, wodurch wir $(m + n - 5)$ homogene lineare Gleichungen mit den $m + n - 4$ Unbekannten

$$p_0\ p_1\ p_2 \ldots p_{n-3},\ q_0\ q_1\ q_2 \ldots q_{m-3}$$

erhalten, nämlich die Gleichungen

$$(1)\begin{cases} 0 = a_0 p_0 & + b_0 q_0 \\ 0 = a_1 p_0 + p_1 a_0 & + b_1 q_0 + b_0 q_1 \\ 0 = a_2 p_0 + a_1 p_1 + a_0 p_2 & + b_2 q_0 + b_1 q_1 + b_0 q_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 = a_m p_{n-5} + a_{m-1} p_{n-4} + a_{m-2} p_{n-3} & + b_n q_{n-5} + b_{n-1} q_{n-4} + b_{n-2} q_{n-3}. \end{cases}$$

Hiezu tritt als nächste Gleichung jene, welche durch Comparation der Coefficienten von x^2 entsteht, nämlich

$$(2) \qquad 1 = a_m p_{n-4} + a_{m-1} p_{n-3} + b_n q_{n-4} + b_{n-1} q_{n-3}.$$

Beide Systeme zusammen geben die nöthige Zahl von Gleichungen, um die Grössen p_i und q_i zu berechnen. Der gemeinsame Nenner aller Werthe p_i und q_i ist die Determinante des Systems (1), nämlich

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \dots a_m & 0 & 0 \dots 0 \\ & a_0 & a_1 \dots\dots & a_m & \dots\dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & a_0 & a_1 & \dots a_{m-2} \\ b_0 & b_1 & b_2 \dots b_n & 0 \dots\dots 0 \\ & b_0 & b_1 \dots\dots & b_n \dots\dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & b_0 & b_1 & \dots b_{n-2} \end{vmatrix},$$

also ein Minor vierter Ordnung von D_0, den man erhält durch Unterdrückung der letzten vier Colonnen einestheils und der letzten Zeilenpaare mit den Elementen a bezw. Elementen b anderntheils.

135. *Berechnung von* $\overset{2}{f}_{n-2}(x)$. Tragen wir die in Function von a_i und b_i berechneten Werthe von p_i und q_i in jene Gleichungen ein, die man durch Comparation der zweiten, ersten und nullten Potenz von x aus der Identität (III) gewinnt, so werden dadurch die Coefficienten r und s, und also auch der ganze Rest $f_{n-2}\overset{2}{(x)}$ eindeutig bestimmt. Zu demselben Resultate gelangt man, indem man die rechte Seite der Identität (III) Nr. 134 in drei Gliedern zusammenfasst, von der Form

$$f_{n-2}\overset{2}{(x)} = Ax^2 + Bx + C$$

und in den Coefficienten A, B und C die Grössen p_i und q_i eliminirt. Dabei erhält die rechte Seite durchweg den Nenner D_2, so dass nach Multiplication mit demselben die Gleichung entsteht

$$D_2 \cdot f_{n-2}\overset{2}{(x)} = \overline{A}x^2 + \overline{B}x + \overline{C},$$

woraus man erkennt, dass mit $D_2 = 0$ auch kein Rest vom zweiten Grade in x auftritt.

Wenn also die Reste D_0, D_1 und D_2 verschwinden, D_3 aber von Null verschieden ist, dann haben $f(x)$ und $\varphi(x)$ einen Factor dritten Grades in x gemein.

136. *Verallgemeinerung.* Aus den bisherigen Entwicklungen ist das Verfahren, nun zur Aufstellung des Restes vom Grade ϱ in x zu gelangen, leicht abzusehen. Man comparirt in der Identität

$$f_{n-\varrho}\overset{\varrho}{(x)} = A_{n-\varrho}\overset{n-\varrho-1}{(x)}\ \overset{m}{f(x)} + B_{n-\varrho}\overset{m-\varrho-1}{(x)}\ \overset{n}{\varphi(x)}$$

die Coefficienten der $(m+n-\varrho-1)^{\text{ten}}$ bis ϱ^{ten} Potenz von x; das giebt ein erstes Gleichungssystem. Hierzu tritt die Gleichung, die durch Comparation der ϱ^{ten} Potenz von x selbst entsteht, zusammen $m+n-2\varrho$ Gleichungen mit $m+n-2\varrho$ Unbekannten, die sich sonach daraus berechnen lassen. Ihr gemeinsamer Nenner ist D_ϱ, und der Rest vom Grade ϱ geht aus der Identität hervor, indem man die Werthe von p_i und q_i in dieselbe substituirt. Verschwinden alle Determinanten $D_0, D_1 \dots D_\varrho$, dagegen $D_{\varrho+1}$ nicht, so existirt kein Rest von niedrigerem Grade als dem $(\varrho+1)^{\text{ten}}$, und die beiden Functionen f und φ haben einen gemeinsamen Factor $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grades in x. Insbesondere haben wir gesehen, ist $D_0 = 0$ die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass beide Functionen überhaupt einen linearen Factor gemein haben.

137. *Beispiel.* Sei gegeben

$$\begin{aligned} f_x &= a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4, \\ \varphi_x &= b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3. \end{aligned}$$

Wir bestimmen zunächst D_0 aus der Identität:

$$\begin{aligned} 1 = &(p_0x^2 + p_1x + p_2)(a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4) \\ &+ (q_0x^3 + q_1x^2 + q_2x + q_3)(b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3). \end{aligned}$$

Die Coefficientenvergleichung giebt:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= a_0p_0 + b_0q_0 \\ 0 &= a_1p_0 + a_0p_1 + b_1q_0 + b_0q_1 \\ 0 &= a_2p_0 + a_1p_1 + a_0p_2 + b_2q_0 + b_1q_1 + b_0q_2 \\ 0 &= a_3p_0 + a_2p_1 + a_1p_2 + b_3q_0 + b_2q_1 + b_1q_2 + b_0q_3 \\ 0 &= a_4p_0 + a_3p_1 + a_2p_2 + \quad + b_3q_1 + b_2q_2 + b_1q_3 \\ 0 &= \quad + a_4p_1 + a_3p_2 + \quad + b_3q_2 + b_2q_3 \\ 1 &= \quad + a_4p_2 + \quad + b_3q_3 \end{aligned}\right\} . \qquad (1)$$

Die Determinante des Systems wird, wenn man sie transponirt:

$$D_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} .$$

Ihr Verschwinden drückt aus, dass f und φ einen gemeinsamen linearen Factor besitzen.

Ermitteln wir ferner D_1 aus der Identität:

$$\begin{aligned} x + r = {} & (p_0 x + p_1)(a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a^4) \\ & + (q_0 x^2 + q_1 x + q_2)(b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_4), \end{aligned}$$

indem wir zuerst die Coefficienten der Potenzen x^5, x^4, x^3, x^2, x vergleichen, so kommt:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a_0 p_0 \qquad\qquad + b_0 q_0 + \\ 0 = a_1 p_0 + a_0 p_1 + b_1 q_0 + b_0 q_1 \\ 0 = a_2 p_0 + a_1 p_1 + b_2 q_0 + b_1 q_1 + b_0 q_2 \\ 0 = a_3 p_0 + a_2 p_1 + b_3 q_0 + b_2 q_1 + b_1 q_2 \\ 1 = a_4 p_0 + a_3 p_1 \qquad\qquad + b_3 q_1 + b_2 q_2 \end{array}\right\} . \qquad (1)$$

Die Determinante des Systems ist:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} .$$

Sie geht also in der That aus D_0 hervor durch Unterdrückung der beiden letzten Colonnen sowie der letzten Zeile der Elemente a und der letzten Zeile der Elemente b.

Ebenso erhalten wir endlich D_2 aus der Identität

$$\begin{aligned} x^2 + rx + s = {} & p_0 x \cdot (a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4) \\ & + (q_0 x + q_1)(b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3), \end{aligned}$$

indem wir das Gleichungssystem

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} 0 = a_0 p_0 + b_0 q_0 \\ 0 = a_1 p_0 + b_1 q_0 + b_0 q_1 \\ 1 = a_2 p_0 + b_2 q_0 + b_1 q_1 \end{array}\right.$$

nach p_i und q_i auflösen. Der Nenner aller Werthe p_i und q_i ist

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} ,$$

ein Minor vierter Ordnung der Determinante D_0. Die Werthe von p_i und q_i sind:

$$D_2 p_0 = \begin{vmatrix} 0 & b_0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 1 & b_2 & b_1 \end{vmatrix}, \quad D_2 q_0 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & b_0 \\ a_2 & 1 & b_1 \end{vmatrix}, \quad D_2 q_1 = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & 0 \\ a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Trägt man diese Werthe in die Gleichungen

$$r = a_3 p_0 + b_3 q_0 + b_2 q_1$$
$$s = a_4 p_0 + b_3 q_1$$

ein, so erhält man die Coefficienten des quadratischen Restes ausgedrückt in den Coefficienten der gegebenen Functionen f und φ.

§ 11. Eigenschaften der Resultante $R_{f,\varphi}$.

138. *Darstellung der Methode zur Ermittelung dieser Eigenschaften.* Nach den Entwicklungen des vorhergehenden Paragraphen haben wir die Resultante zweier Functionen

$$\left.\begin{aligned} \overset{m}{f}(x) &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} \ldots + a_m \\ \overset{n}{\varphi}(x) &= b_0 x^n + b_1 x^{n-1} \ldots + b_n \end{aligned}\right\} m > n$$

in Form einer Determinante vom Grade $m + n$ erhalten, nämlich:

$$R_{f,\varphi} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots a_m & 0 & \ldots 0 \\ 0 & a_0 & a_1 \ldots\ldots & a_m & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots\ldots & a_0 & a_1 & \ldots a_m \\ b_0 & b_1 & b_2 \ldots b_n & 0 & \ldots 0 \\ 0 & b_0 & b_1 \ldots\ldots & b_n & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots\ldots & b_0 & b_1 & \ldots b_n \end{vmatrix}.$$

Gerade aus diesem Umstande lassen sich zahlreiche Eigenschaften derselben einfach dadurch herleiten, dass wir diese Determinante geeignet umformen, ohne ihren Werth zu ändern. Die umgestaltete Determinante wiederum als Resultante anderer Functionen mit entsprechenden Coefficienten betrachtet, lässt dann direct die Eigenschaften erkennen. Diese Umformungen sind zweierlei Art; einmal lediglich Vertauschungen von Zeilen oder Reihen, dann aber auch Addition von Reihen, die mit gewissen Grössen multiplicirt gedacht werden, zu andern Reihen.

139. *Vertauschung der letzten m Zeilen mit den n ersten.* Bringt man in der Determinante $R_{f,\varphi}$ die Zeilen mit dem Index $n+1$, $n+2, \cdots n+m$ an die ersten Stellen, und fügt die m ersten Zeilen an die so erhaltene letzte Zeile an, so entsteht

$$\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \dots b_n & 0 \dots 0 \\ 0 & b_0 & b_1 \dots \dots b_n \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & \dots & \dots b_0 \; b_1 \dots b_n \\ a_0 & a_1 & a_2 \dots a_m \; 0 \dots 0 \\ 0 & a_0 & a_1 \dots \dots a_m \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & \dots & \dots a_0 \; a_1 \dots a_m \end{vmatrix} .$$

Das Diagonalglied hat in seinen ersten Indices die Permutation

$$(n+1,\ n+2 \dots n+m,\ 1\ 2\ 3 \dots n),$$

jede der m ersten Zahlen bildet mit den folgenden n Derangements, so dass die Anzahl aller $n \cdot m$ ist. Wir haben daher die Beziehung

$$R_{f,\varphi} = (-1)^{n \cdot m} R_{\varphi,f} .$$

140. *Transposition der Resultante.* Wendet man auf die Resultante eine zweimalige Transposition an, zunächst durch eine Umklappung um die zweite Diagonale, sodann durch eine zweite Umklappung um die erste Diagonale der erhaltenen neuen Matrix, so erhalten wir eine Matrix, in welcher die Elemente genau in umgekehrter Reihenfolge auftreten, nämlich

$$R = \begin{vmatrix} b_n & b_{n-1} & b_{n-2} \dots b_0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & b_n & b_{n-1} \dots \dots b_0 & & \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \\ 0 & \dots & \dots b_n \; b_{n-1} \dots b_0 & & \\ a_m & a_{m-1} & \dots \dots a_0 \dots \dots & & 0 \\ 0 & a_m & \dots \dots a_0 \dots \dots & & \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \\ 0 & \dots & \dots a_m \dots & & a_0 \end{vmatrix} .$$

Da die Transposition das Vorzeichen einer Determinante nicht ändert, so ist

$$\text{(I)} \qquad R = R_{f,\varphi} .$$

Nun ist aber diese Determinante nichts anderes als die Resultante der Gleichungen

$$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0 = x^n \cdot \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0 = x^m \cdot f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Die Relation (I) giebt daher den Satz:

$$R_{f,\varphi} = R_{x^n \varphi\left(\frac{1}{x}\right),\; x^m f\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

141. *Resultante von* $f(\lambda x)$ *und* $\varphi(\lambda x)$. Ersetzen wir in den Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ die Veränderliche x durch $\lambda \cdot x$, so erhalten wir

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} f(\lambda x) = a_0 \lambda^m x^m + a_1 \lambda^{m-1} x^{m-1} + \cdots \lambda^0 a_m \\ \varphi(\lambda x) = b_0 \lambda^n x^n + b_1 \lambda^{n-1} x^{n-1} + \cdots \lambda^0 b_n. \end{cases}$$

Dasselbe Resultat ergiebt sich, wenn wir in $f(x)$ und $\varphi(x)$ a_0 durch $\lambda^m a_0$, a_1 durch $\lambda^{m-1} a_1$ . . . u. s. w., b_0 durch $\lambda^n b_0$, b_1 durch $\lambda^{n-1} b_1$ u. s. w. ersetzen. Die Resultante der Functionen $f(\lambda x)$ und $\varphi(\lambda x)$ ergiebt sich also aus der Resultante von $f(x)$ und $\varphi(x)$, durch Substitution dieser Werthe für a_i und b_i, d. h. es wird

$$R_{f(\lambda x),\, \varphi(\lambda x)} = \begin{vmatrix} \lambda^m a_0 & \lambda^{m-1} a_1 & \lambda^{m-2} a_2 \ldots 0 \\ 0 & \lambda^m a_0 & \lambda^{m-1} a_2 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \;. \;. \;. \; \lambda^m a_0 & \ldots \lambda^0 a_m \\ \lambda^n b_0 & \lambda^{n-1} b_1 \ldots \lambda^0 b_n & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda^n b_0 & \lambda^{n-1} b_1 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 \;. \;. \;. & \lambda^n b_0 & \ldots \lambda_0 b_n \end{vmatrix}.$$

Genau dieselbe Resultante erhält man aber, wenn wir in $R_{f,\varphi}$ die erste Colonne mit λ^{m+n-1}, die zweite mit λ^{m+n-2}, die letzte mit λ^0, also insgesammt mit $\lambda^{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}}$ multipliciren und hierauf die erste Zeile mit λ^{n-1}, die zweite mit λ^{n-2} . . ., die n^{te} mit λ^0, die $(n+1)^{\text{te}}$ mit λ^{m-1}. . ., die $(n+m)^{\text{te}}$ mit λ^0, also insgesammt mit $\lambda^{\frac{n(n-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2}}$ dividiren. Dadurch erhält aber $R_{f,\varphi}$ schliesslich den Factor $\lambda^{m \cdot n}$, so dass wir zu dem Resultate gelangen:

$$R_{f(\lambda x),\, \varphi(\lambda x)} = \lambda^{m \cdot n} R_{f,\varphi}.$$

Daraus geht zunächst hervor, dass jedes Glied der Resultante $R_{f,\varphi}$ so beschaffen sein muss, dass es bei Substitution von $a_0 \lambda^m$, $a_1 \lambda^{m-1}$ . . .,

$a_m \lambda^0$, $b_0 \lambda^n$, $b_1 \lambda^{n-1} \ldots$, $b_n \lambda^0$ für $a_0 a_1 \ldots a_m$, $b_0 b_1 \ldots b_n$ den Factor $\lambda^{m \cdot n}$ erhält. Aus Gründen der Symmetrie folgt, dass das Nämliche eintritt bei den Substitutionen $a_0 \lambda^0$, $a_1 \lambda^1 \ldots a_m \lambda^m$, $b_0 \lambda^0$, $b_1 \lambda^1 \ldots b_n \lambda^n$ für $a_0 a_1 \ldots a_m$, $b_0 b_1 \ldots b_n$. Demgemäss haben alle Glieder der Resultante die Eigenschaft, dass in ihnen die Summe aller Indices der darin auftretenden Coefficienten a_i und b_i — jeden Index i so oftmal genommen als der bezügliche Exponent von a_i oder b_i angiebt — eine constante Zahl nämlich gleich $m \cdot n$ ist. Man nennt diese Zahl $m \cdot n$ das Gewicht der Resultante, und sagt, die Resultante ist eine isobare Function der Coefficienten von $f(x)$ und $\varphi(x)$.

142. *Schnittpuncte zweier Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung.* Die Eigenschaft der Resultante, eine isobare Function zu sein, können wir benutzen, in einfacher Weise über die Zahl der Schnittpunkte zweier algebraischer Curven Aufschluss zu erhalten. Denken wir uns nämlich, entsprechend den Factoren λ^0, λ^1, $\lambda^2 \ldots$ u. s. w., die Grössen a_0 und b_0 als Functionen nullten Grades in ξ und η, die Grössen a_1 und b_1 als homogene Functionen ersten, und allgemein die Grössen a_ϱ und b_ϱ als homogene Functionen ϱ^{ten} Grades in ξ und η, so ist jedes Glied der Resultante eine homogene Function $m \cdot n^{\text{ten}}$ Grades dieser zwei Veränderlichen, wie sein Gewicht $m \cdot n$ lehrt.

Sind nun $\overset{m}{f}(xy) = 0$ und $\overset{n}{\varphi}(xy) = 0$ zwei Gleichungen, welche homogen geschrieben und nach x_1 geordnet die Form besitzen:

$$\overset{m}{f}(x_1 x_2 x_3) = a_0 x_1^m + a_1 x_1^{m-1} + a_2 x_1^{m-2} \ldots + a_m = 0$$

$$\overset{n}{\varphi}(x_1 x_2 x_3) = b_0 x_1^n + b_1 x_1^{n-1} + b_2 x_2^{n-2} \ldots + b_n = 0,$$

dann sind in ihnen die Coefficienten a_0, b_0; a_1, b_1; a_2, b_2 u. s. w. solche homogene Functionen von x_2 und x_3 vom bezw. 0ten, 1ten, 2ten Grade u. s. w. Bildet man also die Resultante $R_{f,\varphi}$ nach x_1, so erhält man in ihr eine homogene ganze Function von x_2 und x_3, die nach dem Vorausgehenden vom Grade $m \cdot n$ ist. Deutet man daher f und φ geometrisch als Curvengleichungen, so hat man den Satz: Zwei Curven m^{ter} bezw. n^{ter} Ordnung besitzen $m \cdot n$ gemeinsame Schnittpuncte*).

143. *Die Resultante als Functionaldeterminante.* Eine weitere Reihe von Eigenschaften der Resultante lässt sich durch eine Betrachtungsweise derselben erkennen, die zuerst von Sylvester hierbei eingeführt

*) Dieser Satz wurde hier auf rationalem Wege abgeleitet. Eine gleiche rationale Methode, zu zeigen dass drei Flächen bezw. m^{ten}, p^{ten} und q^{ten} Grades sich in mpq Punkten schneiden, besitzen wir noch nicht.

wurde. Bildet man sich aus den Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ der Reihe nach die Functionen

$$x^0 \cdot f,\ x^1 \cdot f,\ x^2 \cdot f,\ x^3 \cdot f \ldots x^{n-1} \cdot f$$
$$x^0 \cdot \varphi,\ x^1 \cdot \varphi,\ x^2 \cdot \varphi,\ x^3 \cdot \varphi \ldots x^{m-1} \cdot \varphi,$$

so kann man sich darin die Potenzen x^k durch ξ_k ersetzt denken, wodurch wir $m+n$ lineare Functionen der $m+n$ Grössen

$$\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_k \ldots \xi_{n+m-1}$$

erhalten. Die partiellen Differentialquotienten nach diesen $m+n$ Grössen sind gerade die Coefficienten der Functionen f und φ, und es ist daher

$$R_{f,\varphi} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(x^{n-1}f)}{\partial \xi_{n+m-1}}, & \frac{\partial(x^{n-1}f)}{\partial \xi_{n+m-2}}, & \frac{\partial(x^{n-1}f)}{\partial \xi_{n+m-3}} & \ldots & \frac{\partial(x^{n-1}f)}{\partial \xi_0} \\ \frac{\partial(x^{n-2}f)}{\partial \xi_{n+m-1}}, & \frac{\partial(x^{n-2}f)}{\partial \xi_{n+m-2}}, & \ldots & \ldots & \frac{\partial(x^{n-2}f)}{\partial \xi_0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial(x^{m-1}\varphi)}{\partial \xi_{n+m-1}}, & \frac{\partial(x^{m-1}\varphi)}{\partial \xi_{n+m-2}}, & \frac{\partial(x^{m-1}\varphi)}{\partial \xi_{n+m-3}} & \ldots & \frac{\partial(x^{m-1}\varphi)}{\partial \xi_0} \\ \frac{\partial(x^{m-2}\varphi)}{\partial \xi_{n+m-1}} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial(x^0\varphi)}{\partial \xi_{n+m-1}}, & \frac{\partial(x^0\varphi)}{\partial \xi_{n+m-2}}, & \frac{\partial(x^0\varphi)}{\partial \xi_{n+m-3}} & \ldots & \frac{\partial(x^0\varphi)}{\partial \xi_0} \end{vmatrix}.$$

Man kann daher in diesem Sinne auch kürzer schreiben:

$$R_{f,\varphi} = \begin{pmatrix} x^{n-1}f, & x^{n-2}f \ldots x^0 f, & x^{m-1}\varphi, & x^{m-2}\varphi \ldots x^0\varphi \\ x^{n+m-1}, & x^{n+m-2} \ldots\ldots x^n, & & x^{n-1} \ldots x^0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist also in der obern Reihe dieses Ausdruckes, den wir früher mit Zähler bezeichnet haben, jede Potenz von x durch ξ mit dem entsprechenden Index ersetzt zu denken, und die Grössen der untern Reihe, welcher wir seinerzeit den Namen Nenner gaben, sind jene Grössen ξ_{n+m-1}, $\xi_{n+m-2} \ldots \xi_0$, von welchen wir alle Functionen im Zähler als linear abhängig zu betrachten haben. Wir werden im Folgenden auch noch Functionaldeterminanten betrachten, in deren Nenner selbst lineare Functionen der ξ_k sich befinden, so dass alsdann die Grössen des Zählers nicht nur linear in ξ_k, sondern auch noch linear in diesen linearen Functionen der ξ_k zu denken sind. (Vergleiche auch das Beispiel in Nr. 149.)

144. *Methode für die folgenden Betrachtungen.* Das wesentlichste Hilfsmittel bei allen folgenden Untersuchungen wird der bereits in

Nr. 117 aufgestellte Productsatz für Functionaldeterminanten bilden, welcher dort dargestellt wurde durch

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \dots y_n \\ x_1 & x_2 & x_3 \dots x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \dots z_n \\ y_1 & y_2 & y_3 \dots y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \dots z_n \\ x_1 & x_2 & x_3 \dots x_n \end{pmatrix}.$$

Dabei werden wir jene Determinanten, mit denen wir multipliciren, stets so wählen, dass sie den Werth 1 besitzen. Man erreicht dies durch solche Wahl der Functionen und ihrer unabhängig Veränderlichen, dass diejenigen partiellen Differentialquotienten derselben, welche in die Diagonale zu stehen kommen, den Werth 1, alle rechts davon befindlichen aber oder alle links in der Matrix stehenden verschwinden. An Stelle der Multiplication tritt bisweilen auch Division, d. h. anstatt mit der Functionaldeterminante

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \dots z_n \\ y_1 & y_2 & y_3 \dots y_n \end{pmatrix}$$

zu multipliciren, nehmen wir die gleichsam gestürzte Form

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \dots y_n \\ z_1 & z_2 & z_3 \dots z_n \end{pmatrix}$$

als Multiplicator, eine Determinante, die nothwendig gleichfalls den Werth 1 besitzt, wenn ihn die ursprüngliche besass, wie ja aus dem Satze (vgl. Nr. 118)

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \dots y_n \\ x_1 & x_2 & x_3 \dots x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \dots x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 \dots y_n \end{pmatrix} = 1$$

direct hervorgeht.

145. *Berechnung von $R_{f+\varphi\psi,\varphi}$.* Sei ψ irgend eine Function von x

$$\psi = c_0 x^{q-1} + c_1 x^{q-2} \dots c_q,$$

wo $q \leqq m - n$ ist. Bilden wir die Producte

$$\varphi \cdot \psi \cdot x^{n-1},\ \varphi \cdot \psi \cdot x^{n-2} \dots \varphi \cdot \psi \cdot x^0,$$

ersetzen darin die Potenzen x^k durch ξ_k, so stellt die Functionaldeterminante

$$A = \begin{pmatrix} x^{n-1}(f+\varphi\cdot\psi), & x^{n-2}(f+\varphi\cdot\psi) \,.\,.\, x^0(f+\varphi\cdot\psi), & x^{m-1}\varphi, & x^{m-2}\varphi \,.\,.\, x^0\varphi \\ x^{n-1}f & , x^{n-2}f, \dots\dots \quad x^0 f & , x^{m-1}\varphi, & x^{m-2}\varphi \,.\,.\, x^0\varphi \end{pmatrix}$$

eine Determinante dar vom Werthe 1. Denn jede Grösse im Zähler ist eine lineare Function aller Grössen im Nenner, und zwar so beschaffen, dass die partiellen Differentialquotienten nach denselben für die Diagonalelemente die Werthe 1, für die links gelegenen die Werthe Null liefern, wie dies ein einfaches Beispiel klar machen mag. Ich nehme an $m = 3$, $q = 1$, $n = 2$, dann ist die erste Function im

Zähler, wenn wir uns die Grössen ξ_k eingetragen denken, dargestellt durch

$$z_1 = (a_0\xi_4 + \alpha_1\xi_3 + a_2\xi_2 + a_3\xi_1) + c_0(b_0\xi_4 + b_1\xi_3 + b_2\xi_2) \\ + c_1(b_0\xi_3 + b_1\xi_2 + b_2\xi_1).$$

Die Variabeln der Nenner sind:

$$\eta_1 = a_0\xi_4 + a_1\xi_3 + a_2\xi_2 + a_3\xi_1,\ \eta_2 = a_0\xi_3 + a_1\xi_2 + a_2\xi_1 + a_3\xi_0,$$
$$\eta_3 = b_0\xi_4 + b_1\xi_2 + b_2\xi_1,\ \eta_4 = b_0\xi_3 + b_1\xi_2 + b_2\xi_1,\ \eta_5 = b_0\xi_0 + b_1\xi_1 + b_2\xi_0.$$

Die Differentiation nach diesen Grössen liefert als Elemente der ersten Zeile der Reihe nach

$$1,\ 0,\ c_0,\ c_1,\ 0$$

u. s. w. Die Determinante A ist also in der That eine Determinante von der in Nr. 144 erwähnten Eigenschaft: sie hat den Werth 1.

Berechnen wir nun das Product

$$A \cdot R_{f,\varphi} = 1 \cdot R_{f,\varphi},$$

so entsteht gemäss dem Productsatze

$$R_{f,\varphi} = \begin{pmatrix} x^{n-1}(f+\varphi\cdot\psi), & x^{n-2}(f+\varphi\cdot\psi)\ldots x^0(f+\varphi\cdot\psi), & x^{m-1}\varphi\ldots\varphi \\ x^{m+n-1} & , x^{m+n-2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & x^2,\ x^1,\ x^0 \end{pmatrix},$$

oder

$$\text{(I)} \quad R_{f,\varphi} = R_{f+\varphi\cdot\psi,\varphi},$$

d. h.: „Die Resultante von f und φ ist auch gleich der Resultante von $f+\varphi\cdot\psi$ und φ, wenn ψ eine beliebige Function vom Grade $q \leqq m-n$ ist.“

Anmerkung. Indem wir die Einschränkung machten $q \leqq m-n$, setzen wir, wie schon mehrmals erwähnt, voraus $m > n$. Es wäre eine schätzenswerthe Arbeit, auch den Fall zu untersuchen, in welchem $m < n$ ist, d. h. allgemein die Frage zu behandeln: Wie hängen die Resultante $R_{f+\varphi\cdot\psi,\varphi}$ und $R_{f,\varphi}$ zusammen, wenn wir über den Grad der diesbezüglichen Functionen keinerlei Voraussetzung machen?

146. *Beispiel.* Ein besonders häufiger Fall, in welchem von diesem Satze Gebrauch gemacht wird, ist jener, in welchem die Function ψ eine Constante λ ist. Man hat alsdann:

$$R_{f,\varphi} = R_{f+\lambda\varphi,\varphi}.$$

In diesem Falle ist der Satz auch leicht durch Zerlegung der Determinante $R_{f+\lambda\varphi,\varphi}$ zu erkennen. Sei z. B.

$$f = a_0x^2 + a_1x + a_2$$
$$\varphi = b_0x^2 + b_1x + b_2,$$

dann ist

$$R_{f+\lambda\varphi,\varphi} = \begin{vmatrix} a_0+\lambda b_0, & a_1+\lambda b_1, & a_2+\lambda b_2, & 0 \\ 0 & a_0+\lambda b_0, & a_1+\lambda b_1, & a_2+\lambda b_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Zerlegt man diese Determinante nach Nr. 37 in eine Summe von Determinanten, so sieht man leicht, dass alle bis auf

$$R_{f,\varphi} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden, dass also die Beziehung besteht

$$R_{f+\lambda\varphi,\varphi} = R_{f,\varphi}.$$

147. *Resultante von* $f(x+u)$ und $\varphi(x+u)$. Ersetzen wir in den Functionen f und φ die Veränderliche x durch $x+u$, so erhalten wir

$$f(x+u) = a_0(x+u)^m + a_1(x+u)^{m-1} \cdots + a^m$$
$$\varphi(x+u) = b_0(x+u)^n + b_1(x+u)^{n-1} \cdots + b_n.$$

Um die Resultante der so transformirten Functionen zu gewinnen, bilden wir zunächst folgende drei Functionaldeterminanten:

$$\begin{pmatrix} (x+u)^{m+n-1}, & (x+u)^{m+n-2}, \ldots (x+u)^0 \\ x^{m+n-1} & , \; x^{m+n-2}, \; . \; . \; . \; x^0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (x+u)^{n-1}f, (x+u)^{n-2}f, .. (x+u)^0 f, & x^{m-1}\varphi \;, & x^{m-2}\varphi \; . \; . \; . \; x^0\varphi \\ x^{n-1}f \quad , x^{n-2}f, \; . \; . \; . \quad x^0 f & , x^{m-1}\varphi \;, & x^{m-2}\varphi \; . \; . \; . \; x^0\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (x+u)^{n-1}f, (x+u)^{n-2}f, .. (x+u)^0 f, (x+u)^{m-1}\varphi, (x+u)^{m-2}\varphi .. (x+u)^0\varphi \\ (x+u)^{n-1}f, (x+u)^{n-2}f, \; . \; . \; . \; . \; . \; , x^{m-1}\varphi \quad , x^{m-2}\varphi \; . \; . \; . \; x^0\varphi \end{pmatrix}$$

und bezeichnen die erste mit A, die zweite mit B, die dritte mit C. Ersetzen wir wieder in allen darin auftretenden Grössen die x^k durch ξ_k und denken uns die Differentiationen nach den Grössen im Nenner ausgeführt, so sieht man, dass alle drei Determinanten als Diagonalelemente die Zahl 1, und links davon nur verschwindende Elemente besitzen. So sind z. B. die Elemente der ersten Determinante den Zeilen nach

$$\begin{matrix} 1 & \binom{m+n-1}{1}u, & \binom{m+n-1}{2}u^2 \ldots u^{m+n-1} \\ 0 & 1 & \binom{m+n-2}{1}u \; \ldots u^{m+n-2} \\ 0 & 0 & 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; u^{m+n-3} \end{matrix}$$

u. s. w. Ebenso sind die ersten Zeilen der zweiten Determinante

$$\begin{matrix} 1 & \binom{n-1}{1}u, & \binom{n-1}{2}u^2 \ldots u^{n-1} \; 0 \; 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & \binom{n-2}{1}u \; \ldots u^{n-2} \; 0 \; 0 \ldots \\ 0 & 0 & 1 \quad \ldots u^{n-3} \; 0 \; 0 \ldots \end{matrix}$$

u. s. w. Multipliciren wir mit den beiden letzten Determinanten die

Resultante $R_{f,\varphi}$, und dividiren wir das Product durch die erste, so erhalten wir

$$R_{f,\varphi} \cdot B \cdot C : A = R_{f,\varphi}$$

$$= \begin{pmatrix} (x+u)^{n-1}f & , (x+u)^{n-2}f \ldots (x+u)^0 f, & (x+u)^{m-1}\varphi \ldots (x+u)^0\varphi \\ (x+u)^{n+m-1}, & (x+u)^{n+m-2} \ldots \ldots \ldots & (x+u)^0 \end{pmatrix}.$$

Der Ausdruck rechts ist aber nichts anderes als die Resultante der beiden Functionen $f(x+u)$, $\varphi(x+u)$; daher das Resultat:

$$R_{f,\varphi} = R_{f(x+u),\ \varphi(x+u)}. \qquad (1)$$

Diese Relation definirt in Verbindung mit den beiden früher erhaltenen

$$R_{f,\varphi} = \frac{1}{\lambda^{mn}} \cdot R_{f(\lambda x), \varphi(\lambda x)} \qquad (2)$$

und

$$R_{f,\varphi} = R_{x^n f\left(\frac{1}{x}\right),\ x^m \varphi\left(\frac{1}{x}\right)} \qquad (3)$$

die Resultante als Invariante der beiden Formen f und φ.

Eine Invariante J ist, wie wir später noch eingehender betrachten werden, eine solche homogene Function der Coefficienten von $f(x)$ und $\varphi(x)$, welche sich bei linearer Transformation höchstens um eine Potenz der Transformationsdeterminante $\Delta = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2$ von jener Function unterscheidet, die genau in derselben Weise aus den Coefficienten der linear transformirten Functionen $f(\alpha_1\xi + \alpha_2\eta)$ und $\varphi(\beta_1\xi + \beta_2\eta)$ gebildet ist wie J selbst. Aus den drei Substitutionen

$$x = \xi + u,\ x = \frac{1}{\xi},\ \ x = \lambda\xi$$

lässt sich aber jede lineare Transformation zusammensetzen.

148. *Reduction der* $(m+n)$*reihigen Determinante* $R_{f,\varphi}$. Betrachten wir die Resultante

$$A = \begin{pmatrix} x^{n-1} & , x^{n-2} \ldots x^0, & x^{m-1}\varphi, & x^{m-2}\varphi \ldots x^0\varphi \\ x^{m+n-1}, & x^{m+n-2} \ldots \ldots \ldots & & x^1, x^0 \end{pmatrix}$$

und wenden auf sie die in Nr. 139 durchgeführte Vertauschung der Zeilen an, so erhalten wir

$$A = (-1)^{m \cdot n} \begin{pmatrix} x^{m-1}\varphi & , x^{m-2}\varphi \ldots x^0\varphi, & x^{n-1}, & x^{n-2} \ldots x^0 \\ x^{m+n-1}, & x^{m+n-2} \ldots \ldots \ldots & & x^1, x^0 \end{pmatrix}.$$

Der Ausdruck rechts ist eine Determinante — immer vorausgesetzt, dass x^k durch ξ_k ersetzt ist —, deren m erste Diagonalelemente den Werth b_0 und deren n letzte Diagonalelemente den Werth 1 haben. Alle Elemente links der Diagonale sind null; sie reducirt sich also auf

$$A = (-1)^{m \cdot n}\ b_0^m.$$

Dividiren wir daher die Resultante $R_{f,\varphi}$ mit A, so erhalten wir

$$R_{f,\varphi}\cdot\frac{1}{(-1)^{m\cdot n}b_0^m}$$

$$=\begin{pmatrix}x^{m+n-1}, & x^{m+n-2} \ldots\ldots x^0 \\ x^{n-1}, & x^{n-2}\ldots x^{m-1}\varphi\ldots x^0\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^{n-1}f, & x^{n-2}f\ldots f, x^{m-1}\varphi\ldots\varphi \\ x^{m+n-1}, & x^{m+n-2}\ldots\ldots x^0\end{pmatrix}$$

$$R_{f,\varphi}=(-1)^{mn}\cdot b_0^m\begin{pmatrix}x^{n-1}f, & x^{n-2}f\ldots x^0f, & x^{m-1}\varphi\ldots x^0\varphi \\ x^{n-1}, & x^{n-2}\ldots x^0, & x^{m-1}\varphi\ldots x^0\varphi\end{pmatrix},$$

oder endlich (vgl. Nr. 116) nach Unterdrückung gleicher übereinander stehender Grössen:

$$\text{(I)}\qquad R_{f,\varphi}=(-1)^{m\cdot n}b_0^m\begin{pmatrix}x^{n-1}f, & x^{n-2}f, & x^{n-3}f\ldots x^0f \\ x^{n-1}, & x^{n-2} & \ldots\ldots x^0\end{pmatrix}.$$

Hierbei sind die Functionen im Zähler noch immer als Function sowohl der noch vorhandenen als der unterdrückten Grössen zu betrachten, so dass also keineswegs der Ausdruck rechts, wie es auf den ersten Blick erscheinen möchte, von den Coefficienten b von φ unabhängig ist. Die Resultante als Determinante vom Grade $m+n$ ist somit reducirt auf eine vom Grade n.

149. *Beispiel.* Ich will das eben erhaltene Resultat noch durch ein Beispiel erläutern, indem ich die Resultante einer cubischen und quadratischen Form auf Grund desselben aufstelle. Es sei

$$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a^3$$
$$\varphi(x)=b_0x^2+b_1x+b_2.$$

Dann ist die Resultante der beiden Functionen dargestellt durch

$$R_{f,\varphi}=(-1)^6\cdot b_0^3\begin{pmatrix}x^1f, & x^0f, & x^2\varphi, & x^1\varphi, & x^0\varphi \\ x^1, & x^0, & x^2\varphi, & x^1\varphi, & x^0\varphi\end{pmatrix}=b_0^3\begin{pmatrix}x^1f, & x^0f \\ x^1, & x^0\end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir also die Functionen im Zähler mit $y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5$ und führen im Sylvester'schen Sinne ξ_k ein, so erhalten wir

$$y_1=a_0\xi_4+a_1\xi_3+a_2\xi_2+a_3\xi_1$$
$$y_2=a_0\xi_3+a_1\xi_2+a_2\xi_1+a_3\xi_0$$
$$y_3=b_0\xi_4+b_1\xi_3+b_2\xi_2$$
$$y_4=b_0\xi_3+b_1\xi_2+b_2\xi_1$$
$$y_5=b_0\xi_2+b_1\xi_1+b_2\xi_0.$$

Ich eliminire nun aus y_1 und y_2 die Grössen $\xi_1\ \xi_3\ \xi_2$ vermittelst der linearen Function $y_3\ y_4\ y_5$ in folgender Weise. Es ist

$$y_1:y_3=(a_0\xi_4+a_1\xi_3\ldots):(b_0\xi_4+b_1\xi_3+b_2\xi_2)=\frac{a_0}{b_0}+f_1,\qquad(1)$$

wo mit f_1 der noch von ξ_3 und ξ_2 abhängige Rest

$$f_1 = \frac{1}{b_0}(b_0 a_1)\xi_3 + \frac{1}{b_0}(b_0 a_2)\xi_2 + a_3 \xi_1$$

bezeichnet sei. Aus diesem Reste wird ξ_3 durch Division y_4 eliminirt. Man erhält

$$f_1 : y_4 = \frac{(b_0 a_1)}{b_0^2} + f_2, \tag{2}$$

wobei f_2 der Rest ist:

$$f_2 = \frac{b_0(b_0 a_2) - b_1(b_0 a_1)}{b_0^2}\xi_2 + \frac{b_0^2 a_3 - b_2(b_0 a_1)}{b_0^2}\xi_1.$$

Eliminirt man endlich hieraus durch Division mit y_5 auch ξ_2, so kommt:

$$f_2^* : y_5 = \frac{b_0(b_0 a_2) - b_1(b_0 a_1)}{b_0^3} + \frac{1}{b_0^3}\left\{b_0^3 a_3 - b_0 b_2(b_0 a_1) - b_0 b_1(b_0 b_2) + b_1^2(b_0 a_1)\right\}\xi_1$$
$$- \frac{1}{b_0^3}\left\{b_2 b_0(b_0 a_2) - b_2 b_1(b_0 a_1)\right\}\xi_0. \tag{3}$$

Trägt man diese Reste in (2) und (1) successive ein, so kommt:

$$y_1 = \frac{a_0}{b_0} y_3 + \frac{(b_0 a_1)}{b_0^2} y_4 + \frac{b_0(b_0 a_2) - b_1(b_0 a_1)}{b_0^3} y_5 \tag{4}$$
$$+ \frac{1}{b_0^3}\left\{[b_0^3 a_3 - b_0 b_2(b_0 a_1) - b_0 b_1(b_0 a_2) + b_1^2(b_0 a_1)]\xi_1 - [b_2 b_0(b_0 a_2) - b_2 b_1(b_0 a_1)]\xi_0\right\}.$$

Damit ist die erste Grösse xf des Zählers als eine lineare Function der Grössen ξ_k und anderer Grössen y_i, die selbst wieder linear in ξ_k sind, dargestellt. Ebenso erhalten wir für die zweite Function $x^0 \cdot f$

$$y_2 = \frac{a_0}{b_0} y_4 + \frac{(b_0 a_1)}{b_0^2} y_5 + \frac{1}{b_0^2}\left\{[b_0(b_0 a_2) - b_1(b_0 a_1)]\xi_1 + [a_3 b_0^2 - b_2(b_0 a_1)]\xi_0\right\}. \tag{5}$$

Die Resultante der beiden Functionen ist also:

$$R_{f,\varphi} = b_0^3 \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ x^1 & x^0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{b_0^3}{b_0^3 b_0^2}\begin{vmatrix} b_0^3 a_3 - b_0 b_2(b_0 a_1) - (b_0 a_2) b_0 b_1 + b_1^2(b_0 a_1), & b_2 b_0(b_0 a_2) - b_2 b_1(b_0 a_1) \\ b_0(b_0 a_2) - b_1(b_0 a_1), & a_3 b_0^2 - b_2(b_0 a_1) \end{vmatrix}.$$

Ersetzt man in den Gleichungen (4) und (5) y_3, y_4, y_5 durch $x^2\varphi$, $x\varphi$, φ und hierauf ξ_k wieder durch x^k, so erhält man:

$$x^1 \cdot f = \left\{\frac{a_0}{b_0} x^2 + \frac{(b_0 a_1)}{b_0^2} x + \frac{b_0(b_0 a_2) - b_1(b_0 a_1)}{b_0^3}\right\} \cdot \varphi + g_1(x) \tag{6}$$
$$= p_1(x) \cdot \varphi + g_1(x),$$

$$x^0 \cdot f = \left\{\frac{a_0}{b_0} x + \frac{(b_0 a_1)}{b_0}\right\} \varphi + g_2(x) = p_2(x) \cdot \varphi + g_2(x). \tag{7}$$

Hier sind $g_1(x)$ und $g_2(x)$ Functionen vom ersten Grade in x, und zwar, wie aus (6) und (7) erkennbar ist, die Reste, welche sich bei Division von $x^1 \cdot f$ bezw. $x^0 \cdot f$ durch φ ergeben.

Gehe ich also von diesem speciellen Beispiele zum allgemeinen Falle über, der ja ganz in derselben Weise behandelt werden kann, so ergiebt sich die Bedeutung der Grössen, welche den Zähler der Resultante (I) in Nr. 148 bilden. Sie sind nichts anderes als die n Reste $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, welche man erhält durch Division von

$$x^{n-1}f,\ x^{n-2}f,\ x^{n-3}f,\ x^0 f$$

mit der Function φ, und die Resultante zweier Functionen f und φ ist bis auf einen Zahlenfactor gleich der Functionaldeterminante dieser n Reste, wenn sie als lineare Functionen von ξ_k gedacht werden.

150. *Reduction der Determinante $R_{f,\varphi}$, wenn die beiden Functionen f und φ vom gleichen Grade sind.* Wir sind im Vorhergehenden zu einem Resultate gelangt, das für den Fall, in welchem f und φ vôn gleichem Grade in x bereits von Bézout erreicht wurde. Ist nämlich

$$f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$
$$\varphi = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_n,$$

so gewinnen wir mit Bézout die Resultante

$$R_{f,\varphi} = \begin{pmatrix} x^{n-1}f, & x^{n-2}f \dots x^0 f, & x^{n-1}\varphi, & x^{n-2}\varphi \dots x^0\varphi \\ x^{2n-1}, & x^{2n-2} \dots x^n, & x^{n-1} \dots\dots\dots & x^0 \end{pmatrix}$$

in folgender Weise. Zunächst multipliciren wir die Determinante $R_{f,\varphi}$ mit der Functionaldeterminante

$$\begin{pmatrix} A_{n-1}\varphi - B_{n-1}f, & A_{n-2}\varphi - B_{n-2}f, \dots, & A_0\varphi - B_0 f, & x^{n-1}\varphi, \dots \varphi \\ x^{n-1}f & , \quad x^{n-2}f & , \dots, \quad x^0 f & , x^{n-1}\varphi, \dots \varphi \end{pmatrix} = B,$$

wobei

$$A_{n-1} = a_0 x^{n-1} \dots + a_{n-1},\ B_{n-1} = b^0 x^{n-1} \dots + b_{n-1}$$
$$A_{n-2} = a^0 x^{n-2} \dots + a_{n-2},\ B_{n-2} = b_0 x^{n-2} \dots + b_{n-2}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A_0 = a_0 \qquad\qquad ,\quad B_0 = b_0.$$

Um den Werth der letzteren zu ermitteln, stürzen wir in dieser Determinante die Matrix der ersten n Zeilen und die Matrix der letzten Zeilen und hierauf ebenso die der ersten n Colonnen und die der letzten n Colonnen. Dadurch wird aus B:

$$\begin{pmatrix} A_0\varphi - B_0 f, & A_1\varphi - B_1 f, \dots, & A_{n-1}\varphi - B_{n-1}f, & x^0\varphi, \dots x^{n-1}\varphi \\ x^0 f & , \quad x^1 f, \dots, & x^{n-1}f & , x^0\varphi, \dots x^{n-1}\varphi \end{pmatrix} = B'.$$

Durch diese Vertauschung von Zeilen und Colonnen wird das Vorzeichen nicht geändert, wie man aus dem Diagonalglied der Determinante B' leicht erkennt; es ist sonach

$$B = B'.$$

Führen wir nun die Differentiation nach den im Nenner befindlichen Grössen aus, so erhalten wir

$$B' = \begin{vmatrix} -b_0 & 0 \dots\dots\dots 0 & a_0 & 0 \dots\dots\dots 0 \\ -b_1 & -b_0 \; 0 \dots\dots 0 & a_1 & a_0 \; 0 \\ -b_2 & -b_1 - b_0 \; 0 \dots 0 & a_2 & a_1 \; a_0 \; 0 \dots 0 \\ \dots & \dots\dots\dots 0 & \dots & \dots\dots 0 \\ -b_{n-1} & -b_{n-2} \dots\dots b_0 & a_{n-1} & \dots a_1 \; a_0 \\ 0 & 0 \dots\dots\dots 0 & 1 & 0 \dots\dots 0 \\ 0 \dots & \dots\dots\dots 0 & 0 & 1 \dots\dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots & \dots\dots\dots 0 & 0 & 0 \dots\dots 1 \end{vmatrix}.$$

Da diese Determinante in den letzten n Zeilen, von den Diagonalelementen abgesehen, die durchweg 1 sind, nur verschwindende Elemente besitzt, so zerfällt sie nach dem Laplace'schen Satze in

$$B' = \begin{vmatrix} -b_0 & 0 & 0 \dots 0 \\ -b_1 & -b_0 & 0 \dots 0 \\ -b_2 & -b_1 & -b_0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ -b_{n-1} & -b^{n-2} & \dots b_0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{vmatrix} = (-1)^n . b_0^n .$$

Bilden wir nun das Product $B \cdot R_{f,\varphi}$, so erhalten wir

$$(-1)^n b_0^n . R_{f,\varphi}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_0 x^{n-1} \dots + a_{n-1})\varphi - (b_0 x^{n-1} \dots + b_{n-1}) f \dots, & a_0\varphi - b_0 f, & x^{n-1}\varphi, \dots, x^0\varphi \\ x^{2n-1}, & x^{2n-2} \dots, & x^n, \; x^{n-1}, \dots, x^0 \end{pmatrix}.$$

Um diese Determinante zu reduciren, dividiren wir sie mit der Determinante

$$A = \begin{pmatrix} x^{n-1}, & x^{n-2} \dots x^0, & x^{n-1}\varphi, & x^{n-2}\varphi \dots x^0\varphi \\ x^{2n-1}, & x^{2n-2} \dots\dots & x^{n-1} & \dots\dots\dots x^0 \end{pmatrix},$$

welche ebenfalls den Werth

$$A = (-1)^{n^2} b_0 = (-1)^n b_0^n$$

besitzt.

Wir erhalten

$$\left((-1)^n b_0^n . R_{f,\varphi}\right) : (-1)^n b_0^n$$

$$= \begin{pmatrix} (a_0 x^{n-1} \dots + a_{n-1})\varphi - (b_0 x^{n-1} + \dots b_{n-1}) f \dots, & a_0\varphi - b_0 f, & x^{n-1}\varphi, \dots x^0\varphi \\ x^{n-1}, & x^{n-2}, \dots\dots\dots & x^0, \; x^{n-1}\varphi, \dots x^0\varphi \end{pmatrix},$$

oder, wenn wir die übereinanderstehenden gleichen Grössen unterdrücken und die Matrix der übrigbleibenden n ersten Zeilen stürzen:

$$R_{f.\varphi} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$
$$\begin{pmatrix} a_0\varphi - b_0 f, (a_0 x + a_1)\varphi - (b_0 x + b_1 f)\ldots, (a_0 x^{n-1} \ldots + a_{n-1})\varphi - (b_0 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}) f \\ x_0, \quad x^1, x^2 \ldots, \quad x^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Führen wir die Differentiationen aus, so erhalten wir

$$R_{f,\varphi} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot$$
$$\text{(I)} \begin{vmatrix} (a_0 b_n), & (a_0 b_{n-1}) & , (a_0 b_{n-2}) \ldots \ldots \ldots, & (a_0 b_1) \\ (a_1 b_n), & (a_1 b_{n-1}) + (a_0 b_n), & (a_1 b_{n-2}) + (a_0 b_{n-1}) \ldots \ldots, & (a_0 b_2) \\ (a_2 b_n), & (a_2 b_{n-1}) + (a_1 b_n), & (a_2 b_{n-2}) + (a_1 b_{n-1}) + (a_0 b_n) \ldots, & (a_0 b_3) \\ (a_3 b_n) \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_{n-1} b_n), & (a_{n-2} b_n), & (a_{n-3} b_n) \ldots \ldots \ldots, & (a_0 b_n) \end{vmatrix}.$$

Das Gesetz, nach welchem die Elemente der Determinante gebildet werden, ist hieraus bereits erkenntlich. So ist für $n = 5$

$$R_{f,\varphi} =$$
$$= \begin{vmatrix} (a_0 b_5), & (a_0 b_4) & , (a_0 b_3) & , (a_0 b_2) & , (a_0 b_1) \\ (a_1 b_5), & (a_1 b_4) + (a_0 b_5), & (a_1 b_3) + (a_0 b_4) & , (a_1 b_2) + (a_0 b_3), & (a_0 b_2) \\ (a_2 b_5), & (a_2 b_4) + (a_1 b_5), & (a_2 b_3) + (a_1 b_4) + (a_0 b_5), & (a_1 b_3) + (a_0 b_4), & (a_0 b_3) \\ (a_3 b_5), & (a_3 b_4) + (a_2 b_5), & (a_2 b_4) + (a_1 b_5), & (a_1 b_4) + (a_0 b_5), & (a_0 b_4) \\ (a_4 b_5), & (a_3 b_5), & (a_2 b_5), & (a_1 b_5), & (a_0 b_5) \end{vmatrix}.$$

Man nennt diese Determinante die Bézout'sche Determinante. Sie ist rücksichtlich der zweiten Diagonale symmetrisch; denn es ist das Element

$$a_{n-i,k} = a_{n-k,i}.$$

Für alle wirklichen Berechnungen mittelst Determinanten ist die Darstellung der Resultante in dieser Form die wichtigste, und wir wollen daher dieselbe noch auf eine zweite Art berechnen.

151. *Cayley'sche Methode für die Berechnung der Bézout'schen Determinante.* Vertauschen wir in der Determinante $R_{f,\varphi}$ Nr. 150 (I) die letzte Colonne mit der ersten, die vorletzte mit der zweiten u. s. w., dann kommen die Elemente der zweiten Diagonale in die erste zu stehen, und die Determinante ist nun symmetrisch nach dem Gesetze

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

Das Vorzeichen der Determinante ändert sich hierbei nicht (vergl. Beispiel 3 Nr. 23). Bezeichnen wir nun die n^2 Elemente dieser letzten Determinante der Reihe nach mit

$$\begin{array}{llll} c_{00} & c_{01} & c_{02} & \dots c_{0\,n-1} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \dots c_{1\,n-1} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & \dots c_{2\,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,0} & c_{n-2,0} & \dots & c_{n-1,\,n-1}, \end{array}$$

indem wir einstweilen von der noch nicht streng bewiesenen Symmetrie absehen, so können wir zur Berechnung dieser Elemente den von Cayley angegebenen Weg einschlagen. Cayley bemerkte nämlich, dass der Zähler in $R_{f,\varphi}$ folgende Eigenschaft besitzt. Bildet man die Determinante

$$\frac{1}{y-x}\begin{vmatrix} f(x), & \varphi(x) \\ f(y), & \varphi(y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(x), & \varphi(x) \\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, & \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f(x), & a_0 y^{n-1} + (a_0 x + a_1) y^{n-2} \dots + (a_0 x_{n-1} + \dots a_{n-1}) y^0 \\ \varphi(x), & b_0 y^{n-1} + (b_0 x + b_1) y^{n-2} \dots + (b_0 x^{n-1} + \dots b_{n-1}) y^0 \end{vmatrix},$$

und ordnet ihre Entwicklung nach Potenzen von y, so sind, wie man sieht, die Coefficienten dieser Entwicklung gerade die Grössen im Zähler der Determinante $R_{f,\varphi}$. Wir können daher schreiben:

$$\frac{1}{y-x}\left\{f(x)\varphi(y) - \varphi(x)f(y)\right\}$$

$$= (c_{00}x^{n-1} + c_{01}x^{n-2} + \dots + c_{0,n-1})y^{n-1} + (c_{10}x^{n-1} + c_{11}x^{n-2} + \dots c_{1,n-1})x^{n-2}$$
$$+ \dots + (c_{n-1,0}x^{n-1} + c_{n-1,1}x^{n-2} + \dots + c_{n-1,n-1}x^0)y^0$$
$$= \sum_{\varrho=0,\sigma=0}^{\varrho=n-1,\sigma=n-1} c_{\varrho\sigma} x^{n-\varrho-1} y^{n-\sigma-1}. \qquad \text{(I)}$$

Wir können aber die Determinante $f(x)\varphi(y) - f(y)\varphi(x)$ auch noch auf eine andere Weise entwickeln, wodurch wir Relationen für die Coefficienten c_{ik} gewinnen. Es ist nämlich (vgl. Nr. 82)

$$f(x)\varphi(y) - \varphi(x)f(y) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & x^0 \\ y^n & y^{n-1} & y^{n-2} & \dots & y^0 \end{vmatrix}$$

$$= \sum d_{ik}(x^{n-i}y^{n-k} - x^{n-k}y^{n-i}) = \sum d_{ik}\, x^{n-k} y^{n-k} (x^{k-i} - y^{k-i}),$$

wobei

$$d_{ik} = a_i b_k - b_i a_k \text{ und } k > i.$$

Dividiren wir diese Relation mit $(x-y)$, so erhalten wir

$$\frac{f(x)\varphi(y)-f(y)\varphi(x)}{x-y}=\sum_{\lambda=k-i-1}^{\lambda=0} d_{ik}\cdot x^{n-k}y^{n-k}\cdot x^{k-i-\lambda-1}\cdot y^{\lambda}$$

$$=\sum_{\lambda=k-i-1}^{\lambda=0} d_{ik}\cdot x^{n-i-\lambda-1}\cdot y^{n-k+\lambda},$$

wo nun Σ eine dreifache Summe bedeutet: über i, über k und über λ.

Setzt man in dieser Summe

$$n-i-\lambda-1=n-1-\varrho$$

und

$$n-k+\lambda \quad =n-1-\sigma,$$

also

$$i=\varrho-\lambda$$

und

$$k=\sigma+\lambda+1,$$

dann wird

$$\frac{1}{x-y}\cdot\left\{f(x)\varphi(y)-\varphi(x)f(y)\right\}=\sum d_{\varrho-\lambda,\,\sigma+\lambda+1}\,x^{n-1-\varrho}\,y^{n-1-\sigma}. \quad \text{(II)}$$

Vergleichen wir diese Entwicklung (II) mit der Entwicklung (I), so erhalten wir die Relation

$$c_{\varrho\sigma}=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varrho-\sigma} d_{\varrho-\lambda,\sigma+\lambda+1}\ . \quad \text{(III)}$$

Dabei kann λ sich über positive oder negative Zahlenwerthe erstrecken, je nachdem $\varrho \gtrless \sigma$ ist; nur ist zu beachten, dass gemäss ihrer Definition

$$d_{\varrho\varrho}=0,\ \text{und}\ d_{\varrho\sigma}=-d_{\sigma\varrho}\ .$$

Aus der Relation (III) geht überdies hervor, dass

$$c_{\varrho\sigma}=c_{\sigma\varrho},$$

d. h., dass in der That die Bézout'sche Determinante eine symmetrische ist. Denn es ist gemäss dieser Formel:

$$\left.\begin{aligned} c_{\varrho\sigma}&=d_{\varrho,\sigma+1}+d_{\varrho-1,\,\sigma+2}+\dots d_{\sigma,\varrho+1}\\ c_{\sigma\varrho}&=d_{\sigma,\varrho+1}+d_{\sigma-1,\,\varrho+2}+\dots d_{\varrho,\sigma+1}\end{aligned}\right\}. \quad \text{(IV)}$$

Die Differenz beider Relationen aber ist Null.

Anmerkung. Aus der Bézout'schen Form der Resultante geht unmittelbar eine wichtige Eigenschaft der Resultante hervor. Sind f und φ zwei Functionen m^{ten} Grades und F und Φ irgend zwei lineare Combinationen derselben, etwa:

$$F=\varkappa f+\lambda\varphi$$

$$\Phi=\mu f+\nu\varphi,$$

so ist:

$$R_{F,\Phi}=\varDelta^m\cdot R_{f,\varphi},$$

wobei

$$\varDelta=\begin{vmatrix}\varkappa, & \lambda\\ \mu, & \nu\end{vmatrix}.$$

Denn $R_{F,\Phi}$ geht direct aus $R_{f,\varphi}$ hervor, wenn wir in der Determinante das Element

$$d_{ik} = a_i b_k - b_i a_k$$

ersetzen durch

$$D_{ik} = A_i B_k - B_i A_k.$$

Es ist aber:

$$D_{ik} = \begin{vmatrix} \varkappa a_i + \lambda b_i, & \mu a_i + \nu b_i \\ \varkappa a_k + \lambda b_k, & \mu a_k + \nu b_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_k & b_k \end{vmatrix}$$

$$= \Delta \cdot d_{ik}.$$

Jedes Element der m-zeiligen Determinante $R_{F,\Phi}$ enthält also den Factor Δ, folglich $R_{F,\Phi}$ selbst den Factor Δ^m.

152. *Beispiel.* Wir ermitteln unter Anwendung der ersten Formel (IV) Nr. 151 die Elemente der Bézout'schen Determinante zweier Functionen sechsten Grades

$$(-1)^{15}\begin{pmatrix} a_0\varphi - b_0 f, & (a_0 x + a_1)\varphi - (b_0 x - b_1) f, & \ldots & (a_0 x^5 + a_1 x^4 \cdots + a_5)\varphi - (b_0 x^5 + b_1 x^4 \cdots + b_5) f \\ x^5, & x^4, & x^3, & x^2, & x, & x^0 \end{pmatrix}$$

$$= -(c_{00}\ c_{11}\ c_{22}\ c_{33}\ c_{44}\ c_{55}).$$

Dabei genügt es, wegen der Symmetrie der Determinante jene Elemente $c_{\varrho\sigma}$ zu berechnen, für welche $\varrho \geqq \sigma$ ist. Berücksichtigt man, dass

$$d_{ii} = 0,\ d_{-i,k} = 0,\ d_{ik} = -d_{ki} \text{ und } i, k \leqq \sigma,$$

so erhält man aus der Formel

$$c_{\varrho\sigma} = d_{\varrho,\sigma+1} + d_{\varrho-1,\sigma+2} + d_{\varrho-2,\sigma+3} + d_{\varrho-3,\sigma+4} \cdots + d_{\sigma,\varrho+1}$$

$c_{00} = d_{01}$ $\quad$ $c_{33} = d_{34} + d_{25} + d_{16}$

$c_{10} = d_{02}$, $c_{11} = d_{12} + d_{03}$, $\quad$ $c_{43} = d_{35} + d_{26}$

$c_{20} = d_{03}$, $c_{21} = d_{13} + d_{04}$, $c_{22} = d_{23} + d_{14} + d_{05}$, $\quad$ $c_{53} = d_{36}$

$c_{30} = d_{04}$, $c_{31} = d_{14} + d_{05}$, $c_{32} = d_{24} + d_{15} + d_{06}$, $\quad$ $c_{44} = d_{45} + d_{36}$

$c_{40} = d_{05}$, $c_{41} = d_{15} + d_{06}$, $c_{42} = d_{25} + d_{16}$, $\quad$ $c_{54} = d_{46}$

$c_{50} = d_{06}$, $c_{51} = d_{16}$, $c_{52} = d_{26}$, $\quad$ $c_{55} = d_{56}$.

Die Resultante wird also:

$$R_{f,\varphi} = -\begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} & d_{03} & d_{04} & d_{05} & d_{06} \\ d_{02} & d_{12} + d_{03} & d_{13} + d_{04} & d_{14} + d_{05} & d_{15} + d_{06} & d_{16} \\ d_{03} & d_{13} + d_{04} & d_{23} + d_{14} + d_{05} & d_{24} + d_{15} + d_{06} & d_{25} + d_{16} & d_{26} \\ d_{04} & d_{14} + d_{05} & d_{24} + d_{15} + d_{06} & d_{34} + d_{25} + d_{16} & d_{35} + d_{26} & d_{36} \\ d_{05} & d_{15} + d_{06} & d_{25} + d_{16} & d_{35} + d_{26} & d_{45} + d_{36} & d_{46} \\ d_{06} & d_{16} & d_{26} & d_{36} & d_{46} & d_{56} \end{vmatrix}.$$

153. *Resultante aus einer Function f und dem Producte zweier Functionen φ und ψ.* Es sei

$$\begin{aligned} f &= a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m \\ \varphi &= b_0x^p + b_1x^{p-1} + \ldots + b_p \\ \psi &= c_0x^q + c_1x^{q-1} + \ldots + c_q, \end{aligned}$$

wobei die Summe $p+q$ der Grade von φ und ψ den Grad m von f nicht übersteigen soll. Die Resultante zu f und $\varphi \cdot \psi$ ist dann dargestellt durch

$$R_{f,\varphi\cdot\psi} = \begin{pmatrix} x^{p+q-1}f & , x^{p+q-2} \ldots\ldots, x^0 f, x^{m-1}\varphi\cdot\psi, x^{m-2}\varphi\cdot\psi \ldots, x^0\cdot\varphi\psi \\ x^{m+p+q-1}, x^{m+p+q-2} \ldots, x^m, x^{m-1} \quad , x^{m-2} \ldots\ldots, x^0 \end{pmatrix}.$$

Diese Resultante hat die Eigenschaft, in zwei Factoren sich zu spalten, nämlich in die Resultanten $R_{f,\varphi}$ und $R_{f,\psi}$. Um dies zu zeigen, werden wir $R_{f,\varphi\cdot\psi}$ zunächst so transformiren, dass sich unter Anwendung des Laplace'schen Satzes in erster Linie die Factorenzerfällung ergiebt; es erübrigt dann nur noch nachzuweisen, dass die erhaltenen Factoren in der That mit $R_{f,\varphi}$ und $R_{f,\psi}$ übereinstimmen.

Die Transformationen erreichen wir, nachdem wir in $R_{f,\varphi\psi}$ eine passende Vertauschung von Zeilen mit Zeilen vorgenommen haben, durch Multiplication mit $A =$

$$\begin{pmatrix} x^{p-1}f\cdot\psi, x^{p-2}f\cdot\psi, ..x^0\cdot f\psi, x^{m-1}\varphi\cdot\psi, x^{m-2}\varphi\cdot\psi..x^0\varphi\cdot\psi, x^{q-1}f, x^{q-2}f, ..x^0 f \\ x^{p+q-1}f, x^{p+q-2}f, ..x^q\cdot f \;, x^{m-1}\varphi\cdot\psi, x^{m-2}\varphi\cdot\psi..x^0\varphi\cdot\psi, x^{q-1}f, x^{q-2}f, ..x^0 f \end{pmatrix}$$

und durch Division mit

$$B = \begin{pmatrix} x^{m+p-1}\psi \;, \; x^{m+p-2}\psi \;\ldots x^0\psi, \; x^{q-1}, \; x^{q-2}, \ldots x^0 \\ x^{m+p+q-1}, \; x^{m+p+q-2}, \ldots x^m \;, \; x^{q-1}, \; x^{q-2}, \ldots x^0 \end{pmatrix}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Determinante A den Werth $c_0{}^p$, die Determinante B den Werth $c_0{}^{m+p}$ besitzt.

Vertauschen wir nun in $R_{f,\varphi\psi}$ die Zeilen so, dass die m letzten Zeilen sich direct an die p ersten Zeilen anschliessen, während die q dazwischen liegenden Zeilen die letzten werden, dann ändert sich $R_{f,\varphi\psi}$ nach Nr. 139 um den Factor $(-1)^{mq}$; die Reihenfolge der Grössen im Zähler von $R_{f,\varphi\psi}$ stimmt aber alsdann mit der Reihenfolge der Grössen im Nenner von A überein, und wir erhalten daher durch Multiplication mit A

$$c_0^p \cdot R_{f,\varphi\cdot\psi} =$$

$$(-1)^{mq}\begin{pmatrix} x^{p-1}f\psi \quad , x^{p-2}f\psi \quad ,.., x^0 f\psi, x^{m-1}\varphi\psi, .., x^0\varphi\psi, x^{q-1}f, ..x^0 f \\ x^{m+p+q-1}, x^{m+p+q-2}, .., \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad x^0 \end{pmatrix}.$$

Dividiren wir diese Determinante mit $B = c_0^{m+p}$, so kommt:

$$\frac{c_0^p \cdot R_{f,\varphi\cdot\psi}}{c_0^{m+p}} =$$

$$(-1)^{mq}\begin{pmatrix} x^{p-1}f\cdot\psi, & x^{p-2}f\cdot\psi, \ldots x^0\cdot f\psi, & x^{m-1}\varphi\cdot\psi \ldots x^0\cdot\varphi\psi, & x^{q-1}f \ldots x^0 f \\ x^{m+p-1}\psi, & x^{m+p-2}\psi, \ldots x^m\psi\;, & x^{m-1}\psi \ldots x^0\cdot\psi\;, & x^{q-1}\ldots x^0 \end{pmatrix}.$$

154. *Berechnung und Zerfällung von $R_{f,\varphi\cdot\psi}$.* Führt man hier die Differentiation nach den Grössen im Nenner aus, so erhält man folgendes Resultat:

$$R_{f,\varphi\cdot\psi} = (-1)^{m\cdot q}\cdot c_0^m \times$$

$$\begin{vmatrix}
a_0 a_1 a_2 \ldots\ldots a_m & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\
0\; a_0 a_1 \ldots\ldots a_{m-1} a_m & & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\
0\; 0\; a_0 \ldots\ldots a_{m-2} a_{m-1} a_m & & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\
\ldots & & \ldots & & & \ldots \\
0\; 0\; 0 \ldots a_0 \quad a_1 \ldots\ldots & & a_{m-2} a_{m-1} a_m & 0 & & 0 \ldots \\
b_0 b_1 b_2 \ldots b_p \quad 0 \quad 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \ldots \\
0\; b_0 b_1 \ldots b_{p-1} b_p \quad 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \ldots \\
0\; 0\; b_0 \ldots b_{p-1} b_p & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\
\ldots & & \ldots & & & \ldots \\
0\; 0 \ldots\ldots\ldots b_0 & \ldots & b_{p-2} b_{p-1} & b_p & 0 & 0 \ldots 0 \\
0\; 0\; 0 \ldots\ldots e_{11} & e_{12} & e_{13} \ldots\ldots & e_{1m} & e_{1,m+1} & \ldots e_{1,m+q} \\
0\; 0\; 0 \ldots\ldots 0 & e_{22} & e_{23} \ldots\ldots & e_{2m} & e_{2,m+1} & \ldots e_{2,m+q} \\
0\; 0 \ldots\ldots 0 & 0 & e_{33} \ldots\ldots & e_{3m} & e_{3,m+1} & \ldots e_{3,m+q} \\
\ldots & & \ldots & & & \ldots \\
0\; 0\; 0 \ldots\ldots\ldots & & e_{qq} \;\; e_{q,q+1} \ldots\ldots & & & e_{q,m+q}
\end{vmatrix} \quad \text{(I)}.$$

Die Elemente e_{ik} der letzten q Zeilen dieser Determinante sind die Differentialquotienten der Grössen $x^{q-1}\cdot f,\; x^{q-2}\cdot f \ldots x^0\cdot f$ nach $x^{m-1}\cdot\psi,\; x^{m-2}\cdot\psi \ldots x^0\cdot\psi,\; x^{q-1},\; x^{q-2}\ldots x^0$ und man erhält dieselben, indem man wie in Nr. 149 die Functionen $x^\nu\cdot f$ sich dargestellt denkt in der Form

$$x^\nu\cdot f = \psi\cdot g_\nu(x) + h_\nu(x),$$

wobei $g_\nu(x)$ vom Grade $m+\nu-q$ und $h_\nu(x)$ vom Grade $q-1$ ist. Insbesondere sind die q^2 Elemente, welche von den letzten q Colonnen ausgeschnitten werden, die Differentialquotienten der q Reste $h_\nu(x)$ nach $x^{q-1},\; x^{q-2}\ldots x^0$.

Zerfällt man daher nach dem Satze von Laplace die erhaltene Determinante in ihre beiden Factoren, so ist der erste, wie man unmittelbar erkennt, die Resultante

$$R_{f,\varphi} = \begin{vmatrix} a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_m & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0\ \ a_0\, a_1 \ldots\ldots\ldots & a_m & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0\ \ 0\ \ a_0 \ldots\ldots\ldots & a_{m-1} & a_m \ldots\ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0\ \ 0\ \ 0 \ldots a_0 & a_1 & a_2 \ldots\ldots a_m \\ b_0\, b_1\, b_2 \ldots b_p & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots \\ 0\ \ b_0\, b_1 \ldots b_{p-1} & b_p & 0 \ldots\ldots\ldots \\ 0\ \ 0\ \ b_0 \ldots b_{p-2} & b_{p-1} & b_p \ldots\ldots\ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0\ \ 0\ \ 0 \ldots\ldots\ldots & \ldots & b_0\, b_1 \ldots b_p \end{vmatrix} \qquad \text{(II)}.$$

Der zweite Factor aber ist — vergleiche Nr. 149 — als Functionaldeterminante der q Reste vom Grade $q-1$, die sich bei Division von $x^{q-1}\cdot f,\ x^{q-2}\cdot f \ldots,\ x^0\cdot f$ mit ψ ergeben, nichts anderes als die Resultante von f und ψ bis auf einen Zahlenfactor. Es ist nämlich nach Nr. 148

$$R_{f,\psi} = (-1)^{mq}\cdot c_0^{\ m}\cdot \begin{pmatrix} x^{q-1}\cdot f, & x^{q-2}\cdot f \ldots x^0 f \\ x^{q-1} & ,\ x^{q-2}\ \ \ldots\ x^0 \end{pmatrix} \qquad \text{(III)}.$$

Die Functionaldeterminante rechts ist gerade der zweite Factor der Determinante (I), so dass wir, wenn wir in (I) für die Factoren ihre Werthe aus (II) und (III) einsetzen, erhalten:

$$R_{f,\varphi\cdot\psi} = (-1)^{mq}\cdot c_0^{\ m}\cdot R_{f,\varphi}\cdot R_{f,\psi}\cdot \frac{1}{(-1)^{mq}\, c_0^{\ m}}$$

oder:

$$R_{f,\varphi\cdot\psi} = R_{f,\varphi}\cdot R_{f,\psi}.$$

155. *Beispiel* 1. Ich nehme die Resultante der Function

$$f = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_1 x + a_3$$

und des Productes $\varphi\cdot\psi$, wo

$$\varphi = b_0 x^2 + b_1 x + b_2$$
$$\psi = c_0 x + c_1.$$

Dieselbe ist zunächst dargestellt durch

$$R_{f,\varphi\cdot\psi} = \begin{pmatrix} x^2 f, & xf, & f, & x^2\varphi\psi, & x\varphi\psi, & \varphi\psi \\ x^5 & ,\ x^4 & ,\ x^3, & x^2 & ,\ x^1 & ,\ x^0 \end{pmatrix},$$

oder nach den geeigneten Transformationen durch

$$R_{f,\varphi\cdot\psi} = (-1)^3\cdot c_0^{\ 3} \begin{pmatrix} xf\psi, & f\psi, & x^2\varphi\psi, & x\varphi\psi, & x^0\varphi\psi, & f \\ x^4\psi, & x^3\psi, & x^2\psi & ,\ x^1\psi & ,\ x^0\psi & ,\ x^0 \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen die Grössen des Zählers mit $y_1, y_2 \ldots y_6$, und schreiben dieselben in der Form:

$$y_1 = \psi(x^4 a_0 + x^3 a_1 + x^2 a_2 + x a_3)$$
$$y_2 = \psi(x^3 a_0 + x^2 a_1 + x a_2 + a_3)$$
$$y_3 = \psi(x^4 b_0 + x^3 b_1 + x^2 b_2)$$
$$y_4 = \psi(x^3 b_0 + x^2 b_1 + x b_2)$$
$$y_5 = \psi(x^2 b_0 + x b_1 + b_2)$$
$$y_6 = \psi\left(x^2 \frac{a_0}{c_0} + x \frac{(a_1 c_0)}{c_0^2} + \frac{c_0^2 a_2 - (c_0 a_1) c_1}{c_0^3}\right) + \frac{a^3 c_0^3 - a_2 c_0^2 c_1 + c_1^2 c_0 a_1 - c_1^3 a_0}{c_0^3}$$
$$= \psi(x^2 e_{11} + x e_{12} + e_{13}) + e_{14}.$$

Die partiellen Differentialquotienten dieser sechs Grössen nach $x^4\psi$, $x^3\psi$, $x^2\varphi$, $x^1\psi$, $x^0\psi$, x^0 liefern daher die Determinante:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \end{vmatrix}$$

oder

$$\varDelta = e_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Der erste Factor e_{14} ist aber nichts anderes als $\frac{(-1)^3 \cdot R_{f,\psi}}{c_0^3}$; denn

$$R_{f,\psi} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ c_0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 \end{vmatrix} = a_0 c_1^3 - c_0 c_1^2 a_1 + c_0^2 a_2 c_0 - c_0^3 a_3.$$

Wir erhalten daher in der That:

$$R_{f,\varphi\cdot\psi} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ c_0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 \end{vmatrix} = R_{f,\varphi} \cdot R_{f,\psi}.$$

Beispiel 2. Ist *insbesondere* φ eine Constante etwa gleich λ, so erhalten wir:

$$R_{f,\lambda\varphi} = R_{f,\varphi} \cdot R_{f,\lambda}.$$

Die Resultante aus einer Function m^{ten} Grades und einer Constante λ ist aber dargestellt durch

$$R_{f,\lambda} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^m.$$

Denn gemäss der Definition der Resultante in Nr. 130 und 131 ist dieselbe eine Determinante, welche die Constanten der einen Function in so vielen Zeilen enthält, als der Grad der andern Function angiebt; in unserem Falle muss sie also die Coefficienten von f in Null Zeilen, die von λ in m Zeilen enthalten. Demnach ist

$$R_{f,\lambda\varphi} = \lambda^m \cdot R_{f,\varphi}.$$

§ 12. Fundamentalsatz der Algebra.

156. *Transcendenter Theil des Beweises.* Gauss hat bekanntlich den Satz bewiesen: „Ist

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a^n = 0$$

eine Gleichung n^{ten} Grades mit durchweg reellen Coefficienten, so giebt es immer einen reellen oder imaginären Werth $x = \xi_1$, für welchen die Gleichung identisch verschwindet."

Wir folgen hier dem dritten Beweise, den Gauss für diesen Satz erbracht und den Gordán wesentlich auf Eliminations- also Determinantenprocesse reducirt hat. (Vergl. M. A. Bd. X. 252.) Man weiss, dass der Beweis nicht durch rein algebraische Betrachtungen allein geliefert werden kann. Wir können jedoch den Beweis von dem Augenblicke an im Gebiete der Algebra weiter führen, wo wir uns überzeugt haben, dass jede Gleichung ungeraden Grades jedenfalls einen Werth von x besitzt, für welchen sie besteht. Um aber dies zu erkennen, brauchen wir nur für x einen Werth $\xi_1 > \Sigma a_g$ in f zu substituiren, wo Σa_g die Summe aller absolut genommenen Coefficienten sein möge,

dann überragt das erste Glied $(\Sigma a_g)^n$ der Gleichung alle andern an absolutem Werthe. Je nachdem man also $x = + \Sigma a_g$ oder $x = - \Sigma a_g$ einträgt, wird das Substitutionsresultat positiv oder negativ. Es muss also jedenfalls zwischen $+ \Sigma a_g$ und $- \Sigma a_g$ ein Werth liegen, welcher $f(x)$ verschwinden macht, und den wir dadurch ermitteln können, dass wir diese Grenzen successive immer enger und enger ziehen. Hierin, also in der Angabe der beiden Grenzen und der Möglichkeit sie zu verengern, liegt das Charakteristische für die Transcendenz des Beweises.

Von hier ab jedoch können wir das Gebiet des Transcendenten verlassen und unter der Voraussetzung, dass jede Gleichung *ungeraden* Grades mit reellen Coefficienten einen linearen Factor besitzt, in rein algebraischer Weise zeigen:

„Jede Gleichung besitzt einen linearen Factor.“

157. *Gedankengang für den algebraischen Theil des Beweises.* Unsere Aufgabe ist, die Operationen anzugeben, wie wir zum linearen Factor gelangen. Damit ist dann auch der Beweis geliefert, dass derselbe existirt. Wir bedienen uns dabei eines gewissen Recursionsverfahrens, indem wir die Gleichungen ordnen in Bezug auf die Schwierigkeit sie aufzulösen. Setzen wir dann voraus, dass jede leichter auflösbare Gleichung einen linearen Factor besitzt, so können wir zeigen, dass auch jede schwieriger zu lösende Gleichung einen solchen haben muss. Zu dem Zwecke werden wir den Beweis erbringen, dass jede Gleichung $f(x) = 0$ sich immer in zwei Factoren spalten lässt, deren mindestens einer gleich null gesetzt, leichter lösbar ist, als die Gleichung $f(x) = 0$ selbst, ausgenommen in einem einzigen Falle, den wir besonders behandeln werden.

158. *Classification der Gleichungen nach dem Grade ihrer Auflösbarkeit.* Wir können jede ganze Zahl n in der Form schreiben:

$$n = 2^\mu \cdot \nu,$$

wo ν eine ungerade Zahl, und μ alle Werthe von 0 bis ∞ annehmen kann. Für $\mu = 0$ erhalten wir alle ungeraden Zahlen. Alle Gleichungen, deren Grad

$$n = 2^0 \cdot \nu$$

ist, sind nach Nr. 156 als leichter auflösbar zu erachten, als alle übrigen und zwar um so leichter, je kleiner die ungerade Zahl ν ist.

An diese schliessen sich alle Gleichungen an vom Grade

$$n = 2^1 \cdot \nu,$$

sodann jene vom Grade

$$n = 2^2 \cdot \nu, \quad \text{u. s. w.},$$



bis endlich allgemein die Gleichungen folgen vom Grade

$$n = 2^\mu \cdot \nu .$$

Es ist also in diesem Sinne beispielsweise eine Gleichung vierten Grades als schwerer auflösbar zu betrachten als eine Gleichung sechsten Grades, aber leichter als eine Gleichung zwölften Grades.

Wir nehmen dann an: Jede leichter auflösbare Gleichung, also jede Gleichung, deren Grad

$$n = 2^\varrho \cdot \nu \quad \text{oder} \quad n = 2^\mu \cdot \bar{\nu}$$

ist, wo $\varrho < \mu$, und $\bar{\nu} < \nu$, besitze einen linearen Factor. Dann lässt sich zeigen, dass auch $f = 0$ vom Grade

$$n = 2^\mu \cdot \nu$$

einen solchen besitzt. Setzen wir nämlich einstweilen voraus, $f = 0$ besitze überhaupt einen reellen oder imaginären Factor, so können wir unschwer nachweisen, dass derselbe gleich null gesetzt eine leichter auflösbare Gleichung repräsentirt als $f(x) = 0$.

159. *Voraussetzung:* $f(x) = 0$ *besitze einen reellen Factor.* Gesetzt, es sei bereits gezeigt, dass $f = 0$ überhaupt einen Factor $\varphi(x)$ vom Grade n_1 besitze mit reellen Coefficienten, dann ist:

$$f = \overset{n_1}{\varphi(x)} \cdot \overset{n_2}{\psi(x)},$$

wobei

$$n_1 = 2^{\mu_1} \cdot \nu_1$$

$$n_2 = 2^{\mu_2} \cdot \nu_2,$$

also

$$n = n_1 + n_2 = 2^\mu \cdot \nu = 2^{\mu_1} \cdot \nu_1 + 2^{\mu_2} \cdot \nu_2,$$

Ist hier $\mu_1 \leq \mu$, dann ist φ leichter auflösbar als f, da im ungünstigsten Falle dann $\nu_1 < \nu$ sein muss; es besitzt sonach φ einen linearen Factor und folglich auch f. Ist aber $\mu_1 > \mu$, also etwa $\mu_1 = \mu + \varrho$, dann ist

$$n = 2^\mu \cdot \nu = 2^{\mu+\varrho} \cdot \nu_1 + 2^{\mu_2} \cdot \nu_2,$$

oder

$$2^{\mu_2} \cdot \nu_2 = 2^\mu (\nu - 2^\varrho \cdot \nu_1).$$

Nun ist $\nu - 2^\varrho \cdot \nu_1$ jedenfalls ungerade, da ν ungerade ist und nach Voraussetzung ϱ nicht null sein kann, also ist:

$$\mu_2 = \mu$$

und

$$\nu_2 = \nu - 2^\varrho \cdot \nu_1$$

oder

$$\nu_2 < \nu,$$

folglich ist in diesem Falle der Factor $\psi(x)$ eine Gleichung, die leichter zu lösen ist als $f(x)$, und $f(x) = 0$ hat somit einen linearen Factor, da ihn nach Voraussetzung $\psi(x)$ besitzt.

Wir haben somit das Resultat: Sobald $f(x) = 0$ einen reellen Factor $\varphi(x)$ besitzt, besitzt es auch einen linearen Factor.

160. *Voraussetzung: $f(x) = 0$ besitze einen imaginären Factor.* Nehmen wir an, $f(x) = 0$ habe den Factor

$$\varphi(x) = p(x) + i \cdot q(x) = p + iq,$$

dann muss es nothwendig, da nur reelle Coefficienten in $f = 0$ auftreten sollen, auch den Factor

$$\chi(x) = p(x) - iq(x) = p - iq$$

besitzen. Haben dann $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ einen Theiler gemein, so kann dies nur davon herrühren, dass $p(x)$ und $q(x)$ denselben als gemeinschaftlichen Theiler haben, der in Folge dessen reell sein muss. Daraus folgt aber, dass dann auch $f(x)$ diesen reellen Factor besitzt, und somit auch einen linearen Factor.

Haben aber $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ keinen gemeinsamen Theiler, so kann man nach Nr. 128 (n) zwei Functionen $A(x)$ und $B(x)$ so finden, dass

$$(1) \quad \overset{n_1-1}{A(x)} \cdot \overset{n_1}{\varphi(x)} + \overset{n_1-1}{B(x)}\, \overset{n_1}{\chi(x)} = 1 = A \,.\, (p + iq) + B \cdot (p - iq)$$

ist. Ausserdem ist f darstellbar in den Formen:

$$(2) \qquad \begin{cases} f = [p(x) + iq(x)]\, L(x) = [p + iq] \cdot L \\ f = [p(x) - iq(x)]\, M(x) = [p - iq] \cdot M. \end{cases}$$

Multipliciren wir Gleichung (1) mit $f(x)$, so erhalten wir

$$f(x) = A \cdot f \cdot (p + iq) + B \cdot f \cdot (p - iq)$$

oder wegen der Relationen (2)

$$f(x) = A \cdot M \cdot (p^2 + q^2) + B \cdot L \cdot (p^2 + q^2)$$

oder
$$f(x) = (p^2 + q^2)\,(A \cdot M + B \cdot L).$$

Nun ist aber $p^2 + q^2$ reell, und so lange der Grad von $p^2 + q^2 < n$, also der von $\varphi < \frac{n}{2}$ ist, besitzt folglich f auch in diesem Falle einen reellen Factor. Wäre $\varphi(x)$ vom Grade $\varrho > \frac{n}{2}$ gewesen, so hätten wir die eben gemachten Schlüsse in Bezug auf den andern Factor $\psi(x)$ ziehen können, so dass also nach Nr. 159 in jedem der beiden Fälle $f(x)$ einen linearen Factor besitzt. Der Fall, wo der Grad von $\varphi(x) = p(x) + iq(x)$ gleich $\frac{n}{2}$ ist, also $p^2 + q^2$ den nämlichen Grad in x hat, wie $f(x)$ selbst, bedarf einer speciellen Untersuchung. Wir sind also zu folgendem Resultate gelangt:

„Besitzt $f(x) = 0$ überhaupt einen reellen Factor, oder einen imaginären Factor vom Grade $n_1 < \frac{n}{2}$, so besitzt $f(x) = 0$ auch immer einen linearen Factor."

Es bleibt also noch zu beweisen: 1) dass jede Gleichung $f(x) = 0$ irgend einen Factor $\varphi(x)$ besitzen muss; 2) dass, wenn dieser Factor von der Form $p(x) + iq(x)$ ist und vom Grade $\frac{n}{2}$, die Annahme, $p(x)$ und $q(x)$ hätten dann keinen gemeinschaftlichen Factor, entweder zu einem Widerspruche führt, oder wenn nicht, dass dann ein reeller Factor a priori vorhanden ist.

161. *Beweis, dass jede Gleichung in Factoren gespalten werden kann.* Um zu zeigen, dass jede Gleichung $f(x) = 0$ einen Factor besitzen muss, bilden wir die beiden Functionen:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \dfrac{f(x+u) + f(x-u)}{2} = F(x) \\ \dfrac{f(x+u) - f(x-u)}{2u} = \Phi(x). \end{cases}$$

Die Resultante der beiden Functionen in Bezug auf x sei $R_{F,\Phi}$. Multipliciren wir die zweite Gleichung mit u und addiren sie zur ersten, so kommt:

$$f(x+u) = F(x) + u\,\Phi(x)$$

und nach dem Satze

$$R_{f,\varphi} = R_{f+\lambda\varphi,\varphi} \qquad \text{(vgl. Nr. 145)}$$

stimmt die Resultante $R_{F,\Phi}$ der beiden Functionen (I) überein mit der Resultante $R_{f(x+u),\Phi(u)} = P_{(u)}$ der beiden Functionen

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} f(x+u) \quad \text{und} \\ \dfrac{f(x+u) - f(x-u)}{2u} = \Phi(x). \end{cases}$$

Diese Resultante $R_{f,\Phi} = P_{(u)}$ der beiden letzten Functionen kann, gleich null gesetzt, als Gleichung für u aufgefasst werden und es fragt sich jetzt, ist sie als solche leichter lösbar als f oder nicht. Im ersten Falle hat alsdann nach Voraussetzung $P_{(u)} = 0$ einen linearen Factor, d. h. man kann einen Werth u berechnen, so dass $R_{f,\varphi}$ verschwindet. Trägt man diesen speciellen Werth von u, den wir mit v bezeichnen wollen, in die beiden Functionen (II) ein, so besitzen dieselben einen gemeinschaftlichen Factor, da $R_{f,\varphi}$ verschwindet, folglich besitzt $f(x+u)$ selbst einen Factor, also auch $f(x)$. Dies gilt auch, wenn zufälliger Weise $v = 0$ ist. Nun ist aber in der That

$R_{f,\varphi} = P_{(u)} = 0$ eine leichter lösbare Gleichung als $f(x) = 0$. Denn denken wir uns $f(x+u)$ nach x und u geordnet, so ist

$$f(x+u) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots p_n,$$

wo $p_1, p_2 \ldots p_n$ Functionen von u vom bezw. $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots n^{\text{ten}}$ Grade sind. Ebenso wird Φ, in welcher sich wegen der Subtraction $f(x+u) - f(x-u)$ einmal die höchste Potenz von x weghebt, und anderntheils wegen des Divisors u auch der Grad in u um 1 sich erniedrigt, von der Form sein:

$$\Phi = x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + q_2 x^{n-3} + \cdots q_{n-1},$$

wo $q_1, q_2 \ldots q_{n-1}$ Functionen von u bezw. $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots (n-1)^{\text{ten}}$ Grades sind. Die Resultante $R_{f,\varphi}$ in u ist somit (vgl. Nr. 142) vom Grade

$$n(n-1).$$

Nun enthalten aber anderntheils die beiden Functionen (I) die Grösse u nur in geraden Potenzen, wovon man sich unmittelbar überzeugt, wenn man die einzelnen Binome $(x \pm u)^\varrho$ entwickelt und die Addition bezw. Subtraction ausführt. Es kann also auch die Resultante derselben, die mit der Resultante der beiden Functionen (II) übereinstimmt, nur eine Function von u^2 sein, und folglich lässt sich durch die Substitution $u^2 = w$ ihr Grad erniedrigen auf $\frac{n(n-1)}{2}$. Da nun $n = 2^\mu \cdot v$ ist, so ist

$$\frac{n(n-1)}{2} = 2^{\mu-1} \cdot v \cdot (2^\mu \cdot v - 1)$$

oder, weil der Factor $2^\mu \cdot v - 1$ ungerade ist, solange $\mu > 0$, was immer vorausgesetzt werden kann,

$$\frac{n(n-1)}{2} = 2^{\mu-1} \cdot \bar{v}.$$

Der Grad der Resultante besitzt also ein kleineres μ als der Grad von f; folglich hat die Resultante eine Wurzel, die wir mit $v = \sqrt{w}$ bezeichnen können, da $P_{(u)}$ in u quadratisch ist. Wird dieser Werth $u = v$ in $f = f(x+u)$ und $\varphi = \frac{f(x+u) - f(x-u)}{2u}$ eingetragen, so verschwindet $R_{f,\varphi}$, d. h. $f(x+v)$ und φ haben einen gemeinschaftlichen Theiler, und sonach auch $f(x)$ allein einen Factor. Ist v reell, so ist auch dieser Factor reell. Ist dagegen v complex oder rein imaginär, so wird der Factor von f im Allgemeinen gleichfalls imaginär sein.

162. *Der Ausnahmefall.* Es bleibt also noch der Fall zu behandeln, in welchem dieser Factor von $f(x)$ complex und vom Grade $\frac{n}{2}$ ist, nämlich

$$\varphi(x) = p(x) + iq(x)$$

und $p(x)$ und $q(x)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben.

Nehmen wir nämlich an, $\varphi(x)$ sei vom Grade $\frac{n}{2}$; der andere conjugirt complexe Factor ist alsdann

$$\psi(x) = p(x) - iq(x) \quad \text{und}$$

$$(1) \qquad f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) = p^2 + q^2$$

sei die einzig mögliche Zerlegung von $f(x)$. Hat aber $f(x)$ den Factor $\varphi(x)$, so besitzt $f(x+v)$ den Factor $\varphi(x+v)$ und $f(x+v)$ ist von der Form:

$$(2) \qquad f(x+v) = \varphi(x+v) \cdot \psi(x+v).$$

Ebenso ist aber auch

$$(3) \qquad f(x-v) = \varphi(x-v) \cdot \psi(x-v).$$

Nun soll nach Voraussetzung $f(x+v)$ in keiner anderen Weise zerlegbar sein, als in der unter (1) angedeuteten, und da überdies

$$\Phi = \frac{f(x+v) - f(x-v)}{2v}$$

mit $f(x+v)$ einen gemeinschaftlichen Factor besitzt, so besitzt diesen ausser

$$f(x+v) = \varphi(x+v) \cdot \psi(x+v),$$

auch

$$f(x-v) = \varphi(x-v) \cdot \psi(x-v).$$

Dies ist nur möglich, wenn entweder

$$\begin{aligned} &1) \quad \varphi(x+v) = \varphi(x-v) \quad \text{oder} \\ &2) \quad \psi(x+v) = \psi(x-v) \quad \text{oder} \\ &3) \quad \varphi(x+v) = \psi(x-v) \quad \text{oder} \\ &4) \quad \psi(x+v) = \varphi(x-v). \end{aligned}$$

Man kann zunächst zeigen, dass die beiden ersten Annahmen auf Widersprüche führen.

Denn im ersten Falle müsste

$$\varphi(x-v) - \varphi(x+v)$$

identisch null sein. Das ist nur möglich, wenn die Coefficienten der Potenzen von x einzeln verschwinden. Dieser Ausdruck ist aber vom Grade $\frac{n}{2} - 1$ in x und das Glied mit der Potenz $x^{\frac{n}{2}-1}$ rührt einzig und allein von der Differenz $(x-v)^{\frac{n}{2}} - (x+v)^{\frac{n}{2}}$ her, hat also den

Coefficienten $-n \, . \, v$. Da v nicht null ist, so ist diese Identität unmöglich. Dieselbe Schlussweise lehrt, dass auch der zweite Fall nicht eintreten kann.

Was die dritte Annahme betrifft

$$\varphi(x+v) = \psi(x-v),$$

so setzen wir zunächst voraus, dass v eine complexe Grösse sein möge, dass also die Identität bestehe

$$\text{(I)} \qquad \varphi(x+\alpha+i\beta) = \psi(x-\alpha-i\beta)$$

oder ausführlicher

$$p(x+\alpha+i\beta) + iq(x+\alpha+i\beta) = p(x-\alpha-i\beta) - iq(x-\alpha-i\beta).$$

Vertauscht man hier i mit $-i$, so erhält man

$$p(x+\alpha-i\beta) - iq(x+\alpha-i\beta) = p(x-\alpha+i\beta) + iq(x-\alpha+i\beta)$$

oder

$$\text{(II)} \qquad \psi(x+\alpha-i\beta) = \varphi(x-\alpha+i\beta).$$

Ersetzt man in (I) x durch $x-2\alpha$, so erhält man:

$$\text{(III)} \qquad \varphi(x-\alpha+i\beta) = \psi(x-3\alpha-i\beta);$$

also durch Comparation von (II) mit (III)

$$\psi(x-i\beta+\alpha) = \psi(x-i\beta-3\alpha).$$

Da diese Identität für jeden Werth von x bestehen soll, so müssen die Coefficienten der Potenzen von x einzeln verschwinden. Es muss also insbesondere der Coefficient der höchsten in der Identität noch auftretenden Potenz $x^{\frac{n}{2}-1} = 0$ sein. Derselbe rührt einzig und allein von der Differenz her:

$$\{x+(\alpha-i\beta)\}^{\frac{n}{2}} - \{x-(3\alpha+i\beta)\}^{\frac{n}{2}},$$

ist also:

$$\frac{n}{2}(\alpha-i\beta) + \frac{n}{2}(3\alpha+i\beta) = 2n\alpha.$$

Daraus folgt: α muss selbst verschwinden, d. h. v kann keine complexe Grösse sein. Ist aber v rein imaginär, also

$$v = i\beta,$$

so geht unsere Voraussetzung (3) über in

$$\varphi(x+i\beta) = \psi(x-i\beta)$$

oder: $p(x+i\beta)+iq(x+i\beta)=p(x-i\beta)-iq(x-i\beta)$.

Hat also die linke Seite die Form

$$A+iB,$$

so muss die rechte Seite, da sie durch Vertauschung von i mit $-i$ aus der linken hervorgeht, dargestellt sein durch

$$A-iB.$$

Da aber beide Ausdrücke einander gleich sein sollen, so muss

$$B=0$$

sein. Dann hat aber $\varphi(x+i\beta)$ nur reelle Coefficienten, also $f(x+v)$ einen reellen Factor $A(x)$ und somit auch einen linearen. Dieselben Resultate ergeben sich auf gleichem Wege bei Discussion der vierten Annahme.

Wir kommen zum Schlusse: Ist der imaginäre Factor $\varphi=p(x)+iq(x)$ von f vom Grade $\frac{n}{2}$, so besitzt, wenn $p(x)$ und $q(x)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, $f(x+v)$ einen reellen Factor, also auch einen linearen und demnach auch $f(x)$ einen linearen.

Es ist somit der Beweis geliefert, dass $f(x)=0$ in jedem Falle einen linearen Factor haben muss. Wir erhalten denselben, indem wir die in Nr. 161 geschilderten Operationen so lange anwenden, bis wir schliesslich auf eine Resultante kommen, für welche $\mu=0$, die also von ungeradem Grade ist.

Anmerkung. Aus der Thatsache, dass jede Gleichung n^{ten} Grades mindestens eine Wurzel hat, geht unmittelbar hervor, dass sie n Wurzeln besitzt. Denn dividirt man die Gleichung mit dem einen linearen Factor, so erhält man eine Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades als Quotient, welche gleich null gesetzt, ebenso wie die ursprüngliche Gleichung, eine Wurzel besitzen muss.

§ 13. Zusammenhang der Resultante mit den Wurzeln der Gleichungen.

163. *Berechnung der gemeinsamen Wurzeln zweier Gleichungen.* Sind

$$f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m=0$$
$$\varphi(x)=x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n=0$$

zwei Gleichungen vom m^{ten} und n^{ten} Grade, die beide für den gemeinschaftlichen Werth $x=\alpha$ befriedigt werden, so kann man sich den

Werth dieser gemeinschaftlichen Wurzel in folgender Weise verschaffen. Man bildet sich die $m+n-2$ Gleichungen:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \alpha^0 f(\alpha) = 0, \quad \alpha f(\alpha) = 0, \cdots \alpha^{n-2} f(\alpha) = 0 \\ \alpha^0 \varphi(\alpha) = 0, \quad \alpha \varphi(\alpha) = 0, \cdots \alpha^{m-2} \varphi(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Sie enthalten linear und homogen die $m+n-1$ Unbekannten

$$\alpha^0, \quad \alpha^1, \quad \alpha^2 \ldots \alpha^{m+n-2}$$

und man kann daher ihre Werthe nach Nr. 102 in eindeutiger Weise bestimmen.

Ist speciell $m=n$, so kann man statt des Gleichungssystemes (I) $n-1$ Gleichungen des Systemes

$$\text{(II)} \qquad p_i = c_{i1}\alpha^{n-1} + c_{i2}\alpha^{n-2} + \cdots c_{in}\alpha^0 = 0$$

benutzen. Dieselben sind (vergl. Nr. 148) die Coefficienten von y^{n-i} in der Entwicklung der Function:

$$\frac{1}{y-x}\{f(x)\varphi(y) - \varphi(x) f(y)\} = \sum_{i=1}^{i=n} p_i y^{n-i}$$

und verschwinden offenbar für $x=\alpha$, wenn gleichzeitig sowohl $f(\alpha)$ als $\varphi(\alpha)$ verschwinden.

Das System (II) ist wieder linear und homogen in den n Unbekannten

$$\alpha^0, \quad \alpha^1, \quad \alpha^2 \ldots \alpha^{n-1}.$$

Wenn die beiden Functionen f und φ mehr als einen linearen Factor gemeinschaftlich haben, so ist es natürlich nicht möglich, dieselben auf diesem Wege zu bestimmen, wie schon daraus erhellt, dass sowohl Gleichungssystem (I) als (II) Systeme von homogenen und linearen Gleichungen sind, die als solche nur eine einzige Lösung zulassen.

164. *Die Differentialquotienten der Resultante.* Wir hatten in Nr. 131 als Ausdruck für die Resultante $R_{f,\varphi}$ erhalten:

$$R_{f,\varphi} = \overset{n-1}{\overline{A}(x)}\, \overset{m}{f(x)} + \overset{m-1}{\overline{B}(x)}\, \overset{n}{\varphi(x)}.$$

Differenziren wir diese Gleichung nach einem Coefficienten von f oder φ, also etwa nach a_ν, so erhalten wir:

$$\frac{\partial R_{f,\varphi}}{\partial a_\nu} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial a_\nu}\cdot f + \overline{A}\cdot x^{n-\nu} + \frac{\partial \overline{B}}{\partial a_\nu}\cdot \varphi.$$

Ist nun α eine gemeinschaftliche Wurzel der beiden Gleichungen f und φ, so geht daraus, wegen $f(\alpha)=0$, $\varphi(\alpha)=0$, die Relation hervor,

$$(1) \qquad \frac{\partial R_{f,\varphi}}{\partial a_\nu} = \overset{n-1}{\overline{A}(\alpha)}\cdot \alpha^{n-\nu}.$$

Da man ebenso erhält:

$$(2) \qquad \frac{\partial R_{f,\varphi}}{\partial a_\mu} = \overline{A(\alpha)}^{n-1} \cdot \alpha^{n-\mu},$$

so ergiebt sich aus diesen beiden Relationen die Proportion

$$\frac{\partial R_{f,\varphi}}{\partial a_\nu} : \frac{\partial R_{f,\varphi}}{\partial a_\mu} = \alpha^{n-\nu} : \alpha^{n-\mu}.$$

Man erkennt also, dass die partiellen Differentialquotienten der Resultante nach den Coefficienten von f oder φ der Reihe nach proportional sind den verschiedenen Potenzen der gemeinschaftlichen Wurzel α. Man kann aus dieser Eigenschaft unter anderm auch eine Reihe von partiellen Differentialgleichungen ableiten, welche charakteristische Gleichungen sind für die Resultante.

165. *Zusammenhang zwischen den Coefficienten und Wurzeln einer Gleichung.* Die Thatsache, dass jede Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ besitzt, sich also in ein Product von n linearen Factoren zerfällen lässt, lehrt, dass die Coefficienten der Gleichung in einem innern Zusammenhange mit den Wurzeln derselben stehen. Man findet diese Beziehungen in der That direct, wenn man in den beiden Dar stellungen der Gleichung f:

$$f = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \varrho_n) = 0$$
$$f = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x vergleicht.

Man erhält so in bekannter Weise die Grössen a_i ausgedrückt in symmetrischen Functionen der Wurzeln

$$\alpha_1\;\alpha_2\;\alpha_3 \;.\;.\;.\; \alpha_n.$$

Um diese symmetrischen Functionen zu ermitteln, kann man auch in folgender Weise vorgehen.

Man bildet die n Gleichungen:

$$f(\alpha_1) = 0, \qquad f(\alpha_2) = 0, \qquad f(\alpha_3) = 0 \;.\;.\;.\; f(\alpha_n) = 0,$$

die linear sind in den n Coefficienten $a_1, a_2 \ldots a_n$, und also zu deren Berechnung gerade ausreichen, wenn alle Wurzeln verschieden sind.

Die Matrix dieses Systems von Gleichungen für $a_0, a_1 \ldots a_n$ ist dargestellt durch:

$$(A) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1^n, & \alpha_1^{n-1}, & \alpha_1^{n-2} & \ldots & 1 \\ \alpha_2^n, & \alpha_2^{n-1}, & \alpha_2^{n-2} & \ldots & 1 \\ \alpha_3^n, & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_n^n, & \alpha_n^{n-1}, & \alpha_n^{n-2} & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnen wir wie früher (vergl. Nr. 112) die mit wechselndem Vorzeichen genommenen $n+1$ Determinanten derselben, welche durch Unterdrückung der bezw. 1ten, 2ten ... $(n+1)$ten Colonne entstehen, mit

$$p_0, \quad p_1, \quad p_2 \dots p_x,$$

so erhalten wir:

$$a_n = \frac{p_n}{p_0}, \quad a_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{p_0}, \quad a_{n-2} = \frac{p_{n-2}}{p_0}, \dots a_1 = \frac{p_1}{p_0}.$$

Nun ist die Determinante p_0 dargestellt durch:

$$p_0 = \begin{vmatrix} \alpha_1^{n-1}, & \alpha_1^{n-2} & \dots & 1 \\ \alpha_2^{n-1}, & \alpha_2^{n-2} & \dots & 1 \\ \alpha_3^{n-1}, & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n^{n-1}, & \alpha_n^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist aber (vergl. Beispiel 2 und 3 in Nr. 40) nichts anderes als das Differenzenproduct

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \dots (\alpha_1 - \alpha_n) \\ (\alpha_2 - \alpha_3) \dots (\alpha_2 - \alpha_n) \\ (\alpha_{n-1} - \alpha_n), \end{aligned}$$

und man erkennt ebenso aus dem angeführten Beispiele, dass alle Determinanten der Matrix (A) durch dieses Differenzenproduct theilbar sind, so dass wir also auf diese Weise die Coefficienten a_i in der That ausgedrückt erhalten durch ganze symmetrische Functionen der Wurzeln.

166. *Beispiel.* Es sei

$$f(x) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

und

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4$$

seien die Wurzeln dieser Gleichung. Es ist dann:

$$\begin{aligned} f(\alpha_1) &= \alpha_1^4 + a_1\alpha_1^3 + a_2\alpha_1^2 + a_3\alpha_1 + a_4 = 0 \\ f(\alpha_2) &= \alpha_2^4 + a_1\alpha_2^3 + a_2\alpha_2^2 + a_3\alpha_2 + a_4 = 0 \\ f(\alpha_3) &= \alpha_3^4 + a_1\alpha_3^3 + a_2\alpha_3^2 + a_3\alpha_3 + a_4 = 0 \\ f(\alpha_4) &= \alpha_4^4 + a_1\alpha_4^3 + a_2\alpha_4^2 + a_3\alpha_4 + a_4 = 0. \end{aligned}$$

Die Matrix dieses Systems ist:

$$(A) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1^4 & \alpha_1^3 & \alpha_1^2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^4 & \alpha_2^3 & \alpha_2^2 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_3^4 & \alpha_3^3 & \alpha_3^2 & \alpha_3 & 1 \\ \alpha_4^4 & \alpha_4^3 & \alpha_4^2 & \alpha_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Die Determinante

$$p_0 = \begin{vmatrix} \alpha_1^3 & \alpha_1^2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^3 & \alpha_2^2 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_3^3 & \alpha_3^2 & \alpha_3 & 1 \\ \alpha_4^3 & \alpha_4^2 & \alpha_4 & 1 \end{vmatrix} = \varDelta_\alpha$$

hat den Werth:

$$p_0 = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_4) = \varDelta_\alpha .$$

Ebenso findet man:

$$\begin{aligned} p_4 &= + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \cdot \varDelta_\alpha \\ p_3 &= - (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4) \cdot \varDelta_\alpha \\ p_2 &= + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4) \cdot \varDelta_\alpha \\ p_1 &= - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \cdot \varDelta_\alpha . \end{aligned}$$

Folglich erhalten wir als Relationen zwischen den Coefficienten und den Wurzeln von f:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= - \sum_1^4 \alpha_i \\ a_2 &= + \sum_1^4 \alpha_i \alpha_k \\ a_3 &= - \sum_1^4 \alpha_i \alpha_k \alpha_\varrho \\ a_4 &= + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \end{aligned}\right\} \quad i < k < \varrho .$$

167. *Die Potenzsummen der Wurzeln.* Von den weiteren verschiedenartigen Beziehungen, welche zwischen den Coefficienten a_i und Wurzeln α_i einer Gleichung bestehen, mögen hier nur noch die Relationen zwischen den Coefficienten und den Summen

$$s_\varrho = \alpha_1^\varrho + \alpha_2^\varrho + \alpha_3^\varrho + \cdots \alpha_n^\varrho$$

der Potenzen aller Wurzeln einer Gleichung erwähnt sein. Bildet man nämlich die erste Ableitung von $f(x)$ einmal in der Form:

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \cdots a_{n-1},$$

dann aber auch in der Form

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-\alpha_1} + \frac{f(x)}{x-\alpha_2} + \frac{f(x)}{x-\alpha_3} + \cdots \frac{f(x)}{x-\alpha_n}$$

und vergleicht in den beiden Ausdrücken die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x, so erhält man die unter dem Namen „Newton'sche Identitäten" bekannten Formeln:

$$
(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} s_1 + 1 \cdot a_1 = 0 \\ s_2 + a_1 s_1 + 2 \cdot a_2 = 0 \\ s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_3 + 3 \cdot a_3 = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + a_2 s_{n-3} + \cdots (n-1) a_{n-1} = 0 . \end{cases}
$$

Hiebei ist unter s_1, s_2, $s_3 \ldots s_{n-1}$ die Summe aller ersten, zweiten, dritten, ... $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenzen aller Wurzeln zu verstehen.

Zu diesen Formeln (I) erhält man noch eine zweite Reihe Formeln für die höheren Potenzsummen auf folgende Weise. Man multiplicirt $f(x) = 0$ mit x^m, so kommt:

$$
x^{n+m} + a_1 x^{n+m-1} + a_2 x^{n+m-2} + \cdots a_n x^m = 0 .
$$

Da diese Gleichung immer noch für jede der n Wurzeln α_i verschwindet, so erhält man hieraus:

$$
\alpha_i^{n+m} + a_1 \alpha_i^{n+m-1} + a_2 \alpha_i^{n+m-2} + \cdots a_n \alpha_i^m = 0 .
$$

Setzt man $i = 1, 2, 3 \ldots n$ und addirt alle n Relationen, so kommt:

$$
s_{n+m} + a_1 s_{n+m-1} + a_2 s_{n+m-2} + \cdots a_n s_m = 0 .
$$

Für $m = 0, 1, 2 \ldots$ entstehen daraus, da $s_0 = n$, die Relationen:

$$
(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} s_n + a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \cdots n\, a_n = 0 \\ s_{n+1} + a_1 s_n + a_2 s_{n-1} + \cdots a_n s_1 = 0 \\ s_{n+2} + a_1 s_{n+1} + a_2 s_n + \cdots a_n s_2 = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ s_{n+m} + a_1 s_{n+m-1} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + a_n s_m = 0 . \end{cases}
$$

Von diesen Formeln (I) und (II) werden wir alsbald Gebrauch machen Sie sind linear in s und in a und man kann daher nach den in § 8 gegebenen Methoden in einfacher Weise sowohl die Werthe von s_ϱ in Function der Coefficienten a_i als auch die Werthe von a_i in Function der Potenzsummen s_ϱ darstellen.

168. *Die Resultante als Product der Wurzeldifferenzen.* Es seien

$$
\overset{m}{f(x)} = 0 \qquad \text{und} \qquad \overset{n}{\varphi(x)} = 0
$$

zwei Gleichungen m^{ten}, bezw. n^{ten} Grades, deren erste die Wurzeln

$$
\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3 \; . \; . \; . \; \alpha_m
$$

und deren zweite die Wurzeln

$$
\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3 \; . \; . \; . \; \beta_n
$$

besitze. Wir können uns alsdann die Frage vorlegen, unter welcher

Bedingung die beiden Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen. Nun ist nach dem Gauss'schen Satze die Gleichung $f(x)=0$ darstellbar in der Form

$$(1)\qquad f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_m)=0$$

und ebenso

$$(2)\qquad \varphi(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)\ldots(x-\beta_n)=0.$$

Substituiren wir in die erste Gleichung der Reihe nach die Wurzeln β_ϱ der zweiten, so erhalten wir die Substitutionsresultate

$$f(\beta_\varrho)=(\beta_\varrho-\alpha_1)(\beta_\varrho-\alpha_2)(\beta_\varrho-\alpha_3)\ldots(\beta_\varrho-\alpha_m),$$
$$\varrho=1,\,2,\,3\ldots n.$$

Ist irgend eine Wurzel β_ϱ gleich einer Wurzel α_k, so verschwindet $f(\beta_\varrho)$, und umgekehrt ist die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass eine Wurzel β_ϱ gleich einer Wurzel α_k sei, das Verschwinden des Productes:

$$(3)\qquad f(\beta_1)\cdot f(\beta_2)\cdot f(\beta_3)\ldots f(\beta_n).$$

Ganz ebenso drückt

$$(4)\qquad \varphi(\alpha_1)\cdot\varphi(\alpha_2)\cdot\varphi(\alpha_3)\ldots\varphi(\alpha_m)=0$$

aus, dass f und φ eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen. Bezeichnen wir das letzte Poduct (4) mit

$$\begin{aligned}U=(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)(\alpha_1-\beta_3)\ldots(\alpha_1-\beta_n)\times\\(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)\;\ldots\ldots\;(\alpha_2-\beta_n)\times\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\\times(\alpha_m-\beta_1)(\alpha_m-\beta_2)(\alpha_m-\beta_3)\ldots(\alpha_m-\beta_n),\end{aligned}$$

welches sonach $m\cdot n$ lineare Factoren besitzt, so ist das vorhergehende Product (3) nichts anderes als $(-1)^{m\cdot n}U$ (vergleiche auch Nr. 139). Nun hatten wir aber bereits früher (vergl. Nr. 131) eine in den Coefficienten von f und φ rationale und ganze Function $R_{f,\varphi}$ aufgestellt, deren Verschwinden gleichfalls das Vorhandensein eines gemeinschaftlichen linearen Factors ankündigte. Unsere Aufgabe ist daher, den Zusammenhang zwischen U und $R_{f,\varphi}$ zu ermitteln. Es wird sich zeigen, dass direct die Beziehung besteht:

$$U=R_{f,\varphi}.$$

Wir geben im Folgenden drei Beweise für diese Behauptung.

169. *Erster Beweis.* Derselbe stützt sich auf den in Nr. 154 aufgestellten Lehrsatz:

$$R_{f,\varphi\cdot\psi}=R_{f,\varphi}\cdot R_{f,\psi}.$$

Es ist nämlich, wegen $\varphi(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_n)$,

$$R_{f,\varphi} = R_{f,(x-\beta_1)(x-x_2)\ldots(x-\beta_n)} = R_{f,x-\beta_1} \times R_{f,x-\beta_2} \times R_{f,x-\beta_3} \ldots \times R_{f,x-\beta_n}.$$

Nun ist aber allgemein:

$$R_{f,x-\beta} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_m \\ 1 & -\beta & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -\beta & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -\beta \end{vmatrix}.$$

Denken wir uns die erste Colonne mit β^m, die zweite mit β^{m-1}, die dritte mit β^{m-2} u. s. w., die vorletzte mit β multiplicirt und zur letzten addirt, so erhalten wir

$$R_{f,x-\beta} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & f(\beta) \\ 1 & -\beta & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -\beta & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^m \cdot f(\beta).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} R_{f,\varphi} &= (-1)^{m \cdot n} \cdot f(\beta_1) \cdot f(\beta_2) \cdot f(\beta_3) \ldots f(\beta_n) \\ &= \varphi(\alpha_1) . \varphi(\alpha_2) \ldots \varphi(\alpha_m) = U. \end{aligned}$$

170. *Zweiter Beweis.* Bildet man zunächst die Resultante von $f(x)$ und $\varphi(x) - y$, so erhält man:

$$R_{f(x),\varphi(x)-y} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_m & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \ldots & \ldots & a_m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & \ldots & \ldots & \ldots & a_m & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_m \\ 1 & b_1 & b_2 & \ldots & b_n - y & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & \ldots & \ldots & b_n - y & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & b_{n-1} & b_n - y \end{vmatrix} = F(y).$$

Diese Resultante $F(y)$ ist in y vom Grade m und der Coefficient der höchsten Potenz ist $(-1)^m$. Das constante Glied dieser Function $F(y)$

erhält man aus dieser Determinante für $y = 0$. Es ist also gerade jene Function, die wir mit $R_{f,\varphi}$ früher bezeichnet hatten. Anderntheils ist aber nach den Beziehungen, die zwischen den Coefficienten und Wurzeln einer Gleichung bestehen (vergl. Nr. 165 und 166), dieses constante Glied in $F(y)$ bis aufs Vorzeichen $(-1)^m$ gleich dem Producte aller Wurzeln von $F(y)$. Diese Wurzeln sind aber nichts anderes als die Grössen

$$\varphi(\alpha_1), \quad \varphi(\alpha_2) \ldots \varphi(\alpha_m);$$

denn die beiden Functionen

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m) = 0$$

und

$$\varphi(x) - \varphi(\alpha_i) = 0$$

haben den gemeinschaftlichen Factor $x - \alpha_i$, und folglich wird

$$R_{f(x),\, \varphi(x) - y}$$

für $y = \varphi(\alpha_i)$ identisch Null. Daher ist

$$\frac{p_m}{(-1)^m} = \frac{R_{f,\varphi}}{(-1)^m} = (-1)^m \cdot \varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2) \ldots \varphi(\alpha_m)$$

oder

$$R_{f,\varphi} = \varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\,\varphi(\alpha_3) \ldots \varphi(\alpha_m) = U.$$

171. *Dritter Beweis.* Wir bilden uns einmal aus den Potenzen der Wurzeln die Matrices:

$$\text{(I)} \qquad \left|\begin{matrix} \alpha_1^{m+n-1}, & \alpha_1^{m+n-2}, & \ldots & \alpha_1^2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^{m+n-1}, & \alpha_2^{m+n-2}, & \ldots & \alpha_2^2 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_3^{m+n-1}, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_m^{m+n-1}, & \alpha_m^{m+n-2}, & \ldots & \alpha_m^2 & \alpha_m & 1 \end{matrix}\right| .$$

$$\text{(II)} \qquad \left|\begin{matrix} \beta_1^{m+n-1}, & \beta_1^{m+n-2}, & \beta_1^{m+n-3} & \ldots & \beta_1^2 & \beta_1 & 1 \\ \beta_2^{m+n-1}, & \beta_2^{m+n-2}, & \beta_2^{m+n-3} & \ldots & \beta_2^2 & \beta_1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_n^{m+n-1}, & \beta_n^{m+n-2}, & \beta_n^{m+n-3} & \ldots & \beta_n^2 & \beta_n & 1 \end{matrix}\right|$$

und ebenso aus den Coefficienten von f und φ die Matrices

$$\text{(III)} \qquad \left|\begin{matrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_m & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \ldots & \ldots & a_m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & \ldots & \ldots & \ldots & a_m & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_{m-1} & a_m \end{matrix}\right| \qquad (n \text{ Zeilen}),$$

$$\text{(IV)} \qquad \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_1 & \dots & \dots & \dots & b_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} \quad (m \text{ Zeilen}).$$

Die Matrices (I) und (III) sowohl als auch die Matrices (II) und (IV) sind hiebei correspondirende Matrices; denn wenn wir (I) mit (III) und (II) mit (IV) durch Multiplication von Zeile mit Zeile zu je einer Matrix verbinden, so entstehen in beiden Fällen Matrices, deren Elemente durchwegs verschwinden.

Sind daher die Grössen ϱ und σ Proportionalitätsfactoren, so bestehen (vergl. Nr. 92), wenn wir die Determinanten der Matrices (I) und (II) mit $\varDelta(\alpha)$, $\varDelta(\beta)$, die der correspondirenden Matrices (III) und (IV) mit $\varDelta(a)$, $\varDelta(b)$ bezeichnen, die Relationen

$$\varDelta(\alpha) = (-1)^\nu \cdot \varrho \cdot \varDelta(a),$$
$$\varDelta(\beta) = (-1)^\mu \cdot \sigma \cdot \varDelta(b).$$

Dabei sind ν und μ die Summen der Doppelindices des Diagonalgliedes in $\varDelta(\alpha)$ bezw. $\varDelta(\beta)$.

172. Nehmen wir als Determinante $\varDelta(a)$ die Determinante $\varDelta_1(a)$ der n ersten Colonnen in Matrix (III) heraus, so ist die correspondirende die Determinante

$$(-1)^\nu \varDelta_1(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha_1^{m-1}, & \alpha_1^{m-2}, & \dots & \alpha_1^2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^{m-1}, & \alpha_2^{m-2}, & \dots & \alpha_2^2 & \alpha_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_m^{m-1}, & \alpha_m^{m-2}, & \dots & \alpha_m^2 & \alpha_m & 1 \end{vmatrix} = \varDelta_\alpha.$$

Die Determinante $\varDelta_1(a)$ hat aber den Werth 1; folglich erhalten wir für den Proportionalitätsfactor ϱ den Werth

$$\varDelta_1(\alpha) = \varDelta_\alpha = (-1)^\nu \cdot \varrho \cdot \varDelta_1(a) = \varrho,$$

weil

$$\nu = 2\sum_{k=n}^{n+m} k,$$

also jedenfalls eine gerade Zahl ist. Ebenso ergiebt sich

$$\sigma = \varDelta_\beta.$$

Setzt man nun einestheils die Matrices (I) und (II) zur Matrix einer Determinante zusammen:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \alpha_1^{m+n-1}, & \alpha_1^{m+n-2}, & \alpha_1^{m+n-3}, & \dots & \alpha_1^2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^{m+n-1}, & \alpha_2^{m+n-2}, & \alpha_2^{m+n-3}, & \dots & \alpha_2^2 & \alpha_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_m^{m+n-1}, & \alpha_m^{m+n-2}, & \alpha_m^{m+n-3}, & \dots & \alpha_m^2 & \alpha_m & 1 \\ \beta_1^{m+n-1}, & \beta_1^{m+n-2}, & \beta_1^{m+n-3}, & \dots & \beta_1^2 & \beta_1 & 1 \\ \beta_2^{m+n-1}, & \beta_2^{m+n-2}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_n^{m+n-1}, & \beta_n^{m+n-2}, & \beta_n^{m+n-3}, & \dots & \beta_n^2 & \beta_n & 1 \end{vmatrix}$$

und ebenso die Matrices (III) und (IV) zur Matrix der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_m & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_m \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & b_1 & \dots & \dots & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_n \end{vmatrix},$$

so besitzt die erste Determinante den Werth

$$\varDelta = \varDelta_\alpha \cdot \varDelta_\beta \cdot U,$$

denn sie verschwindet 1) für $\alpha_i = \alpha_k$, 2) für $\beta_i = \beta_k$, 3) für $\alpha_i = \beta_k$. Die zweite Determinante erkennt man aber unmittelbar als die Resultante $R_{f,\varphi}$. Entwickeln wir diese Resultante $R_{f,\varphi}$ nach den Determinanten der ersten n Zeilen gemäss dem Laplace'schen Satze, so ist ihr Werth dargestellt in der Form

$$R_{f,\varphi} = \sum (-1)^{\nu} \cdot \varDelta(a) \cdot \varDelta(b),$$

wo ν stets als Summe aller Doppelindices des Diagonalgliedes in $\varDelta(a)$ genommen werden kann.

Ersetzen wir hierin $\varDelta(a)$ durch

$$\frac{\varDelta(\alpha)}{(-1)^{\nu} \cdot \varDelta_\alpha}$$

und $\varDelta(b)$ durch

$$\frac{\varDelta(\beta)}{(-1)^{\mu} \cdot \varDelta_\beta},$$

so erhalten wir

$$R_{f,\varphi} = \sum \frac{(-1)^{\bar{\nu}} \cdot \Delta(\alpha) \cdot \Delta(\beta)}{(-1)^{\mu+\nu} \cdot \Delta_\alpha \cdot \Delta_\beta} = \frac{1}{\Delta_\alpha \cdot \Delta_\beta} \cdot \sum (-1)^{\bar{\nu}} \Delta(\alpha) \Delta(\beta);$$

denn $(-1)^{\mu+\nu} = +1$, da $\Delta(a)$ und $\Delta(b)$ correspondirende Determinanten und somit die Summe aller Doppelindices ihrer Diagonalglieder gleich der doppelten Summe aller ersten oder zweiten Indices derselben ist. Die Summe

$$\sum (-1)^{\bar{\nu}} \Delta(\alpha) \Delta(\beta)$$

ist aber nichts anderes, als die Laplace'sche Entwicklung der Determinante Δ; daher erhalten wir die Relation

$$R_{f,\varphi} = \frac{1}{\Delta_\alpha \cdot \Delta_\beta} \cdot \Delta = U.$$

§ 14. Die Discriminante.

173. *Definition der Discriminante.* Denken wir uns einen Augenblick die Function n^{ten} Grades

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots a_{n-1} x + a_n$$

homogen gemacht in den Variabeln x_1 und x_2, so können wir, wenn man

$$\frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 \text{ und } \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2$$

setzt, gemäss dem Euler'schen Satze f auch in der Form schreiben:

$$f = x_1 f_1 + x_2 f_2.$$

Wir definiren nun als Discriminante der Function f die Resultante von f, f_1 und schreiben

$$R_{f_1, f} = \Delta_f.$$

Gemäss zweier Eigenschaften der Resultante (vgl. Nr. 146) ist

$$R_{f_1, f} = R_{f_1, x_1 f_1 + x_2 f_2} = \varrho \cdot R_{f_1, f_2} = \Delta_f,$$

d. h. die Discriminante ist auch die Resultante der beiden ersten Differentialquotienten nach x_1 und x_2 bis auf eine Constante ϱ, welche hier $= 1$ ist.

Aus der Definition der Discriminante als Resultante folgt einmal, dass sie eine homogene ganze Function der Coefficienten $a_0\ a_1 \ldots a_m$ vom Grade $2(m-1)$ ist; denn $\Delta_f = R_{f_1, f_2}$; f_1 und f_2 sind aber beide vom Grade $(m-1)$ in x (vergl. Nr. 131). Betrachtet man anderntheils die Discriminante als Resultante von f und f_1, so folgt als

Gewicht dieser isobaren Function der Coefficienten das Product der Grade beider Functionen f und f_1, also die Zahl $m(m-1)$ (vergl. Nr. 141).

174. *Berechnung der Discriminante.* Aus der Definition

$$\Delta_f = R_{f_1, f} = (-1)^{n(n-1)} R_{f, f_1} = R_{f, f_1}$$

erhält man unmittelbar den Werth der Discriminante ausgedrückt in den Wurzeln der gleich Null gesetzten Function $f(x)$. Es ist nämlich nach Nr. 168, (4)

$$R_{f, f_1} = f_1(\alpha_1) \cdot f_1(\alpha_2) \cdot f_1(\alpha_3) \ldots f_1(\alpha_n).$$

Nun ist aber, wenn wir uns f als Product seiner linearen Factoren denken:

$$f_1(x) = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{n} \sum (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{k-1})(x-\alpha_{k+1})\ldots(x-\alpha_n),$$

wobei sich die Summe über alle jene Producte erstreckt, die irgend einen der n linearen Factoren nicht enthalten. Trägt man nun aber an Stelle von x eine Wurzel α_k der Gleichung ein, so reducirt sich diese Summe auf das eine Product, in welchem der lineare Factor

$$(x - \alpha_k)$$

von vornherein fehlte. Es ist daher

$$f_1(\alpha_k) = \frac{1}{n} (\alpha_k - \alpha_1)(\alpha_k - \alpha_2)\ldots(\alpha_k - \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k+1})\ldots(\alpha_k - \alpha_n)$$

und folglich:

$$R_{f, f_1} = \frac{1}{n^n} (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots(\alpha_1-\alpha_n) \times (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\ldots(\alpha_2-\alpha_n) \times$$
$$\times (\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)\ldots(\alpha_3-\alpha_n)\ldots(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1}).$$

In diesem Producte tritt aber jede Differenz zweimal auf, einmal positiv und einmal negativ, und da man aus n Elementen $\frac{n(n-1)}{2}$ solche Differenzen bilden kann, so ist:

$$\Delta_f = R_{f, f_1} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n^n} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ k=2}}^{\substack{k=n \\ i=n-1}} (\alpha_i - \alpha_k)^2, \quad i < k. \qquad \text{(I)}$$

Andererntheils erhält man den Werth der Discriminante in Function der Coefficienten von f, wegen

$$\Delta_f = R_{f_1, f_2},$$

ausgedrückt durch die Determinante:

$$R_{f_1, f_2} = \begin{vmatrix} 1, & \frac{n-1}{n} a_1, & \frac{n-2}{n} a_2 & \ldots & \frac{a_{n-1}}{n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1, & \frac{n-1}{n} a_1 & \ldots & \ldots & \frac{a_{n-1}}{n}, & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1, & \frac{n-1}{n} a_1, & \frac{n-2}{n} a_2 & . & \frac{a_{n-1}}{n} \\ \frac{a_1}{n} & \frac{2a_2}{n} & \frac{3a_3}{n} & \ldots & \ldots & a_n & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \frac{a_1}{n} & \frac{2a_2}{n} & \ldots & \frac{(n-1)}{n} a_{n-1}, & a_n & 0. & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \frac{a_1}{n} & \frac{2a_2}{n} & \ldots & \frac{(n-1)}{n} a_{n-1}, & a_n \end{vmatrix} \qquad \text{(II)}$$

Wir haben somit die Discriminante von f in zwei verschiedenen Formen ausgedrückt und wollen im Folgenden noch zwei weitere Beweise geben für die Uebereinstimmung der Ausdrücke (II) und (I).

175. *Zweiter Beweis.* Wir wissen (vgl. Nr. 40 Beispiel 2 und 3), dass das Differenzenproduct

$$\begin{aligned} P = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4) \quad \ldots \quad & (\alpha_1 - \alpha_n) \times \\ (\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4) \quad \ldots \quad & (\alpha_2 - \alpha_n) \times \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1})({}_{n-2} - \alpha_n) & \times \\ (\alpha_{n-1} - \alpha_n) & \end{aligned}$$

sich darstellen lässt durch die Determinante:

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \ldots & \ldots & \ldots & \alpha_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \alpha_4^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Bezeichnen wir nun die Summe der ν^{ten} Potenzen aller Wurzeln mit s_ν, setzen also wie früher (Nr. 168)

$$s_\nu = \alpha_1^\nu + \alpha_2^\nu + \alpha_3^\nu + \cdots + \alpha_n^\nu,$$

so ist das Quadrat dieser Determinante, das wir durch Multiplication von Zeile mit Zeile bilden wollen, gegeben in der neuen Determinante:

$$P^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Wir wollen nun dieselbe so umformen, dass sie mit Hilfe der Newtonschen Formeln in die Determinante (II) Nr. 174, bis auf einen Zahlenfactor übergeht.

176. Stürzen wir nun zunächst die Matrix der $(n-1)$ ersten Zeilen der Determinante P^2. Da hiebei alle Elemente in ihren Colonnen bleiben, also in den zweiten Indices keine Derangements entstehen, so ändert sich hiebei das Vorzeichen um $(-1)^\nu$, hiebei ist ν gleich der Summe aller Derangements der $n-1$ ersten Indices dieser Matrix, also

$$\nu = \sum_{k=1}^{k=n-2} k = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Multipliciren wir hierauf die letzte Zeile noch mit (-1), so erhalten wir

$$(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1} \cdot P^2 = \begin{vmatrix} s_{n-2} & s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-3} \\ s_{n-3} & s_{n-2} & s_{n-1} & \dots & s_{2n-4} \\ s_{n-4} & \cdot & \cdot & \dots & s_{2n-5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ -s_{n-1} & -s_n & -s_{n+1} & \dots & -s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist aber der eine der beiden Factoren, in welche die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-2} & s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-3} \\ 0 & s_0 & s_1 & \dots & s_{n-3} & s_{n-2} & \cdot & \dots & s_{2n-4} \\ 0 & 0 & s_0 & \dots & s_{n-4} & \cdot & \cdot & \dots & s_{2n-5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 & \dots & -s_{n-1} & -s_n & -s_{n+1} & \dots & -s_{2n-2} \\ s_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & s_0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots s_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

gemäss dem Laplace'schen Satze zerfällt.

Der andere Factor dieser Determinante ist

$$s_0^{n-2} \cdot (-1)^{\mu},$$

wobei (vergleiche Nr. 55) μ gleich ist der Gesammtsumme aller zweiten und ersten Indices der Determinante mit dem Diagonalglied s_0^{n-2}, also

$$\mu = (1 + 2 + \cdots n - 2) + \{(n+1) + (n+2) + \cdots (2n-2)\}$$
$$= (n-1)(n-2) + n(n-2).$$

Diese Summe ist aber mit n gerade oder ungerade; daher ist der zweite Factor wegen $s_0 = n$

$$(-1)^n \cdot n^{n-2}$$

und folglich:

$$D = (-1)^n \cdot n^{n-2} \cdot (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1} \cdot P^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot n^{n-2} \cdot P^2.$$

177. Nun entsteht aber die Determinante D aus der Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-2} & s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-3} \\ 0 & s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-3} & s_{n-2} & s_{n-1} & \cdots & s_{2n-4} \\ 0 & 0 & s_0 & \cdots & s_{n-4} & s_{n-3} & \cdots & \cdots & s_{2n-5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 & \cdots & -s_{n-1} & -s_n & -s_{n+1} & \cdots & -s_{2n-2} \\ 0 & -s_1 & -s_2 & \cdots & -s_{n-2} & -s_{n-1} & -s_n & \cdots & -s_{2n-3} \\ 0 & 0 & -s_1 & \cdots & -s_{n-3} & \cdots & \cdots & \cdots & -s_{2n-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s_1 & -s_2 & -s_3 & \cdots & -s_n \end{vmatrix},$$

indem wir die erste Zeile zur $(n+1)^{\text{ten}}$, die zweite zur $(n+2)^{\text{ten}}$ u. s. w., endlich die $(n-1)^{\text{te}}$ zur $2(n-1)^{\text{ten}}$, d. i. zur letzten Zeile addiren. Es ist also auch

$$\varDelta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot n^{n-2} \cdot P^2.$$

Multipliciren wir aber die Determinante $\varDelta$ mit der Determinante

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_n & \cdots & a_2 & a_1 & 1 \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & a_{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

welche, da rechts der Diagonale nur verschwindende Elemente stehen, sich auf ihr Diagonalglied reducirt und also den Werth 1 besitzt, so erhalten wir:

$$\varDelta \cdot T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot n^{n-2} \cdot P^2 =$$

$$\begin{vmatrix}
s_0, & s_0 a_1 + s_1, & s_0 a_2 + s_1 a_1 + s_2, \cdots, & s_0 a_{n-1} + s_1 a_{n-2} + \cdots s_{n-2} a_1 + s_{n-1} \cdots \\
0 & s_0, & s_0 a_1 + s_1, \ldots\ldots, & s_0 a_{n-2} + s_1 a_{n-3} + \cdots\cdots + s_{n-2}, \cdots \\
0 & 0, & s_0, \ldots\ldots\ldots, & s_0 a_{n-3} + s_1 a_{n-4} + \cdots\cdots + s_{n-3}, \cdots \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
0, & 0, & 0, \ldots\ldots s_0, \; s_0 a_1 + s_1, & s_0 a_2 + s_1 a_1 + s_2, \ldots \\
-s_1, & -(s_1 a_1 + s_2), & -(s_1 a_2 + s_2 a_1 + s_3), \cdots, & -(s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2} + s_3 a_{n-3} \cdots + s_n), \cdots \\
0 & -s_1, & -(s_1 a_1 + s_2), \ldots\ldots & -(s_1 a_{n-2} + s_2 a_{n-3} \cdots\cdots + s_{n-1}) \cdots \\
0 & 0, & -s_1, \quad -(s_1 a_1 + s_2), & \ldots\ldots\ldots \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
0, & 0, & 0, \ldots\ldots -s_1, \; -(s_1 a_1 + s_2), \cdots, & -(s_1 a_{n-1} + \cdots + s_n)
\end{vmatrix}$$

Tragen wir aber gemäss den Newton'schen Identitäten für die einzelnen Elemente ihre Werthe ein, so erhalten wir:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot n^{n-2} \cdot P^2 =$$

$$\begin{vmatrix}
n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2 \ldots a_{n-1}, & 0, & 0 \ldots\ldots 0 \\
0 & n, & (n-1)a_1 \ldots 2a_{n-2}, & a_{n-1} & 0 \ldots\ldots 0 \\
0 & 0, & n \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & a_{n-1} \ldots 0 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
0 & 0 & \ldots\ldots\ldots n, & (n-1)a_1, \ldots\ldots & a_{n-2} \quad a_{n-1} \\
a_1 & 2a_2, & 3a_3, \ldots\ldots\ldots na_n & 0, & 0 \ldots\ldots 0 \\
0 & a_1 & 2a_1, \ldots\ldots (n-1)a_{n-1} & na_n & 0 \ldots\ldots 0 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots a_1 & 2a_2, \; 3a_3 & \ldots\ldots na_n
\end{vmatrix}$$

$$= n^{2n-2} \varDelta_f,$$

und folglich:

$$R_{f_1, f_2} = \varDelta_f = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n^n} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ k=2}}^{\substack{k=n \\ i=n-1}} (\alpha_i - \alpha_k)^2, \quad i < k.$$

178. *Ueber das Auftreten einer mehrfachen Wurzel von f in der ersten Abgeleiteten von f.* Aus dem Differenzenproducte erkennt man,

dass, wenn f eine Doppelwurzel besitzt, die Discriminante verschwinden muss. Da aber die Discriminante Resultante ist von f und f_1, so ergiebt sich, dass auch f_1 den Doppelfactor von f mindestens einmal besitzen muss. Es frägt sich nun, wenn f einen ν-fachen linearen Factor besitzt: in welchem Grade kommt derselbe der ersten Abgeleiteten f_1 zu.

Um dies zu untersuchen, schreiben wir die Function f in der Form:

$$f = (x - t)^\nu \cdot \varphi(x),$$

wobei $(x - t)$ der ν-fache Factor von f ist, und $\varphi(x) = 0$, die Wurzel $x = t$ nicht mehr besitzt.

Es ist dann die erste Abgeleitete von f:

$$\begin{aligned} f' &= \nu(x - t)^{\nu - 1}\varphi(x) + (x - t)^\nu \varphi'(x) \\ &= (x - t)^{\nu - 1}\{\nu\varphi(x) + (x - t)\varphi'(x)\}. \end{aligned}$$

Da der Ausdruck $\nu\varphi(x) + (x - t)\varphi'(x)$ für $x = t$ nicht verschwindet, weil nach Voraussetzung $\varphi(t) \gtrless 0$, so besitzt f' den Factor $(x - t)$ nur $(\nu - 1)$mal. Wenn also z. B. $(x - t)$ Doppelfactor von f ist, so ist er einfacher Factor von f'.

Anmerkung. Es besteht sodann eine Relation

$$Af + Bf_1 = 0,$$

in welcher A und B keinen gemeinsamen Factor besitzen. B enthält sämmtliche vielfache Factoren:

$$x - t_2, \qquad x - t_2 \ldots$$

von f jeden als einfachen Factor und der grösste gemeinsame Factor Φ von f und B ist das Product derselben.

$$\Phi = (x - t_1)(x - t_2) \ldots$$

179. *Berechnung der Doppelwurzel einer Function* $f = 0$. Wir haben in Nr. 167 gezeigt, dass, wenn der Coefficient der höchsten Potenz in $f = 1$ ist, stets die Beziehung besteht:

$$R_{f_1, f} = R_{f_1, f_2}.$$

Besitzt also f eine Doppelwurzel, so ist dieselbe der gemeinschaftliche Factor der beiden Differentialquotienten f_1 und f_2 von f.

Ist also α die Doppelwurzel, so wird der Cayley'sche Ausdruck

$$\frac{1}{y - x}\{f_1(x) f_2(y) - f_1(y) f_2(x)\} = \sum_{i=1}^{i=n} p_i y^{n-i}$$

für $x = \alpha$ identisch null, was nur dann möglich ist, wenn in der Summe rechts die Coefficienten von y einzeln verschwinden.

Man hat also zur Berechnung der Doppelwurzel $x = \alpha$ die n Gleichungen

$$p_1 = c_{11}\alpha^{n-1} + c_{12}\alpha^{n-2} \cdots + c_{1n} = 0$$
$$p_2 = c_{21}\alpha^{n-1} + c_{22}\alpha^{n-2} \cdots + c_{2n} = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$p_n = c_{n1}\alpha^{n-1} + c_{n2}\alpha^{n-2} \cdots + c_{nn} = 0,$$

welche linear und homogen sind in den n Grössen:

$$\alpha^{n-1},\ \alpha^{n-2}, \ldots \alpha^2,\ \alpha,\ 1.$$

Es ist daher:

$$\alpha^{n-1} : \alpha^{n-2} : \ldots \alpha : 1 = A_{i1} : A_{i2} \ldots A_{in},$$

wenn die Grössen A_{ik} die Minoren einer Zeile der Determinante der c_{ik}, mit abwechselndem Vorzeichen genommen, sind. Auch hier ist wieder die Berechnung eine eindeutige, und folglich kann nur eine Doppelwurzel und keine höhere Potenz eines linearen Factors auf diesem Wege ermittelt werden.

180. *Die ersten partiellen Differentialquotienten der Discriminante.* Die Discriminante $\Delta_f = R_{f, f_1}$ lässt sich (nach Nr. 131) auch darstellen in der Form:

$$\text{(I)} \qquad \Delta_f = R_{f, f_1} = A(x) f + B(x) f_1.$$

Differentiiren wir diese Gleichung nach a_ν, so kommt

$$\frac{\partial \Delta_f}{\partial a_\nu} = \frac{\partial A}{\partial a_\nu} f(x) + x^{n-\nu} A(x) + \frac{\partial B}{\partial a_\nu} f_1 + \frac{(n-\nu)}{n} x^{n-\nu-1} \cdot B(x).$$

Wenn demnach $x = \alpha$ wieder Doppelwurzel von f ist, so erhält man aus dieser Gleichung durch Substitution $x = \alpha$, da gemäss der Anmerkung in Nr. 178 auch $B(\alpha) = 0$,

$$\frac{\partial \Delta_f}{\partial a_\nu} = \alpha^{n-\nu} A(\alpha)$$

und ebenso

$$\frac{\partial \Delta_f}{\partial a_\mu} = \alpha^{n-\mu} A(\alpha),$$

also

$$\frac{\partial \Delta_f}{\partial a_\nu} : \frac{\partial \Delta_f}{\partial a_\mu} = \alpha^{n-\nu} : \alpha^{n-\mu}.$$

Die partiellen Differentialquotienten von Δ_f nach den Coefficienten a_1 bis a_n sind also der ersten bis n^{ten} Potenz des Doppelfactors von f proportional. Man kann die eben erhaltenen Resultate wieder benutzen, um charakteristische Differentialgleichungen für die Discriminante aufzustellen. Diese charakteristischen Differentialgleichungen sowohl für die Discriminante als auch für die Resultante wurden zuerst von Brioschi aufgestellt (Crelle's Journal Bd. 53 und Annali di Matem. Bd. 2, 1859), später von Noether (Faà di Bruno, in's Deutsche über-

setzt von Walter, Teubner 1881) eingehender auf ihren inneren Zusammenhang untersucht.

181. *Dritter Beweis für die Uebereinstimmung beider Darstellungen* (I) *und* (II) *der Discriminante in* Nr. 174. Denken wir uns die Resultante von $f(x)$ und $f(x+y)$ gebildet, etwa nach der Sylvester'schen Methode, so ist dieselbe vom Grade n^2 in y, da die Coefficienten b_i von $f(x+y)$ sich auf n Zeilen vertheilen, und jede Zeile in immer anderer Colonne den Coefficienten b_n enthält, der in y vom n^{ten} Grade ist.

Von den n^2 Wurzeln y dieser Resultante sind in erster Linie n gleich null; denn jedesmal wenn

$$\alpha_i + y = \alpha_i, \qquad i = 1, 2 \ldots n,$$

ist, dann verschwindet die Resultante $R_{f(x), f(x+y)}$. Die übrigen $n(n-1)$ Wurzeln sind nichts anderes als die einmal positiv und einmal negativ genommenen Wurzeldifferenzen

$$\alpha_k - \alpha_i;$$

denn die Resultante $R_{f(x), f(x+y)}$ verschwindet auch, wenn

$$\alpha_i + y = \alpha_k, \qquad i \gtrless k,$$

also wenn

$$y = \alpha_k - \alpha_i,$$

oder

$$= \alpha_i - \alpha_k$$

ist. Nun geht aus den Eigenschaften der Resultante (vgl. Nr. 146) hervor, dass

$$R_{f(x), f(x+y)} = R_{f(x),\, \{f(x+y) - f(x)\}} = R_{f(x),\, \frac{y\{f(x+y)-f(x)\}}{y}}$$

und dass ferner (vergl. Nr. 153, 154, 155)

$$R_{f(x), \frac{y\{f(x+y)-f(x)\}}{y}} = R_{f(x), y} \cdot R_{f(x), \frac{f(x+y)-f(x)}{y}}.$$

Weil aber $R_{f(x), y} = y^n$, so folgt endlich

$$R_{f(x), f(x+y)} = y^n \cdot R_{f(x), \frac{f(x+y)-f(x)}{y}} = y^n \cdot F(y).$$

Hiebei ist $F(y)$ noch vom Grade $n(n-1)$ in y und besitzt die Wurzeln $(\alpha_k - \alpha_i)$, wo $k \gtrless i$ sein kann.

Der Coefficient c_0 der höchsten Potenz von y in dieser Function $F(y)$ ist 1. Denn da der Coefficient von x^n in $f(x)$ selbst 1 ist, so besitzen zunächst die Diagonalglieder der $n-1$ ersten Zeilen in der Resultante

$$R_{f, \frac{f(x+y)-f(x)}{y}}$$

den Werth 1. Und weil die Potenzen y^{n-1}, welche sich nur in den

Diagonalgliedern der n letzten Zeilen befinden können, als letzte Glieder der binomischen Entwicklungen $(x+y)^n$ gleichfalls nur den Coefficienten 1 besitzen, so ist in der That in $F(y)$ der Coefficient $c_0 = 1$. Daher ist das letzte Glied c_n in $F(y) = 0$, — und zwar positiv genommen, da $F(y)$ von geradem Grade ist, — das Product aller Wurzeln $(\alpha_k - \alpha_i)$. Dieses letzte Glied wird aber erhalten, wenn man in

$$F(y) = R_{f,\, \frac{f(x+y)-f(x)}{y}}$$

$y = 0$ setzt. Die rechte Seite dieser Gleichung geht dadurch über in

$$R_{f,\, \frac{\partial f}{\partial x}} = R_{f,\, nf_1} = n^n R_{f, f_1},$$

und weil nach Nr. 139

$$R_{f, f_1} = (-1)^{n(n-1)} R_{f, f_1} = R_{f_1, f},$$

so erhalten wir schliesslich:

$$n^n R_{f_1, f} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod (\alpha_i - \alpha_k)^2, \quad k > i,$$

oder

$$\varDelta_f = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n^n} \cdot \prod_{\substack{i=1\\k=2}}^{\substack{k=n\\i=n-1}} (\alpha_i - \alpha_k)^2, \quad i < k.$$

182. *Beispiel.* Die Discriminante der quadratischen Gleichung

$$f(x) = x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

ist:

$$4\varDelta_f = (-1)^{\frac{2.1}{2}} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 = -(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = \begin{vmatrix} 2 & a_1 \\ a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} = 4a_2 - a_1^2.$$

Sind also die Wurzeln α_1 und α_2 reell, so ist $\varDelta_f$ negativ; sind sie imaginär, so ist $\varDelta_f$ positiv; ist $\alpha_1 = \alpha_2$, so ist

$$\varDelta_f = 0.$$

Zur Berechnung der Doppelwurzel von f hat man, da dieselbe einfache Wurzel der ersten Differentialquotienten ist, entweder die Gleichung

$$2x + a_1 = 0,$$

oder

$$a_1 x + 2a_2 = 0.$$

183. *Beispiel.* Die Discriminante der cubischen Gleichung

$$f(x) = x^3 + px + q = 0$$

ist:

$$27\,\Delta_f = (-1)^{3\cdot\frac{2}{2}}(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2$$
$$= -(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2$$

oder (vergl. Nr. 174, (II)):

$$81\,\Delta_f = \begin{vmatrix} 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p \\ 0 & 2p & 3q & 0 \\ 0 & 0 & 2p & 3q \end{vmatrix} = 3(27q^2+4p^3),$$

also:

$$27\,\Delta_f = 27q^2+4p^3.$$

Sind alle drei Wurzeln reell, so ist das Product

$$(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2$$

positiv, also die Discriminante Δ_f negativ.

Sind zwei Wurzeln imaginär, so ist das Product der quadrirten Wurzeldifferenzen negativ, daher Δ_f positiv. Besitzt $f(x)=0$ eine Doppelwurzel, so ist $\Delta_f=0$, und man kann dieselbe berechnen aus dem Differentialquotienten

$$f_2 = 2px+3q = 0.$$

Nehmen wir die cubische Gleichung in ihrer allgemeinen Form:

$$f = x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 = 0,$$

so ist immer noch

$$\Delta_f = -\frac{1}{27}\{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)\}^2.$$

Den Ausdruck der Discriminante in den Coefficienten von f finden wir aber am besten durch die Cayley'sche Determinante. Es ist nämlich:

$$\frac{1}{x-y}\cdot\{f_1(x)f_2(y)-f_2(x)f_1(y)\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3x^2+2a_1x+a_2, & a_1x^2+2a_2x+3a_3 \\ 3y^2+2a_1y+a_2, & a_1y^2+2a_2y+3a_3 \end{vmatrix}\cdot\frac{1}{x-y}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2a_1 & a_2 \\ a_1 & 2a_2 & 3a_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \end{vmatrix}\cdot\frac{1}{x-y}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2a_1 \\ a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x^2 & x \\ y^2 & y \end{vmatrix}\cdot\frac{1}{x-y} + \begin{vmatrix} 3 & a_2 \\ a_1 & 3a_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ y^2 & 1 \end{vmatrix}\frac{1}{x-y}$$
$$+ \begin{vmatrix} 2a_1 & a_2 \\ 2a_2 & 3\,a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix}\cdot\frac{1}{x-y} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2a_1 \\ a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}xy + \begin{vmatrix} 3 & a_2 \\ a_1 & 3a_3 \end{vmatrix}(x+y) + \begin{vmatrix} 2a_1 & a_2 \\ 2a_2 & 3a_3 \end{vmatrix}.$$

Ordnet man hier die rechte Seite nach y, so erhält man:

$$\left\{\begin{vmatrix} 3 & 2a_1 \\ a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 3 & a_2 \\ a_1 & 3a_3 \end{vmatrix}\right\} y$$

$$+ \left\{\begin{vmatrix} 3 & a_2 \\ a_1 & 3a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 2a_1 & a_2 \\ 2a_2 & 3a_3 \end{vmatrix}\right\} = p_1 y + p_2.$$

Die Elimination von x aus den beiden Gleichungen:

$$p_1 = 0, \qquad p_2 = 0$$

liefert die Discriminante:

$$-81 \cdot \Delta_f =$$

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2a_1 \\ a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 3 & a_2 \\ a_1 & 3a_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & a_2 \\ a_1 & 3a_3 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 2a_1 & a_2 \\ 2a_2 & 3a_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 4(3a_2 - a_1^2)(3a_3 a_1 - a_2^2) - (9a_3 - a_1 a_2)^2$$

oder:

$$-27\,\Delta_f = 18 a_1 a_2 a_3 - 4a_1^3 a_3 - 4a_2^3 + a_1^2 a_2^2 - 27 a_3^2.$$

Das negative Vorzeichen links rührt davon her (vergl. Nr. 150), dass die nach der Cayley'schen Methode berechnete Resultante R' mit der durch die Sylvester'sche Methode gebildeten R durch die Relation zusammenhängt

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R'_{f_1, f_2} = R_{f_1, f_2}.$$

Will man die Doppelwurzel von f berechnen, so kann man sich hiezu (vergl. Nr. 179) einer der beiden Gleichungen $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ bedienen.

§ 15. Simultanes System homogener linearer diophantischer Gleichungen.

(Anhang zu § 8.)

184. *Aufsuchung ganzzahliger Lösungen überhaupt.* Wir hatten in Nr. 109 die allgemeinste Lösung eines Systemes linearer Gleichungen besprochen, in denen die Zahl der Unbekannten die Zahl der Gleichungen um mehr als 1 übertrifft. In manchen Fällen, insbesondere in gewissen Hauptaufgaben der Invariantentheorie, interessirt uns nicht die allgemeinste Lösung, sondern jene Lösungen, die nur ganzzahlige

Werthe der Unbekannten, ja selbst nur ganzzahlige positive enthalten. Wenn nun auch die im Folgenden entwickelte Methode für die Aufsuchung solcher Werthsysteme die Determinantentheorie nicht zu Hilfe nimmt, so scheint doch hier der geeignete Platz zu sein, jene Punkte dieser Aufgabe zu besprechen, von denen wir im zweiten und dritten Bande Gebrauch machen werden. Die Theorie, die wir hiebei für die Auflösung solcher diophantischer Gleichungen entwickeln, wird in der Praxis im allgemeinen Falle wohl kaum verfolgt werden; für die folgenden Beweise erweist sie sich aber als äusserst zweckentsprechend.

Auflösung einer einzigen diophantischen Gleichung. Es sei gegeben die lineare Gleichung mit n Unbekannten:

(I) $$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots a_n x_n = 0.$$

Alle Coefficienten sind ganzzahlig und die Aufgabe ist, ganzzahlige Werthe der Unbekannten zu suchen, welche sie befriedigen. Zu dem Zwecke nehmen wir den numerisch kleinsten Coefficienten a_i der Gleichung und dividiren mit ihm alle übrigen a_k. Ist dann q_k der sich ergebende Quotient und r_k der Rest, so ist

$$a_k = q_k a_i + r_k.$$

Trägt man diese Werthe von a_k in (I), so erhält man:

$$a_i\Big(x_i + \sum_k q_k x_k\Big) + r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3 + \cdots r_n x_n = 0,$$

oder, wenn wir setzen:

$$x_i + \sum_k q_k x_k = \lambda_i,$$

so folgt:

(II) $$a_i \lambda_i + r_1 x_1 + r_2 x_2 + \cdots r_n x_n = 0.$$

Die Coefficienten dieser neuen Gleichung sind nun kleiner als die der ersten, und die Aufgabe ist somit auf eine leichtere reducirt. Dieses Verfahren wiederholt man so lange, bis irgend eine Unbekannte als kleinsten Coefficienten die Zahl 1 besitzt, bis man also die Gleichung erhält:

(III) $$\lambda_i = \varrho_1 \lambda_1 + \varrho_2 \lambda_2 + \varrho_3 \lambda_3 + \cdots \varrho_{n-1} \lambda_{n-1},$$

wo die Grössen ϱ_i irgend welche ganze Zahlen und die λ_i theils neu eingeführte, theils noch Unbekannte der ersten Gleichung sein werden. Durch Eliminationen erhält man sodann für jede Unbekannte einen Werth:



(IV) $$x_i = \xi_i\lambda_1 + \eta_i\lambda_2 + \cdots \pi_i\lambda_{n-1},$$

wobei ξ_i, $\eta_i \ldots \pi_i$ ganze Zahlen sind, deren mindestens eine von null verschieden ist. Damit ist aber die allgemeinste Lösung der diophantischen Gleichung aufgestellt. Hiebei ist die Zahl der Parameter λ in (IV) immer um 1 kleiner als die Zahl der Unbekannten.

185. *Beispiel.*

(1) $$5x + 8y + 12z - 43t = 0.$$

Da der kleinste Coefficient die Zahl 5 ist, so setzen wir

(2) $$x + 2y + 2z - 9t = \lambda_1$$

und erhalten:

$$5\lambda_1 - 2y + 2z + 2t = 0.$$

Substituirt man hierin

(3) $$2\lambda_1 - y + z + t = \lambda_2,$$

dann erhält man die Gleichung

(4) $$-2\lambda_2 = \lambda_1.$$

Trägt man diesen Werth von λ_1 in (3) ein, so kommt:

(5) $$t = y - z + 5\lambda_2.$$

Hiezu tritt:

(6) $$x = 7y - 12z + 43\lambda_2$$

durch Substitution des Werthes von λ_1 und t aus (4) und (5) in (2). Diese beiden Gleichungen (5) und (6) stellen in Verbindung mit

$$y = y, \quad z = z$$

die allgemeine Lösung der diophantischen Gleichung (1) dar. Für

$$y = 1, \quad z = 0, \quad \lambda_2 = 0$$
$$z = 1, \quad y = 0, \quad \lambda_2 = 0$$
$$\lambda_2 = 1, \quad y = 0, \quad z = 0$$

erhalten wir die Speciallösungen:

$$\begin{array}{lll} t = 1, & -1, & 5 \\ x = 7, & -12, & 43 \\ q = 1 & 0 & 0 \\ z = 0 & 1 & 0 \end{array}$$

und man erkennt, dass die Coefficienten ξ_i, $\eta_i \ldots \pi_i$ in (IV) nichts anderes sind, als diese einfachen Lösungen der gegebenen Gleichung.

186. *Auflösung von mehreren simultanen diophantischen Gleichungen.* Die allgemeine Lösung Einer Gleichung ist also dargestellt durch

$$x_i = \lambda_1 \xi_i + \lambda_2 \eta_i + \lambda_3 \zeta_i + \cdots \lambda_{n-1} \pi_i, \qquad i = 1, 2 \ldots n,$$

in der alle Grössen rechts ganzzahlig sind. Hat man alsdann zwei diophantische Gleichungen mit n Unbekannten aufzulösen, so kann man zunächst die erste Gleichung nach der vorhergehenden Methode (Nr. 184) behandeln und die sich so ergebenden Werthe der x_i in die zweite Gleichung eintragen. Da die Zahl der Parameter λ_i um 1 kleiner ist als die Zahl der Unbekannten, so erhält man dadurch eine Gleichung in λ_i mit $n - 1$ Unbekannten. Sie wird ebenso behandelt wie die erste Gleichung für x_i, und man wird ein Werthsystem

$$\lambda_i = \mu_1 \alpha_i + \mu_2 \beta_i + \mu_3 \gamma_i \cdots + \mu_{n-2} \varphi_i$$

erhalten, dessen Substitution in die Lösungen für x_i die allgemeine Lösung der beiden simultanen diophantischen Gleichungen ergiebt. Ganz in derselben Weise wiederholt man die Operationen bei Auflösung von drei, vier und mehr diophantischen Gleichungen und man erhält für ϱ Gleichungen mit n Unbekannten, $\varrho < n$:

$$\text{(V)} \qquad x_i = \xi_i \nu_1 + \eta_i \nu_2 + \zeta_i \nu_3 + \cdots \pi_i \nu_{n-\varrho}.$$

187. *Ganzzahlige positive Lösungen.* Zur Aufsuchung der ganzzahligen positiven Lösungen besitzen wir keine systematische Methode wie vorhin. Man erkennt von vornherein, dass die Gleichung

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots a_n x_n = 0$$

überhaupt keine positive Lösung zulässt, sobald die Coefficienten a_i selbst durchweg positiv sind, die identische Lösung $x_i = 0$ ausgenommen. Dasselbe gilt für ein System von diophantischen Gleichungen, sobald nur eine Combination existirt, welche lauter positive Coefficienten aufweist, da ja diese durch positive Lösungen nicht befriedigt werden kann. Man darf also annehmen, dass eine Anzahl Coefficienten negativ ist; wir bezeichnen sie mit b_i und schreiben daher die Gleichung (I) in der Form

$$\text{(VI)} \qquad a_x = b_y.$$

Von dieser Gleichung behaupten wir: erstens, sie hat immer positive Lösungen; zweitens, die Zahl der einfachen positiven Lösungen, die ihr zukommen, ist eine endliche. Dabei verstehen wir unter einfachen Lösungen diejenigen Lösungen x_i, welche sich nicht mehr aus anderen in der Form

$$x_i = \xi_i + \eta_i$$



zusammensetzen lassen. Solche Lösungen wie diese nennen wir zusammengesetzte.

188. *Specielle ganzzahlige Lösungen.* Was die erste Behauptung betrifft, so ist deren Richtigkeit leicht einzusehen. Wir setzen zunächst rechts wie links alle Unbekannten bis auf je eine gleich null und erhalten

$$a_i x_i = b_k y_k .$$

Die Gleichung (VI) wird befriedigt für die positiven Werthe

$$x_i = b_k, \quad y_k = a_i, \quad x_1 = x_2 = \cdots y_\varrho = y_\sigma = \cdots \text{ u. s. w.} = 0.$$

Solche Lösungen giebt es $m \cdot n$ an der Zahl. Ausser diesen existiren noch sehr viele positive einfache Lösungen; aber die Gesammtzahl derselben muss eine endliche sein. Denn liegt eine Lösung vor $x_i = \xi_i$ und $y_k = \eta_k$, so dass gleichzeitig

$$\xi_i > b_k$$
$$\eta_k > a_i$$

ist, dann ist diese Lösung keine einfache mehr, sondern eine zusammengesetzte. Die Gleichung (VI) wird nämlich auch befriedigt durch die Differenz dieser mit der vorerwähnten Lösung. Die Werthe ξ_i, η_k . . . u. s. w. der einfachen Lösungen haben also obere Grenzen, und können demnach nur in endlicher Zahl vorhanden sein. [Der Einwand, dass ξ_i allein über alle Grenzen wachsen könne, während η_k die Grenze a_i nicht überschreite, ist a priori hinfällig, da ja die Gleichung (VI) bestehen muss.]

189. *Allgemeine positive ganzzahlige Lösungen.* Ist nun N die Zahl aller einfachen positiven Lösungen, etwa

$$\begin{array}{llllll} x_1 = \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \ldots & \varkappa_1 \\ x_2 = \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \ldots & \varkappa_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ y_1 = \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \ldots & \psi_1 \\ y_2 = \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \ldots & \psi_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \end{array}$$

so erhalten wir wie vorhin (Nr. 184) die allgemeinste positive Lösung, wenn wir die Verticalreihen dieses Systems multipliciren mit

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3 \ldots \lambda_N$$

und die Producte einer Zeile addiren, nämlich

$$\text{(VII)} \qquad \begin{cases} x_i = \xi_i \lambda_1 + \eta_i \lambda_2 + \cdots \pi_i \lambda_N \\ y_k = \alpha_k \lambda_1 + \beta_k \lambda_2 + \cdots \psi_k \lambda_N \end{cases}.$$



Tritt nun zur ersten Gleichung (VI)

$$a_x = b_y$$

noch eine simultane zweite

$$c_x = d_y,$$

so tragen wir wie vorhin die Werthe von x_i und y_k aus (VII) in diese zweite Gleichung ein. Wir erhalten so eine neue Gleichung mit N Unbekannten λ_i. Die Zahl ihrer einfachen positiven Lösungen ist wie vorhin nothwendig endlich, und ihre allgemeine positive Lösung von der Form

$$\lambda_i = \mathfrak{a}_i \mu_1 + \mathfrak{b}_i \mu_2 + \mathfrak{c}_i \mu_3 + \mathfrak{d}_i \mu_4 + \cdots + \mathfrak{r}_i \mu_M.$$

Wir tragen diese Werthe in das System (VII) ein und erhalten so die allgemeine positive Lösung der beiden simultanen diophantischen Gleichungen. Aus ihr gehen die einfachen Lösungen hervor, wenn wir eine Grösse $\mu_i = 1$, alle übrigen null setzen.

In derselben Weise erkennt man, dass ein beliebiges System von diophantischen Gleichungen nur eine endliche Zahl positiver einfacher Lösungen besitzt.

eindeutigen Transformationen für die Geometrie erwachsen. Die erwähnten Ziele bezeichnen zugleich die Stellung dieser Vorlesungen gegenüber den von Herrn Fiedler übersetzten und bearbeiteten Salmonschen Lehrbüchern, indem der Stoff, im einzelnen mehr beschränkt, im ganzen doch ein weiteres Gebiet umfaſst.

In dem ersten Bande wird in dem angegebenen Sinne die Geometrie der Ebene behandelt. Den Schluſs bildet die Darstellung der Grundzüge einer Theorie der Konnexe, jener von Clebsch noch zuletzt in die Geometrie eingeführten Gebilde.

Clebsch, Dr. **A.**, und **P. Gordan**, Professor in Erlangen, Theorie der Abel'schen Functionen. [XIII u. 333 S.] gr. 8. 1866. geh. n. ℳ 7.20.

Die Herren Verfasser suchen in diesem Werke die Theorie der Abelschen Funktionen auf eine ganz neue Weise zu begründen, welche das Interesse der Mathematiker in hohem Grade erregt und das Verständnis der Theorie wesentlich gefördert hat.

Gordan, Dr. **Paul**, ord. Professor der Mathematik an der Universität zu Erlangen, über das Formensystem binärer Formen. [52 S.] gr. 8. 1875. geh. n. ℳ 2.—

Hesse, Dr. **Otto**, weil. Professor am königl. Polytechnikum zu München, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. Revidirt und mit Zusätzen versehen von Dr. S. Gundelfinger, a. o. Professor an der Universität zu Tübingen. Dritte Auflage. [XVI u. 546 S.] gr. 8. 1876. geh. n. ℳ 13.—

„Ungeachtet des bedeutenden Aufschwunges, welchen die analytische Geometrie namentlich im Verlaufe des letzten Vierteljahrhunderts einerseits durch die Erweiterung des Koordinatenbegriffes, andererseits durch die Fortschritte der algebraischen Methoden, besonders in der Theorie der Determinanten und der homogenen Funktionen, genommen hat, fehlte es doch noch bis vor kurzem an einem Lehrbuche, welches geeignet gewesen wäre, den Studierenden der Mathematik zur Einführung in diese neueren Disziplinen zu dienen. Für die analytische Geometrie der Ebene ist zu diesem Zwecke den deutschen Jüngern der Wissenschaft ein wichtiges Hilfsmittel in der Fiedlerschen Übertragung des Salmonschen Werkes in die Hand gegeben worden; für die des Raumes wird die erwähnte Lücke unserer mathematischen Litteratur auf eine ausgezeichnete Weise durch das vorliegende Lehrbuch ausgefüllt. Daſs der Verfasser desselben vor allen berechtigt war, in diese Lücke einzutreten, dazu hat er sich den Anspruch durch seine rüstige Mitwirkung am Ausbau sowohl der analytisch-geometrischen Methoden, als der hiermit im Zusammenhange stehenden Teile der Algebra erworben; ein Blick in die letzten zwanzig Jahrgänge von Crelles Journal wird genügen, ihm diese Berechtigung zuzuerkennen. Gegenüber der Stellung des Verfassers auf dem Gebiete der Wissenschaft muſs Referent von einer kritischen Besprechung des vorliegenden Werkes absehen, umsomehr, als dieselbe nur auf Anerkennung des darin dargelegten Talentes und der Meisterschaft in der Darstellungsweise hinauslaufen könnte. — [Folgt Inhaltsangabe.] — Für Leser, welche mit den nötigen Vorkenntnissen ausgerüstet, Zugang zu den neueren analytisch-geometrischen Theorieen erhalten wollen, kann das vorliegende Werk als eines der wichtigsten Hilfsmittel bezeichnet werden u. s. w." [O. Fort in der Zeitschrift für Mathematik u. Physik.]

——— sieben Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Fortsetzung der Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises. [Separatausgabe aus der Zeitschrift für Mathematik und Physik.] [52 S.] gr. 8. 1874. geh. n. ℳ 1.60.

Vergriffen.

——— Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. Dritte Auflage, revidiert von Dr. S. Gundelfinger, Professor am Groſsherzoglichen Polytechnikum zu Darmstadt. [VIII u. 230 S.] gr. 8. 1881. geh. n. ℳ 5.20.

„Man kann ohne Übertreibung behaupten, daſs es sehr wenige Bücher giebt, die auf dem kleinen Raume von 230 Seiten eine solche Fülle von Material in einer so eleganten und durchaus klaren Darstellung bieten u. s. w." [Schlömilch in d. Zeitschr. f. Mathematik u. Physik.]

Dr. PAUL GORDAN'S VORLESUNGEN

ÜBER

INVARIANTENTHEORIE.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. GEORG KERSCHENSTEINER.

ZWEITER BAND:

BINÄRE FORMEN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1887.

Vorwort.

Ueber die Stellung dieser Vorlesungen zu den bisher in deutscher Sprache erschienenen Invariantenwerken, sowie über den Inhalt und die Ziele der vorliegenden Bearbeitung, habe ich mich bereits im ersten Bande ausgesprochen. Doch dürfte ich vielleicht das Eine nochmals betonen, dass es der Gordan'sche Satz von der Endlichkeit des Formensystemes ist, auf dem das ganze Werk seine Grundlage findet. Diese einheitliche Basis habe ich stets beizubehalten gesucht, wenn ich auch in der Bearbeitung mir grundsätzliche Aenderungen in der Anordnung, Systematisirung und Gliederung des Stoffes erlaubte, wozu mich mancherlei Gründe veranlassten.

Wer es je unternommen hat, in ein so abstractes Gebiet wie die Theorie der Invarianten tiefer einzudringen, ein Gebiet, das manchmal durch die Sprödigkeit seiner Materie einer anziehenden Darstellung nicht unwesentliche Schwierigkeiten bereitet, der hat vielleicht lebhafter als sonst das Bedürfniss empfunden, die wesentlichen Methoden und deren Tragweite und innern Zusammenhang rasch zu erkennen. Und wer bereits auf dem Gebiete heimisch war, der mochte von einem neuen Werke insbesondere Klarheit über das Wachsthum der einzelnen Theile und über die Gestaltung der Grenzen fordern, bis zu welchen die Forschung in diesen Theilen neuerdings gedrungen ist. Beiden Bedürfnissen suchte ich gerecht zu werden.

Dementsprechend fasste ich die Processe für invariante Bildungen zu einer ersten in sich abgeschlossenen Gruppe, die Untersuchungen über die Formen zweiter, dritter und vierter Ordnung zu einer zweiten, und die, insbesondere auf Grund des oben erwähnten Fundamentalsatzes sich entwickelnden Theorien, zu einer dritten Gruppe zusammen.

Ich leugne nicht, dass hiebei vielleicht der erste Theil stellenweise grössere Schwierigkeiten dem Studium bieten mag als der zweite, oder selbst der dritte, und gebe zu, dass der lebendige Vortrag des Lehrers vielleicht mit den quadratischen Formen beginnen und, in concentrischen Kreisen sich ausbreitend, an den geeigneten Stellen

allmählich die allgemeinen Theorien entwickeln wird. Allein das Lehrbuch gestattet, verwandte Theile ein und desselben Gebietes nicht bloss nach einander, sondern auch neben einander zu durchforschen, und insbesondere kann hier das Studium des zweiten Theiles Hand in Hand gehen mit dem des ersten, sobald nur für die einfacheren Fälle die Grundprocesse verstanden sind. Uebrigens habe ich in mannigfachen Beispielen und Anwendungen an jeder Stelle die Theorie vorzubereiten oder doch wenigstens nachträglich zu erläutern gesucht.

Für mich aber war die enge Verwandtschaft, welche zwischen den Processen der Invariantenbildung besteht, zu wichtig, als dass ich unter Zerstörung des Bildes von ihrem innern Zusammenhange sie räumlich trennen durfte. Denn nur dadurch wird die jeder Theorie und jeder Methode zukommende Bedeutung weder über- noch unterschätzt, dass sie den verwandten Theorien und Methoden entgegengestellt ist. So erscheint hier alsdann der Faltungsprocess als die Fundamentaloperation, aus der sowohl der Ueberschiebungs- als der Omegaprocess, den ich als Ueberschiebungsprocess für Formen mehrerer Reihen Variabler bezeichnen möchte, sich zusammensetzen; so zeigt sich der Aronhold'sche Process als ein Polarenprocess, nur dass Coefficienten und Variable ihre Bedeutung als solche im Momente der Anwendung des Processes vertauscht haben.

Indem ich aber so die Processe für invariante Bildungen im Zusammenhange darstellte, gewannen auch die andern Theile an innerer Einheit, so dass ich, um nur einige Beispiele hervorzuheben, die vollständige Theorie der quadratischen Formen, soweit sie gegenwärtig bekannt ist, in einem Zuge erledigen konnte, und der Beweis von der Endlichkeit des Formensystemes nunmehr ohne fremdartige Zwischensätze in knapper und prägnanter Weise sich darstellen liess. Bei aller Freiheit der Darstellung habe ich mich indess stets auf den von Gordan selbst gebotenen Inhalt beschränkt mit wenigen Ausnahmen, die sich auf die allerneuesten Arbeiten anderer Forscher beziehen. So möge denn diese Arbeit als ein getreues Spiegelbild seiner Vorlesungen und einschlägigen Arbeiten vor die mathematische Welt treten. Möge sie im Gegensatze zu dem Zuge nach Verallgemeinerung, der sie gegenwärtig zu durchziehen scheint, durch die hier gebotenen mannigfachen neuen Resultate auf bekanntem Gebiete auch die Lust zur Vertiefung einer Disciplin wieder stärker beleben.

Nürnberg im Juli 1887.

Georg Kerschensteiner.

Inhaltsverzeichniss.

Erster Theil.

Processe für invariante Bildungen.

§ 1. Lineare Transformation und Faltungsprocess.

§ 2. Process der Polarenbildung.

§ 3. Ueberschiebungsprocess.



§ 13. Specielle quadratische Formen.

§ 14. Die Form dritten Grades.

§ 15. Das Formensystem der Form vierten Grades.

§ 16. Anwendung des Aronhold'schen Processes auf das Formensystem der Form vierten Grades.

§ 17. Die Gleichung vierten Grades.

§ 18. Normalform von $f = a_x^4$; Transformation in die Normalform.

§ 19. Ueber die Formen, für welche $(f, f)^4 = 0$.



Dritter Theil.

Systeme einzelner und simultaner Formen höheren Grades.

§ 20. Ueberschiebung von Systemen.

§ 21. Beweis für die Endlichkeit des Formensystemes einer binären Form.

§ 22. Das Formensystem der Form fünfter Ordnung.

§ 23. Relationen zwischen den Formen des Systemes.

§ 28. Die Discriminante der Form sechsten Grades und irrationale Relationen.

§ 29. Typische Darstellung der Form sechsten Grades.

§ 30. Auflösung specieller Gleichungen sechsten Grades.

§ 31. Simultanes System einer quadratischen und cubischen Form.

§ 32. Simultanes System zweier cubischer Formen.

§ 33. Anwendungen des simultanen Systemes zweier cubischer Formen.

§ 34. Die Schwesterformen.

Erster Theil.

Processe für invariante Bildungen.

§ 1. Lineare Transformation und Faltungsprocess.

1. *Einführung der Symbolik.* Jeder homogene algebraische Ausdruck n^{ten} Grades zwischen zwei Variabeln x_1 und x_2 wird als „binäre Form“ bezeichnet. Eine solche binäre Form ist allgemein dargestellt durch:

$$f(x) = a x_1^n + b x_1^{n-1} x_2 + c x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + q x_2^n. \tag{1}$$

Viele Untersuchungen lassen es bequemer erscheinen, an Stelle der einfachen Coefficienten a, b, c ... etc. Grössen mit Binomialcoefficienten multiplicirt einzuführen, also $f(x)$ in der Form zu schreiben:

$$f(x) = \bar{a}_0 x_1^n + \binom{n}{1} \bar{a}_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} \bar{a}_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots \bar{a}_n x_2^n. \tag{2}$$

Man kann noch einen Schritt weiter gehen. Der algebraische Ausdruck rechts erinnert in mehr als einer Beziehung an die binomische Entwicklung

$$\begin{aligned}(a_1 x_1 + a_2 x_2)^n = a_1^n x_1^n &+ \binom{n}{1} a_1^{n-1} a_2 x_1^{n-1} x_2 \\ &+ \binom{n}{2} a_1^{n-2} a_2^2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots a_2^n x_2^n,\end{aligned} \tag{3}$$

welche mit der Darstellung (2) die Homogeneität in x_1 und x_2, die Zahl und Dimension der Glieder und die Binomialcoefficienten gemein hat. Fügen wir hinzu, dass die $(n+1)$ Constanten der Form $f(x)$ durch die $(n+1)$ Producte a_1^n, $a_1^{n-1} a_2$, $a_1^{n-2} a_2^2 \ldots a_2^n$ charakterisirt sein mögen, so ist die binäre Form $f(x)$ auch vollständig definirt durch den symbolischen Ausdruck:

$$f(x) = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n = a_x^n,$$

vermöge welchen

$$\begin{array}{rcccl} a_1^n & \text{als Symbol} & \text{für} & & \bar{a}_0 \\ a_1^{n-1} a_2 & „ & „ & „ & \bar{a}_1 \\ a_1^{n-2} a_2^2 & „ & „ & „ & \bar{a}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2^n & \text{als Symbol} & \text{für} & & \bar{a}_n \end{array}$$

zu gelten hat.

2. *Mehrere Symbole für ein- und dieselbe Form f.* Diese eine Symbolreihe

$$a_1^{n-k} a_2^k = \overline{a}_k$$

genügt indess nicht, um jedes beliebige Aggregat aus den Coefficienten von f in der Weise symbolisch darzustellen, dass man auch rückwärts aus dem symbolischen Ausdruck den wirklichen eindeutig zu bilden vermöchte. So wäre beispielsweise das Product $\overline{a}_2 \cdot \overline{a}_3$ durch

$$\overline{a}_2 \cdot \overline{a}_3 = a_1^{n-2} a_2^2 \cdot a_1^{n-3} a_2^3 = a_1^{2n-5} a_2^5$$

symbolisch darzustellen. Aus dem Ausdrucke $a_1^{2n-5} a_2^5$ lässt sich aber umgekehrt das Product der wirklichen Coefficienten nicht mehr eindeutig bestimmen. Derselbe kann auch noch als Symbol für $\overline{a}_0 \cdot \overline{a}_5$ und $\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_4$ gelten. Diese Undeutlichkeit lässt sich aber vermeiden, wenn man neben der einen Symbolreihe $a_1^{n-k} a_2^k$ noch so viel weitere Symbolreihen $b_1^{n-k} b_2^k$, $c_1^{n-k} c_2^k$, ... etc. einführt, als das betreffende Glied des Coefficientenaggregates unsymbolische Factoren $\overline{a}_k$ besitzt. In diesem Falle sind die symbolischen Ausdrücke

$$\overline{a}_2 \cdot \overline{a}_3 = a_1^{n-2} a_2^2 \cdot b_1^{n-3} b_2^3 = c_1^{n-2} c_2^2 \cdot d_1^{n-3} d_2^3 = \text{etc.}$$

$$\overline{a}_4^3 = a_1^{n-4} a_2^4 \cdot b_1^{n-4} b_2^4 \cdot c_1^{n-4} c_2^4 = \text{etc.},$$

hin und zurück nur auf eine Weise zu deuten, in welcher Vertauschung auch die symbolischen Factoren rechts auftreten. Die Form f selbst ist alsdann durch jedes der symbolischen Producte

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = d_x^n = \text{etc.}$$

in gleich berechtigter Weise repräsentirt.

Diese Symbolik, von der wir nunmehr in den meisten Untersuchungen Gebrauch machen werden, wurde zuerst von Aronhold (Crelle's Journ. Bd. 39 und 55) eingeführt, und von Clebsch (Crelle's Journ. Bd. 59) systematisch ausgebildet. Etwas früher als diese Beiden hatte Cayley eine andere symbolische Methode entwickelt, die im 30. Band von Crelle's Journ. 1846 niedergelegt ist. Beide Methoden erweisen sich in gleicher Weise fruchtbringend für die Untersuchungen der Invariantentheorie.

Beispiel. Die quadratische binäre Form

$$f(x) = \overline{a}_0 x_1^2 + 2\overline{a}_1 x_1 x_2 + \overline{a}_2 x_2^2$$

ist symbolisch dargestellt durch

$$f = a_1^2 x_1^2 + 2 a_1 a_2 x_1 x_2 + a_2^2 x_2^2 = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2 = \text{etc.}$$

Ihre Discriminante ist bekanntlich (vgl. auch Bd. I Nr. 182)

$$\Delta_f = \overline{a}_0 \overline{a}_2 - \overline{a}_1^2.$$

Dieses Coefficientenaggregat geht unter Einführung der symbolischen Coefficienten über in

$$\Delta_f = a_1{}^2 b_2{}^2 - a_1 a_2 b_1 b_2,$$

oder auch in

$$\Delta_f = b_1{}^2 a_2{}^2 - b_1 b_2 a_1 a_2.$$

Durch Addition dieser beiden Ausdrücke erhält man

$$2\Delta_f = (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 = (ab)^2 \text{ (vgl. auch Bd. I Nr. 18)}$$

als einfache symbolische Darstellung der Discriminante von f.

3. *Lineare Transformation.* Wir wollen nun zunächst untersuchen, in welcher Weise eine lineare Transformation den symbolischen Ausdruck einer binären Form ändert, und zu dem Zwecke uns auf ein einfaches Beispiel beschränken. Die quadratische Form

$$f(x) = a_x{}^2 = \bar{a}_0 x_1{}^2 + 2\bar{a}_1 x_1 x_2 + \bar{a}_2 x_2{}^2 \tag{1}$$

unterwerfen wir der linearen Transformation:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 y_1 + \eta_1 y_2 \\ x_2 &= \xi_2 y_1 + \eta_2 y_2. \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

Die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 \eta_1 \\ \xi_2 \eta_2 \end{vmatrix} = (\xi\eta)$$

der Substitutionscoefficienten nennen wir den „Modul" der Transformation. Das Resultat der Substitution (I) in (1) liefert:

$$\begin{aligned} \varphi(y) = {} & \bar{a}_0(\xi_1 y_1 + \eta_1 y_2)^2 + 2a_1(\xi_1 y_1 + \eta_1 y_2)(\xi_2 y_1 + \eta_2 y_2) \\ & + \bar{a}_2(\xi_2 y_1 + \eta_2 y_2)^2 \\ = {} & y_1{}^2(\bar{a}_0 \xi_1{}^2 + 2\bar{a}_1 \xi_1 \xi_2 + \bar{a}_2 \xi_2{}^2) \\ & + 2y_1 y_2(\bar{a}_0 \xi_1 \eta_1 + \bar{a}_1(\xi_2 \eta_1 + \xi_1 \eta_2) + \bar{a}_2 \xi_2 \eta_2) \\ & + y_2{}^2(\bar{a}_0 \eta_1{}^2 + 2\bar{a}_1 \eta_1 \eta_2 + \bar{a}_2 \eta_2{}^2). \end{aligned}$$

Setzt man hierin:

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_0 \xi_1{}^2 + 2\bar{a}_1 \xi_1 \xi_2 + \bar{a}_2 \xi_2{}^2 &= \bar{A}_0 \\ \bar{a}_0 \xi_1 y_1 + \bar{a}_1(\xi_2 \eta_1 + \xi_1 \eta_2) + \bar{a}_2 \xi_2 \eta_2 &= \bar{A}_1 \\ \bar{a}_0 \eta_1{}^2 + 2\bar{a}_1 \eta_1 \eta_2 + \bar{a}_2 \eta_2{}^2 &= \bar{A}_2 \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

so wird durch die Transformation (I) aus $f(x)$

$$\varphi(y) = \bar{A}_0 y_1{}^2 + 2\bar{A}_1 y_1 y_2 + \bar{A}_2 y_2{}^2. \tag{2}$$

Führt man nun einestheils in $f(x)$ für die unsymbolischen Coefficienten $\bar{a}_0$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ die Symbole $a_1{}^2$, $a_1 a_2$, $a_2{}^2$ und ebenso für die Coefficienten $\bar{A}_0$, $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ der transformirten Form $\varphi(y)$ die Symbole $A_1{}^2$, $A_1 A_2$, $A_2{}^2$ ein, so erhalten die Relationen (II) die Form:

$$(a_1\xi_1 + a_2\xi_2)^2 = a_\xi^2 \quad = A_1^2 \quad = \bar{A}_0$$
$$(a_1\xi_1 + a_2\xi_2)(a_1\eta_1 + a_2\eta_2) = a_\xi a_\eta = A_1A_2 = \bar{A}_1$$
$$(a_1\eta_1 + a_2\eta_2)^2 = a_\eta^2 \quad = A_2^2 \quad = \bar{A}_2 .$$

In derselben Weise ergeben sich für die Coefficienten $\bar{A}_k$ der transformirten $\varphi = A_y^n$ einer Form $f = a_x^n$ die Relationen:

$$\bar{A}_k = A_1^{n-k}A_2^k = (a_1\xi_1 + a_2\xi_2)^{n-k}(a_1\eta_1 + a_2\eta_2)^k = a_\xi^{n-k}a_\eta^k .$$

Man erkennt daraus folgendes Gesetz:

„Bezeichnet man die ursprüngliche Form mit $f = a_x^n$, die transformirte mit $\varphi = A_y^n$, so gehen die symbolischen Coefficienten A_1, A_2 aus den symbolischen a_1, a_2 durch die Transformation:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 = a_\xi \\ A_2 &= \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 = a_\eta \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

hervor, eine Transformation, die den gleichen Modul $\varDelta$ wie (I) besitzt, und sich von der ursprünglichen (I) nur dadurch unterscheidet, dass in den Coefficienten derselben die Horizontal- mit den Verticalreihen vertauscht sind.“

4. *Cogredienz und Contragredienz.* Die Grössen a_i einestheils und die Grössen x_i anderntheils treten durch die Transformation in eine gewisse Beziehung, die man mit Contragredienz bezeichnet hat. Während nämlich die Grössen x_i durch die Substitution (I) in die neuen Variabeln y_i übergehen, transformiren sich die Grössen a_i durch die Substitution (III) in die neuen Grössen A_i. Man nennt die Substitutionen (I) und (III) contragrediente Substitutionen, und ebendeshalb die Grössen a_i und x_i contragrediente Grössen.

Grössen, die denselben Substitutionen unterworfen sind, nennt man cogrediente Grössen. So werden wir im nächsten § Formen mit zwei Reihen Variabler x und y kennen lernen, welche wir als cogredient bezeichnen müssen.

Bei den binären Formen sind übrigens cogrediente und contragrediente Grössen nicht wesentlich verschieden. Denn lösen wir Substitutionen (III) nach a_1 und a_2 auf, so finden wir

$$(-a_2)\cdot\varDelta = \xi_1(-A_2) + \eta_1 A_1$$
$$a_1\cdot\varDelta = \xi_2(-A_2) + \eta_2 A_1 .$$

Für $-a_2$ und a_1 ist also die Transformation genau die nämliche, wie für x_1 und x_2; oder mit anderen Worten: x_1 und x_2 sind mit $-a_2$ und a_1 cogredient. — Wir werden später von dieser Eigenschaft öfter Gebrauch machen, wenn wir in symbolischen Producten gemäss dieser Cogredienz x_1 durch $-a_2$, und x_2 durch a_1 ersetzen.

5. *Definition der Invarianten.* Betrachtet man nun zwei Reihen symbolischer Coefficienten A und B, nämlich

$$A_1 = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 \qquad B_1 = b_1\xi_1 + b_2\xi_2$$
$$A_2 = a_1\eta_1 + a_2\eta_2, \qquad B_2 = b_1\eta_1 + b_2\eta_2$$

und bildet aus ihnen die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1 A_2 \\ B_1 B_2 \end{vmatrix} = (AB),$$

so ist nach dem Multiplicationsgesetze für Determinanten (Bd. I Nr. 70)

$$(AB) = \varDelta \, . \, (ab), \tag{1}$$

wobei $\varDelta$ der Modul der Transformation (I) Nr. 3 ist.

Liegt daher ein beliebiges Product solcher Determinanten (AB) vor, etwa $(AB)^\mu (AC)^\nu (BC)^\varrho$, so besteht immer die Beziehung

$$(AB)^\mu (AC)^\nu (BC)^\varrho = \varDelta^{\mu+\nu+\varrho} \cdot (ab)^\mu (ac)^\nu (bc)^\varrho . \tag{2}$$

Dieselbe lehrt:

> „Irgend ein Product von Determinanten $(ab)\ldots$ aus symbolischen Coefficienten $a, b, c \ldots$ ändert sich nicht [bis auf den Factor $\varDelta^\lambda$ des Substitutionsmoduls], sobald die Form
>
> $$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \text{etc.}$$
>
> linear transformirt wird. Denn das von den Coefficienten der transformirten Form
>
> $$\varphi = A_y^n = B_y^n = C_y^n = \text{etc.}$$
>
> gebildete gleiche Product unterscheidet sich seinem Werte nach von dem ersteren nur um eine bekannte Potenz des Moduls, wie die Beziehung (1) lehrt."

Man sieht, solche symbolische Determinantenproducte sind linearen Transformationen gegenüber unveränderliche algebraische Ausdrücke. Nun stellen dieselben aber stets Aggregate der wirklichen Coefficienten von f dar, wenn nur jedes Symbol a, b, c in einer Potenz auftritt, welche gleich ist dem Grade der Form f in x. Es existiren also für jede Form f gewisse weitere algebraische Formen ihrer Coefficienten, die bei linearer Transformation unverändert bleiben.

Wir nennen dieselben „Invarianten" von f und jedes symbolische Product

$$i = (ab)^\mu (ac)^\nu (bc)^\varrho \ldots \tag{3}$$

stellt eine solche Invariante dar, vorausgesetzt, dass die Summe aller Exponenten von a sowohl, als von b, c etc. gleich n ist, wenn n den Grad von f in x angiebt.

Die Gleichung:

$$(AB)^\mu (AC)^\nu (BC)^\varrho \ldots = \Delta^{\mu+\nu+\varrho\cdots} \cdot (ab)^\mu (ac)^\nu (bc)^\varrho \ldots \quad (4)$$

ist also Definitionsgleichung für Invarianten. Sie sagt:

„Eine Invariante ist eine solche Verbindung der Coefficienten von f, welche die Eigenschaft hat, bis auf einen bekannten Factor Δ^λ in ihrem Werthe unverändert zu bleiben, sei es, dass man sie aus den Coefficienten der ursprünglichen, sei es, dass man sie aus denen der transformirten Form bildet."

Anmerkung. Wir haben in Nr. 3 gesehen, dass durch lineare Transformation das Symbol a_1 übergeht in a_ξ und das Symbol a_2 in a_η. Ersetzen wir also in dem nichtsymbolischen Ausdruck der Invariante i den Coefficienten $\overline{a}_0 = a_1^n$ durch a_ξ^n, $\overline{a}_1 = a_1^{n-1} a_2$ durch $a_\xi^{n-1} a_\eta$ etc., so erhalten wir die entsprechende Invariante I der transformirten Form. Da nun aber nach Definitionsgleichung (4) die Beziehung

$$I = \Delta^\lambda . i$$

bestehen muss, so folgt daraus durch dieselben Schlüsse, die wir schon in Bd. I Nr. 141 bei Untersuchung der Resultante zweier Formen gezogen haben, dass jede Invariante homogen und isobar vom Gewichte λ ist.

6. *Definition der Covarianten.* Das symbolische Product i (Nr. 5, (3)) behält aber diese Invarianteneigenschaft noch bei, wenn wir es mit symbolischen Factoren a_x, b_x, c_x ... multipliciren. Denn ein solcher linearer Factor geht durch die lineare Transformation nur wieder in einen linearen Factor über. Multiplicirt man nämlich die erste der Relationen (III):

$$A_1 = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$$
$$A_2 = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2$$

mit y_1, die zweite mit y_2 und addirt, so erhält man:

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 = a_1 (\xi_1 y_1 + \eta_1 y_2) + a_2 (\xi_2 y_1 + \eta_2 y_2)$$

oder

$$A_y = a_x .$$

Wir nennen ein solches symbolisches Product, das ausser den Determinanten (ab), (bc), ... etc. ..., — die wir in Zukunft Factoren zweiter Art oder Klammerfactoren nennen wollen, — auch noch Factoren a_x, b_x, c_x, ... etc., d. i. Factoren erster Art enthält, eine Covariante.

Die Definitionsgleichung für Covarianten ist sonach:

$$\begin{aligned}(AB)^\mu (AC)^\nu (BC)^\varrho \ldots A_y^\sigma B_y^\tau C_y^\varkappa \ldots \\ = \Delta^{\mu+\nu+\varrho\cdots} \cdot (ab)^\mu (ac)^\nu (bc)^\varrho \ldots a_x^\sigma b_x^\tau c_x^\varkappa \ldots .\end{aligned} \quad (5)$$

Sie sagt: „Eine Covariante ist eine solche Verbindung der Coefficienten und Variabeln von f, welche die Eigenschaft hat, bei linearer Transformation von f sich nur um einen Factor Δ^λ zu ändern.“

Auch hier muss — soll das symbolische Product eine wirkliche Covariante der Form n^{ten} Grades $f = a_x^n$ sein — jedes Symbol in einer Potenz auftreten, die gleich n ist, d. h. es muss sein:

$$\left.\begin{aligned} \mu + \nu + \sigma \ldots &= n \\ \mu + \varrho + \tau \ldots &= n \\ \nu + \varrho + \varkappa \ldots &= n \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

7. *Beispiele von simultanen Invarianten.* Ein symbolisches Product wie (4) oder (5) kann auch eine Coefficientenverbindung verschiedener Formen

$$f = a_x^n, \quad \varphi = b_x^m, \quad \psi = c_x^r \ldots$$

darstellen, und wir nennen es alsdann „simultane Invariante, bezw. Covariante“ dieser Formen. In diesem Falle muss natürlich sein:

$$\left.\begin{aligned} \mu + \nu + \sigma \ldots &= n \\ \mu + \varrho + \tau \ldots &= m \\ \nu + \varrho + \varkappa \ldots &= r \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Eine solche simultane Invariante ist z. B. die Resultante zweier Formen. (Vgl. Bd. I Nr. 147.) So kann auch der Klammerfactor $(a\alpha)$ als simultane Invariante der beiden linearen Formen

$$f = a_1 x_1 + a_2 x_2$$
$$\varphi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

aufgefasst werden.

Ebenso ist die Determinante der Coefficienten dreier quadratischer Formen

$$f = \bar{a}_0 x_1^2 + 2\bar{a}_1 x_1 x_2 + \bar{a}_2 x_2^2$$
$$\varphi = \bar{b}_0 x_1^2 + 2\bar{b}_1 x_1 x_2 + \bar{b}_2 x_2^2$$
$$\psi = \bar{c}_0 x_1^2 + 2\bar{c}_1 x_1 x_2 + \bar{c}_2 x_2^2$$

eine simultane Invariante. Denn führt man in diese Determinante

$$R = \begin{vmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \\ \bar{b}_0 & \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \\ \bar{c}_0 & \bar{c}_1 & \bar{c}_2 \end{vmatrix}$$

die symbolischen Coefficienten ein, so wird sie

$$R = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_2^2 \\ b_1^2 & b_1 b_2 & b_2^2 \\ c_1^2 & c_1 c_2 & c_2^2 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante hat den Werth (vgl. Bd. I Nr. 40, Anmerk.)

$$R = (ab)(bc)(ac).$$

Die Function R lässt sich also durch ein symbolisches Product darstellen und ist folglich Invariante.

Beispiele von In- und Covarianten einzelner Formen. Die cubische Form

$$f(x) = a_x^3 = b_x^3 = c_x^3 = d_x^3 = \ldots = \bar{a}_0 x_1^3 + 3\bar{a}_1 x_1^2 x_2 + 3\bar{a}_2 x_1 x_2^2 + \bar{a}_3 x_2^3$$

hat eine Covariante $(ab)^2 a_x b_x$. Ihre nichtsymbolische Form erhält man, indem man die symbolischen Coefficienten in dem Producte

$$\begin{aligned} \Pi &= (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 (a_1 x_1 + a_2 x_2)(b_1 x_1 + b_2 x_2) \\ &= (a_1^2 b_2^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 a_2^2)(a_1 b_1 x_1^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) x_1 x_2 + a_2 b_2 x_2) \\ &= (a_1^3 b_1 b_2^2 - 2 a_1^2 a_2 b_1^2 b_2 + a_1 a_2^2 b_1^3)\, x_1^2 \\ &\quad + (a_1^3 b_2^3 - 2 a_1^2 a_2 b_1 b_2^2 + a_1 a_2^2 b_1^2 b_2 + \cdots)\, x_1 x_2 \\ &\quad + (a_2 a_1^2 b_2^3 - 2 a_1 a_2^2 b_1 b_2^2 + a_1^2 a_2 b_1^2 b_2)\, x_2^2 \end{aligned}$$

durch die nichtsymbolischen Coefficienten ersetzt.

Man erhält:

$$\tfrac{1}{2}\Pi = (a_0 a_2 - a_1^2)\, x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2)\, x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2.$$

Für die biquadratische Form

$$f = a_x^4 = b_x^4 = \text{etc.} = a_0 x^4 + 4 a_1 x_1^3 x_2 + 6 a_2 x_1^2 x_2^2 + 4 a_3 x_1 x_2^3 + a_4$$

existirt eine Invariante $(ab)^4$. Ihre nichtsymbolische Gestalt geht aus der binomischen Entwicklung

$$\begin{aligned} \Pi_1 = (a_1 b_2 - b_1 a_2)^4 &= a_1^4 b_2^4 - 4 a_1^3 a_2 b_1 b_2^3 \\ &+ 6 a_1^2 a_2^2 b_1^2 b_2^2 - 4 a_1 a_2^3 b_1^3 b_2 + a_2 b_1^4 \end{aligned}$$

hervor, wenn man wieder die symbolischen Coefficienten durch die wirklichen ersetzt. Man erhält:

$$\Pi = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 6 a_2^2 - 4 a_3 a_1 + a_4 a_0,$$

oder

$$\Pi = (ab)^4 = 2\,(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2).$$

8. *Eigenschaften der In- und Covarianten, die aus dem symbolischen Producte direct erkennbar sind.* Aus den bisherigen Entwicklungen ist klar, dass alle symbolischen Producte, wenn sie nur die Symbole in der geeigneten Anzahl enthalten, Invarianten oder Covarianten von binären Formen repräsentiren. Daraus geht hervor, dass diese In- und Covarianten, soweit sie sich durch solche Producte darstellen lassen, ganze und rationale Functionen der Coefficienten der ursprünglichen Formen sind. Sie sind überdies homogen in den Variabeln

wie in den Coefficienten; den Grad in den Variabeln erkennt man aus der Anzahl der Factoren erster Art, den Grad in den Coefficienten aus der Anzahl der verschiedenen Symbole, welche in dem Producte auftreten. Da die Factoren erster Art bei Transformation in sich selbst übergehen, so ist der Exponent des Moduls Δ, den die Covariante nach der Transformation als Factor erhält, gleich der Zahl der Klammerfactoren überhaupt.

Nun lehrt die Definitionsgleichung für Invarianten $I = \Delta^{\varrho} \cdot i$ auch, dass die Invariante isobar ist vom Gewichte ϱ, wie wir in Nr. 5 gesehen haben. Da aber der Modulexponent gleich der Zahl der Klammerfactoren ist, so giebt sonach diese Zahl stets auch das Gewicht der Invariante an, während das Gewicht der Covariante sich zusammensetzt aus der Zahl ϱ der Klammerfactoren plus dem Grade m der Covariante in den Variabeln x. Ist ϱ eine gerade Zahl, so nennen wir die betreffende Form auch eine Form geraden Charakters (forme droite); so die in Nr. 7 berechnete Invariante $(ab)^4$ und die Covariante $(a\,b)^2 a_x b_x$. Ist dagegen ϱ ungerade, so heissen wir die Form eine Form ungeraden Charakters (forme gauche) oder auch schiefe Invariante, resp. Covariante; so die in Nr. 7 berechnete simultane Invariante $(ab)(bc)(ac)$. Wir werden später sehen: Die Quadrate von schiefen Formen lassen sich durch Formen geraden Charakters darstellen.

Ein symbolisches Product Π kann indessen auch, wenn die symbolischen Coefficienten durch die wirklichen ersetzt werden, auf einen Ausdruck führen, der identisch verschwindet. Dies tritt unter anderm immer dann ein, sobald es bei Vertauschung zweier gleichwerthiger Symbole nur sein Zeichen ändert. Denn durch Vertauschung zweier Symbole, welche dieselbe Form darstellen, kann sich die wirkliche Covariante C nicht ändern, da es ja gleichgiltig ist, ob ich beispielsweise $\overline{a}_3 \cdot \overline{a}_5$ durch $a_1^{n-3} a_2^3 \cdot b_1^{n-5} b_2^5$ oder durch $b_1^{n-3} b_2^3 \cdot a_1^{n-5} a_2^5$ repräsentire. Nun ist also vor der Vertauschung

$$C = \Pi,$$

nach derselben $\qquad C = -\Pi,$

demnach: $\qquad 2C = 0$, also $C = 0$.

So ist z. B. für die quadratische Form $f = a_x^2 = b_x^2$ die Covariante $(ab)\,a_x b_x$ identisch Null; so verschwindet für die cubische Form $\varphi = a_x^3 = b_x^3$ die Invariante $(ab)^3$. Der Umstand, dass die Co- und Invarianten ganze rationale und homogene Functionen in den Coefficienten einer Form $f = a_x^n$ sind, lehrt uns auch, dass sie symmetrische Functionen der Wurzeln α_i von $f = 0$ sein müssen. Bezeichnen wir mit α_{ix} die



n linearen Factoren von $f=0$, so können wir auch sagen: Jede Covariante oder Invariante von f ist eine simultane Covariante*) oder Invariante der n linearen Formen α_{ix}, welche symmetrisch ist in den Symbolen α_i, und umgekehrt: Jede simultane und in α_i symmetrische Covariante der n linearen Formen α_{ix} ist eine Covariante von

$$f = \alpha_{1x} \cdot \alpha_{2x} \cdot \alpha_{3x} \ldots \alpha_{nx} = a_x^n.$$

Es tritt nun die Frage auf: Wie ist eine in symbolischen Coefficienten von $f = a_x^n = b_x^n =$ etc. gegebene Covariante darstellbar durch die Wurzeln von $f=0$, und umgekehrt: wie kann man eine simultane symmetrische Covariante der α_{ix} zurückführen auf ein symbolisches Product in den Coefficienten von f. Wenn es nun auch nicht unser Zweck ist mit Wurzeln zu rechnen, so werden wir doch an geeigneter Stelle (vergl. Nr. 39 und Nr. 94) wenigstens eine allgemeine Methode zur Beantwortung beider Fragen geben.

Den Beweis, dass jede Covariante oder Invariante sich überhaupt durch ein symbolisches Product, oder durch eine Summe solcher, darstellen lässt, werden wir später kennen lernen. (§ 9). Ich werde indess bis dahin von diesem Satze auch keinen Gebrauch machen.

9. *Definition des Faltungsprocesses.* Aus einem symbolischen Producte

$$P = (ab)^\mu (ac)^\nu (bc)^\varrho \ldots\ldots a_x^\sigma b_x^\tau c_x^\varkappa$$

lassen sich eine Reihe anderer ableiten durch eine sehr einfache Operation. Man greift zwei Factoren erster Art mit verschiedenen Symbolen heraus, etwa a_x und b_x und setzt an ihre Stelle den Klammerfactor (ab). Dieses Verfahren nennt Gordan falten, und den Process selbst „Faltungsprocess“. Man kann auch umgekehrt das Product entfalten, indem man einen Klammerfactor (ab) in P durch $a_x b_x$ ersetzt. Der Faltungsprocess ist ein rein symbolischer Process. Es kann ihm keine Bedeutung unterlegt werden, die durch eine wirklich rechnerische Operation ihren Ausdruck findet. Die Faltung kann gleichzeitig mehr als einmal vorgenommen werden, nämlich gerade so oft, als sich verschiedene Factorenpaare erster Art im Producte gleichzeitig gruppiren lassen.

Ich will hier durch Faltung einige In- und Covarianten der cubischen Form herleiten. Es sei

$$f = a_x^3 = b_x^3 = c_x^3 = d_x^3 = \text{etc.}$$

*) Vgl. auch Nr. 39 und Nr. 94.

1) Durch zweimalige Faltung des Productes

$$\Pi = a_x^3 \, . \, b_x^3$$

erhält man die Covariante

$$\Delta = (ab)^2 a_x b_x \, .$$

Die Formen $(ab) a_x^2 b_x^2$, $(ab)^3$, welche durch einmalige bezw. dreimalige Faltung daraus erhalten werden, sind identisch null nach den Bemerkungen am Schlusse von Nr. 8.

2) Aus dem Producte

$$\Delta^2 = (ab)^2 \, a_x b_x \, . \, (cd)^2 c_x d_x$$

erhält man durch zweimalige Faltung entweder:

$$R = (ab)^2 \, (cd)^2 \, (ac) \, (bd)$$

oder:

$$R_1 = (ab)^2 \, (cd)^2 \, (bc) \, (ad).$$

Beide Producte stellen offenbar dieselbe Invariante dar; denn das zweite geht aus dem ersten durch die berechtigte Vertauschung von b mit a hervor.

3) Aus dem Producte

$$\Delta \, . \, f = (ab)^2 \, a_x b_x \, . \, c_x^3$$

erhält man durch einmalige Faltung entweder

$$Q = (ab)^2 \, (ac) b_x c_x^2$$

oder:

$$Q_1 = (ab)^2 \, (bc) a_x c_x^2,$$

und auch hier ist wieder $Q_1 = Q$, wie man erkennt, wenn a mit b vertauscht wird.

10. *Zusammenhang der durch Faltung entstehenden Producte.* Für alle späteren Untersuchungen, insbesondere für die Systembildung, ist der Faltungsprocess von einschneidender Bedeutung geworden. (Vergl. auch Camille Jordan, Liouville Journ. sér. 3, Bd. 2 und 5.) Alle durch ihn aus einem Producte A — wir wollen es Stammproduct nennen — hervorgehenden neuen Producte haben symbolisch wenigstens einen engen Zusammenhang. Sie haben von vornherein einen gemeinsamen symbolischen Factor, nämlich die Klammerfactoren, welche bereits das Stammproduct besass und auf welche ja der Faltungsprocess keinen Einfluss hat. Diese Klammerfactoren werden unter Umständen von Wichtigkeit, insofern sie eine ganze Gruppe von symbolischen Producten charakterisiren können, die aus gewissen Betrachtungen ausgeschlossen werden dürfen. (Vergl. auch „Reducenten" Nr. 123.)

Eine bestimmte Zahl von Faltungen kann natürlich, wie schon an den letzten Beispielen Nr. 9 ersichtlich war, an einem Producte auf verschiedene Arten vorgenommen werden. Sind insbesondere A_1 und A_2 zwei solche durch μ Faltungen aus A entstandene Producte, dass A_1 durch einmalige in zwei Symbolfactoren vorgenommene Vertauschung gleichberechtigter Symbole a und b, oder a und c, b und c etc. in A_2 übergeht, so heissen A_1 und A_2 benachbarte symbolische Producte. So sind:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = (ac)\, b_x \,.\, Q \\ A_2 = (ab)\, c_x \,.\, Q \end{array}\right\}$$

einestheils, und

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = (ad)\,(bc)\,.\, Q \\ A_2 = (cd)\,(ba)\,.\, Q \end{array}\right\}$$

anderntheils Nachbarproducte, wobei mit Q die den Producten A_1 und A_2 gemeinschaftlichen Factoren bezeichnet sein mögen. Es ist klar, dass alle durch μ-malige Faltung aus A entstehenden symbolischen Producte sich stets so ordnen lassen, dass immer das vorausgehende mit dem nachfolgenden benachbart ist. Hat man eine Reihe symbolischer Producte

$$A_1,\ A_2,\ A_3 \ldots A_m,$$

welche alle homogen in den Coefficienten der nämlichen Formen $f, \varphi, \psi \ldots$, also auch deren Symbolen $a, b, c \ldots, \alpha, \beta, \gamma \ldots$ und homogen in den Variabeln x_1, x_2 sind, so kann man sie stets aus ein und demselben Stammproduct durch μ-malige Faltung entstanden denken, und demnach ist es immer möglich, wenn sie nicht benachbart sein sollten, zwischen je zwei A_i und A_k eine Reihe von Producten

$$M_1 M_2 \ldots M_r;\ N_1,\ N_2 \ldots N_s;\ \ldots.$$

einzuschalten, so dass A_1 mit A_m durch eine Kette von Nachbargliedern zusammenhängt. Dies wird bei manchen grundlegenden Untersuchungen von Wichtigkeit und ich werde daher die ebengemachten Bemerkungen am Schlusse dieses § durch ein Beispiel erläutern.

11. *Der Identitäts- und Productsatz.* Sehr häufig erwächst die Aufgabe, symbolische Producte, die durch Faltung aus einem Stammproduct entstehen, in andere umzuformen. Hierzu wird unter andern Hilfsmitteln in sehr fruchtbringender Weise die Identität

$$a_x(bc) + b_x(ca) + c_x(ab) = 0^*) \qquad \text{(I)}$$

*) Die Richtigkeit dieser Identität haben wir in Bd. I Nr. 34 gezeigt; man kann sie übrigens leicht verificiren, wenn man in der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_x & b & \end{vmatrix},$$

verwendet, welche wir auch, indem wir x_1 durch d_2 und x_2 durch $-d_1$ ersetzen, in der Form schreiben können

$$(ad)(bc) + (bd)(ca) + (cd)(ab) = 0, \qquad \text{(II)}$$

oder auch, wenn wir in (I) für c_1 schreiben y_2, für c_2 dagegen $-y_1$, in der Form

$$a_x b_y - b_x a_y = (ab)(xy). \qquad \text{(III)}$$

Mit Hilfe dieser dritten Form des Identitätssatzes können wir z. B. direct zeigen, dass sich ein symbolisches Product, welches nicht identisch verschwindet, und dessen zumeist auftretender Klammerfactor mit gleichberechtigten Symbolen in ungerader Potenz vorhanden ist, immer in andere verwandeln lässt, die diesen Klammerfactor in gerader Potenz besitzen. Denn nehmen wir an, die im Producte P zu höchst vorkommende Potenz eines Klammerfactors sei $(ab)^{2\mu+1}$, dann hat P die Form

$$P = (ab)^{2\mu+1} . Q$$

und Q enthält im Allgemeinen die Symbole a und b — mindestens einmal, wenn $P \gtrless 0$ — noch in beliebigen andern Verbindungen, die wir, wenn $\xi, \eta, \zeta, \tau \ldots$ beliebige Grössen, mit $a_\xi, b_\eta, a_\zeta, b_\tau \ldots$ etc. bezeichnen können. Es ist dann

$$P = (ab)^{2\mu+1} a_\xi b_\eta a_\zeta b_\tau \ldots \times \bar{Q},$$

wo nun $\bar{Q}$ weder ein Symbol a noch ein Symbol b enthält. Für jedes Factorenpaar $a_\xi b_\eta, a_\zeta b_\tau \ldots$ können wir schreiben:

$$\tfrac{1}{2}\{(a_\xi b_\eta + b_\xi a_\eta) + (a_\xi b_\eta - b_\xi a_\eta)\}, \ldots$$

oder nach (III):

$$\tfrac{1}{2}(a_\xi b_\eta + b_\xi a_\eta) + \tfrac{1}{2}(ab)(\xi\eta), \text{ etc.},$$

so dass, wenn ϱ solche Factorenpaare vorhanden sind, P übergeht in

$$P = \frac{(ab)^{2\mu+1}}{2^\varrho}\{a_\xi b_\eta + b_\xi a_\eta\} . \{a_\zeta b_\tau + b_\zeta a_\tau\} \ldots \times \bar{Q}$$
$$+ \frac{(ab)^{2\mu+1}}{2^\varrho} \sum \bar{Q}_i .$$

Der erste Term rechts ist Null, da er durch Vertauschung von a mit b nur sein Zeichen ändert. Jedes Glied $\bar{Q}_i$ in der Summe des zweiten

---

die mit x_1 multiplicirt gedachte erste und die mit x_2 multiplicirt gedachte zweite Zeile von der dritten subtrahirt.

Termes enthält aber mindestens Einen Factor (ab), und es wird sonach in der That:

$$P = \frac{1}{2^\varrho} \cdot (ab)^{2\mu+2} \sum \bar{\bar{Q}}_i.$$

Wir werden jede der drei obigen Relationen (I), (II), (III) stets kurz als „Identitätssatz“ bezeichnen. Aus der ersten von ihnen leiten wir eine weitere ebenfalls häufig zu benutzende Identität ab, indem wir $c_x(ab)$ auf die rechte Seite schaffen und dann quadriren. Es kommt nach einer einfachen Umstellung:

$$a_x b_x (ac)(bc) = \tfrac{1}{2}\{(bc)^2 a_x^2 + (ac)^2 b_x^2 - (ab)^2 c_x^2\} \qquad \text{(IV)}$$

oder für $x_1 = -d_2$, $x_2 = d_1$

$$(ad)(bd)(ac)(bc) = \tfrac{1}{2}\{(bc)^2(ad)^2 + (ac)^2(bd)^2 - (ab)^2(cd)^2\}. \qquad \text{(V)}$$

Diese beiden Identitäten belegen wir mit dem Namen „Productsatz“.

12. *Ein Beispiel symbolischer Rechnung.* Ich will die allgemeinen Betrachtungen dieses § über Symbolik schliessen, indem ich an einem Beispiel einen Theil der bisher entwickelten Begriffe zusammenfassend erläutere. Wir stellen uns nämlich die Aufgabe, irgend eine Relation zwischen symbolischen Producten A_i, also eine ganze rationale Function

$$F(A_i) = 0,$$

welche homogen in den Coefficienten und Variabeln ist, und deren einzelne Glieder G_i weder identisch verschwinden noch sich gegenseitig aufheben, so umzuformen, dass sie die Gestalt

$$F(A_i) = \sum_1^\lambda \{(bc)\, a_x + (ca)\, b_x + (ab)\, c_x\} \varphi_\lambda = 0 \qquad \text{(VI)}$$

annimmt, aus welcher das identische Verschwinden der Function $F(A_i)$ direct ersichtlich ist. Die Möglichkeit dieser Umformung liegt in der Beziehung, welche vermöge des Identitätssatzes zwischen zwei Nachbargliedern der Function $F(A_i)$ besteht*). Sind nämlich G_λ und G_μ zwei Nachbarglieder

$$G_\lambda = (ac)\, b_x \,.\, Q \quad \text{oder} \quad = (ad)(bc)\, Q$$
$$G_\mu = (ab)\, c_x \,.\, Q \quad \text{oder} \quad = (cd)(ba)\, Q,$$

so ist ihre Differenz unter Anwendung des Identitätssatzes durch

$$\left.\begin{aligned} G_\mu - G_\lambda &= \{(ab)\, c_x + (bc)\, a_x + (ca)\, b_x\}\, Q - a_x (bc) \,.\, Q \\ \text{resp. } G_\mu - G_\lambda &= \{(ad)(bc) + (bd)(ca) + (cd)(ab)\}\, Q - (ca)(bd)\, Q \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

*) Einen strengen Beweis der Relation (VI) wollen wir später bringen. (§ 10.)

darstellbar, wobei Q immer die gemeinschaftlichen Symbolfactoren von G_μ und G_λ bedeutet.

Sind aber $G_\varkappa$ und G_ϱ keine benachbarten Glieder, so können wir gleichwohl noch ihre Differenz in der Form darstellen

$$\left.\begin{aligned} G_\varkappa - G_\varrho = &\sum_1^\lambda \{(bc)\,a_x + b_x(ca) + (ab)\,c_x\}\,Q_\lambda + \sum_1^\lambda r_x(pq)\,.\,Q_\lambda \\ &+ \sum_1^\lambda \{(ad)(bc) + (bd)(ca) + (cd)(ab)\}\,Q'_\lambda + \sum_1^\lambda (rs)(pq)\,.\,Q'_\lambda \end{aligned}\right\}(2)$$

wobei p, q, r, s für irgend welche Combination der Symbole a, b, c, d stehen. Denn wegen der vorausgesetzten Homogeneität in Coefficienten und Variabeln, können wir zwischen $G_\varkappa$ und G_ϱ eine Reihe von Gliedern

$$M_1,\; M_2,\; M_3 \ldots M_s$$

einschalten, so dass in der Reihe

$$G_\varkappa\; M_1\; M_2\; M_3 \ldots G_\varrho$$

jedes vorausgehende mit dem nachfolgenden Gliede benachbart ist. Dann ist aber

$$G_\varkappa - G_\varrho = (G_\varkappa - M_1) + (M_1 - M_2) + (M_2 - M_3) + \ldots (M_s - G_\varrho)$$

und für jede Differenz rechts lässt sich nun aus Formel (1) ein Werth einführen, wodurch wir zu Formel (2) gelangen.

In welcher Weise nun diese beiden Identitäten (1) und (2) verwendet werden, um irgend eine Relation $F(A_i) = 0$ in die Form

$$\sum \{(bc)\,a_x + (ca)\,b_x + (ab)\,c_x\}\,\varphi_\lambda = 0$$

zu bringen, will ich an folgendem Beispiel zeigen. In der allgemeinen Darstellung § 10 werde ich darauf zurückkommen.

Es seien $f = a_x^3 = b_x^3$ und $\varphi = \alpha_x^3 = \beta_x^3$ zwei cubische Formen, dann besteht zwischen den beiden simultanen Covarianten

$$G_1 = (\alpha\beta)^2\,(ab)\,(a\alpha)\,(a\beta)\,b_x^2$$
$$G_2 = (ab)^2\,(\alpha\beta)\,(\alpha a)\,(\alpha b)\,\beta_x^2$$

die Relation

$$F(G_i) = G_1 + G_2 = 0.\quad \text{(Vergl. auch Nr. 312, 5.)}$$

Es handelt sich nun darum, $F(G_i)$ durch eine Summe darzustellen, deren einzelne Summanden Differenzen von Nachbargliedern sind. Zu dem Zwecke genügt ist hier in G_1: a mit b, in G_2: α mit β zu vertauschen. Die Summe der so entstehenden zwei Glieder, die wir mit

$$-G_1' = (\alpha\beta)^2 (ba) (b\alpha) (b\beta) a_x^2$$
$$-G_2' = (ab)^2 (\beta\alpha) (\beta a) (\beta b) \alpha_x^2$$

bezeichnen wollen, ist dann wiederum gleich $F(G_i)$ und demnach:

$$2F(G_i) = G_1 - G_1' + G_2 - G_2'. \tag{3}$$

Nun sind aber andterntheils die symbolischen Producte

$$M_1 = (\alpha\beta)^2 (ab) (a\alpha) (b\beta) a_x b_x$$
$$M_2 = (ab)^2 (\alpha\beta) (\alpha a) (\beta b) \alpha_x \beta_x$$

zu G_1 und $+G_1'$, resp. G_2 und $+G_2'$ benachbart; wenn wir daher Gleichung (3) in die Form

$$2F(G_i) = (G_1 - M_1) + (M_1 - G_1') + (G_2 - M_2) + (M_2 - G_2') \tag{4}$$

bringen, so sind die einzelnen Differenzen rechts Differenzen von Nachbargliedern.

Unter Benutzung der Gleichung (1) geht demnach die Relation (4) über in:

$$\begin{aligned} 2F(G_i) = \{(b\beta)\, a_x + (\beta a)\, b_x + (ab)\, \beta_x\} (\alpha\beta)^2 (ab) (a\alpha)\, b_x & \\ - (\alpha\beta)^2 (ab)^2 (a\alpha)\, b_x \beta_x & \\ + \{(b\alpha)\, a_x + (\alpha a)\, b_x + (ab)\, \alpha_x\} (\alpha\beta)^2 (ab) (b\beta)\, a_x & \\ - (\alpha\beta)^2 (ab)^2 (b\beta)\, a_x \alpha_x & \\ - \{(b\beta)\, \alpha_x + (\beta\alpha)\, b_x + (\alpha b)\, \beta_x\} (ab)^2 (\alpha\beta) (\alpha a)\, \beta_x & \\ + (\alpha\beta)^2 (ab)^2 (a\alpha)\, b_x \beta_x & \\ - \{(a\beta)\, \alpha_x + (\beta\alpha)\, a_x + (\alpha a)\, \beta_x\} (ab)^2 (\alpha\beta) (\beta b)\, \alpha_x & \\ + (\alpha\beta)^2 (ab)^2 (b\beta)\, a_x \alpha_x . & \end{aligned}$$

Die letzten Terme der vier Zeilen heben sich gegenseitig auf; die ersten Terme aber sind paarweise gleich, indem der erste Term der zweiten Zeile durch Vertauschung der gleichberechtigten Symbole α und β und der erste Term der dritten aus dem ersten der vierten Zeile durch Vertauschung von a mit b hervorgeht. Also ist in der That

$$\begin{aligned} F(G_i) = & \{(b\beta)\, a_x + (\beta a)\, b_x + (ab)\, \beta_x\} (\alpha\beta)^2 (ab) (a\alpha)\, b_x \\ & - \{(b\beta)\, \alpha_x + (\beta\alpha)\, b_x + (\alpha b)\, \beta_x\} (ab)^2 (\alpha\beta) (\alpha a)\, \beta_x = 0 \end{aligned}$$

oder

$$F(G_i) = \sum \{(rs)\, p_x + (sp)\, r_x + (pr)\, s_x\} \varphi_\lambda = 0. \tag{I}$$

In ähnlicher Weise kann man jede Relation in die Form (I) bringen. (Siehe Evectantenprocess).

§ 2. Process der Polarenbildung.

13. *Definition der Polare einfacher Formen.* An der binären Form $f = a_x^n$ können wir folgende symbolische Operation vornehmen. Wir sondern μ Factoren a_x von a_x^n ab und ersetzen sie durch gleich viel Factoren a_y. Die so entstehende Form

$$f_{y^\mu} = a_x^{n-\mu} a_y^n \tag{1}$$

nennen wir μ^{te} Polare der Form a_x^n, und den eben geschilderten einfachen Process: Polarenprocess. Man erkennt, dass jede Form n^{ten} Grades $n+1$ Polaren besitzt, indem wir der Zahl μ alle Werthe von 0 bis n beilegen. Eine höhere Polare von f als die n^{te} ist stets identisch null. Die $(n-\mu)^{te}$ Polare ist:

$$f_{y^{n-\mu}} = a_x^\mu a_y^{n-\mu}. \tag{2}$$

Man sieht, dass beide Polaren (1) und (2) durch Vertauschung von x mit y aus einander hervorgehen. Diese Thatsache, dass alle Polaren, deren Grad $> \frac{n}{2}$ ist, aus den vorhergehenden durch Vertauschung von x mit y erhalten werden, wird später bei Berechnung von Polaren complicirter Formen von Wichtigkeit.

Ich will diesen sehr einfachen Process im Interesse späterer Betrachtungen etwas umständlicher formuliren. Um f_{y^μ} zu bilden, kann man sich nämlich die n Factoren a_x von f momentan durch n lineare Factoren

$$r_{1x},\ r_{2x},\ r_{3x} \ldots r_{nx}$$

ersetzt denken. Das entstehende Product wird nun μ mal polarisirt, indem man in allen Combinationen je μ Factoren r_{kx} durch die $\mu!$ Permutationen gleichviel entsprechender Factoren r_{ky} ersetzt. Dadurch entstehen $\binom{n}{\mu}\mu! = n(n-1)(n-2)\ldots(n-\mu+1)$ Glieder, nämlich gerade so viel, als die Anzahl aller Variationen von n Elementen zur k^{ten} Klasse beträgt. Bildet man deren Summe, dividirt dieselbe durch diese Anzahl, und ersetzt hierauf wieder alle Symbole r_k durch a, so entsteht gerade wieder das Product $a_x^{n-\mu} a_\mu^y$. Es ist also:

$$\begin{aligned} f_{y^{n-\mu}} &= a_x^{n-\mu} a_y^\mu \\ &= \binom{n}{\mu}\mu! \cdot \sum r_{i_1 y} r_{i_2 y} \ldots r_{i_\mu y} \cdot \frac{f}{r_{i_1 x} r_{i_2 x} \ldots r_{i_\mu x}}. \end{aligned}$$

Der Polarenprocess ist nun aber nicht, wie der Faltungsprocess rein symbolischer Natur, vielmehr lässt er sich in mehrfacher Weise

durch rechnerische Operationen ersetzen, die wir im Folgenden kennen lernen wollen.

14. *Differentiationsmethode.* Bilden wir von $f = a_x^n$ die beiden ersten Differentialquotienten nach x_1 und x_2, so erhalten wir:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = n a_1 a_x^{n-1} = n f_1 \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = n a_2 a_x^{n-2} = n f_2 \,. \tag{2}$$

Multiplicirt man die erste der beiden Gleichungen mit y_1, die zweite mit y_2 und addirt die entstehenden Producte, so kommt:

$$y_1 f_1 + y_2 f_2 = (a_1 y_1 + a_2 y_2)\, a_x^{n-1} = a_y a_x^{n-1} = f_y \,.$$

Die erste Polare von $f = a_x^n$ ist also auch durch die Gleichung definirt:

$$f_y = y_1 f_1 + y_2 f_2 = \frac{1}{n}\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right). \tag{3}$$

Bilden wir ebenso die zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = n(n-1)\, a_1^2 a_x^{n-2} = n(n-1) f_{11} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = n(n-1)\, a_1 a_2 a_x^{n-2} = n(n-1) f_{12} \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = n(n-1)\, a_2^2 a_x^{n-2} = n(n-1) f_{22} \,, \tag{6}$$

multipliciren sodann die erste Gleichung mit y_1^2, die zweite mit $2y_1 y_2$, die dritte mit y_2^2 und addiren, so kommt:

$$y_1^2 f_{11} + 2 y_1 y_2 f_{12} + y_2^2 f_{22} = (a_1^2 y_1^2 + 2 a_1 a_2 y_1 y_2 + a_2^2 y_2^2)\, a_x^{n-2}$$
$$= a_y^2 a_x^{n-2} = f_{y^2} \,.$$

Die zweite Polare ist also durch die Gleichung definirt:

$$f_{y^2} = y_1^2 f_{11} + 2 y_1 y_2 f_{12} + y_2^2 f_{22}$$

oder

$$f_{y^2} = \frac{1}{n(n-1)}\left\{y_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2 y_1 y_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + y_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right\}. \tag{7}$$

Fährt man auf diese Weise fort, so kommt man der Reihe nach zu allen Polaren. Die rechten Seiten dieser Gleichungen (3) und (7) sind aber nichts anderes als die totalen Differentiale von $f = a_x^n$, wobei nur die Incremente dx_1, dx_2 und durch y_1 resp. y_2 ersetzt sind. Daher der Satz:

„Die μ^{te} Polare $a_x^{n-\mu} a_y^{\mu}$ wird erhalten, indem man a_x^n μ mal total differentiirt, die Incremente durch y_1 bezw. y_2 ersetzt und endlich mit

$\frac{1}{n(n-1)\dots(n-\mu+1)}$ multiplicirt"; also in leicht verständlicher Form:

$$f_{y^k} = \frac{(m-k)!}{k!} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 \right\}^k. \tag{8}$$

Durch diese Methode bestätigt man leicht folgende Sätze:

1) Die Polare einer Summe von Formen ist gleich der Summe der Polaren dieser Formen, also

$$\left\{ \sum f^{(i)} \right\}_{y^k} = \sum f^{(i)}{}_{y^k}.$$

2) Die Polare eines Productes von zwei Factoren, deren einer eine Constante c ist, ist gleich dem Producte dieser Constanten in die Polare des andern Factors, also

$$\{c \,.\, f\}_{y^k} = c \,.\, f_{y^k}.$$

3) Die ν^{te} Polare einer Form n^{ten} Grades ist identisch Null, wenn $\nu > n$.

Es ist gleichgiltig, ob man das ν^{te} totale Differential nach x von der μ^{ten} Polare, oder das $\mu + \nu^{\text{te}}$ totale Differential der nullten Polare, also der Form f selbst bildet, ferner ob man die Originalform k mal total nach x differentiirt und die Incremente durch y ersetzt oder die $(\varrho + k)^{\text{te}}$ Polare von f ϱ mal nach y differentiirt und an Stelle der Incremente wieder die Variable x einführt. Man bestätigt dies leicht durch Rechnung und überzeugt sich so von der Richtigkeit des Satzes:

4) Polaren von Polaren sind selbst wieder Polaren der Originalform.

15. *Beispiel.* Wir bilden die erste Polare der quadratischen Form

$$f = a_x^2 = \bar{a}_0 x_1^2 + 2\bar{a}_1 x_1 x_2 + \bar{a}_2 x_2^2$$

zuerst nach der ursprünglichen symbolischen Methode, sodann nach der Differentiationsmethode und erhalten:

$$\begin{aligned} f_y = a_x a_y &= (a_1 x_1 + a_2 x_2)(a_1 y_1 + a_2 y_2) \\ &= (a_1^2 x_1 + a_1 a_2 x_2) y_1 + (a_1 a_2 x_1 + a_2^2 x_2) y_2 \\ &= (\bar{a}_0 x_1 + \bar{a}_1 x_2) y_1 + (\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2) y_2. \end{aligned}$$

Ebenso findet man

$$f_y = \tfrac{1}{2}\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \tfrac{1}{2}\{y_1(2\bar{a}_0 x_1 + 2\bar{a}_1 x_2) + y_2(2\bar{a}_1 x_1 + 2\bar{a}_2 x_2)\}$$
$$= (\bar{a}_0 x_1 + \bar{a}_1 x_2) y_1 + (\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2) y_2.$$

16. *Methode der binomischen Entwicklung.* Die zweite rechnerische Operation, welche auf Polaren führt, stützt sich auf den binomischen Lehrsatz. Ersetzt man nämlich in dem Symbol a_x die Variable

$$\begin{aligned} x_1 &\quad \text{durch} \quad x_1 + \lambda y_1 \\ x_2 &\quad \text{durch} \quad x_2 + \lambda y_2, \end{aligned}$$

so geht dieser lineare Factor über in: $a_x + \lambda a_y$ und sonach a_x^n in:

$$(a_x + \lambda a_y)^n = a_x^n + \binom{n}{1}\lambda a_x^{n-1} a_y + \binom{n}{2}\lambda^2 a_x^{n-2} a_y^2 + \cdots + a_y^n = f(x+\lambda y).$$

Hieraus erkennt man:

„Die μ^{te} Polare von a_x^n wird erhalten, wenn man in der binomischen Entwicklung von $(a_x + \lambda a_y)^n$ den Coefficienten von λ^μ nimmt, und denselben durch $\binom{n}{\mu}$ dividirt.

Beispiel. Um die zweite Polare der Form $f = a_x^3$ zu erhalten, berechnen wir demnach in:

$$f(x + \lambda y) = \bar{a}_0(x_1 + \lambda y_1)^3 + 3\bar{a}_1(x_1 + \lambda y_1)^2(x_2 + \lambda y_2)$$
$$+ 3\bar{a}_2(x_1 + \lambda y_1)(x_2 + \lambda y_2)^2 + \bar{a}_3(x_2 + \lambda y_2)^3$$

das in λ^2 multiplicirte Glied. Wir erhalten

$$\binom{3}{2}\lambda^2 f_{y^2} = 3\lambda^2\bar{a}_0 x_1 y_1^2 + 3\bar{a}_1\lambda^2 y_1^2 x_2 + 6\bar{a}_1\lambda^2 x_1 y_1 y_2 + 6\bar{a}_2\lambda^2 x_2 y_2 y_1$$
$$+ 3\bar{a}_2\lambda^2 x_1 y_2^2 + 3\bar{a}_3 x_2 y_2^2\lambda^2$$
$$= 3\lambda^2\{(\bar{a}_0 x_1 + \bar{a}_1 x_2)y_1^2 + 2y_1 y_2(\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2) + y_2^2(\bar{a}_2 x_1 + \bar{a}_3 x_2)\}.$$

Dividiren wir diese Gleichung mit $\binom{3}{2}\lambda^2$, so folgt:

$$f_{y^2} = (\bar{a}_0 x_1 + \bar{a}_1 x_2)y_1^2 + 2y_1 y_2(\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2) + y_2^2(\bar{a}_2 x_1 + \bar{a}_3 x_2).$$

17. *Methode der Transformation.* Wir sahen bereits in Nr. 3, dass durch die Transformation

$$x_1 = \xi_1 y_1 + \eta_1 y_2, \quad x_2 = \xi_2 y_1 + \eta_2 y_2 \tag{I}$$

mit dem Modul $\Delta = (\xi\eta)$

die Form $f = a_x^n$ übergeht in die Form

$$F = A_y^n = (a_\xi y_1 + a_\eta y_2)^n,$$

dass also die Beziehungen bestehen:

$$\bar{A}_k = A_1^{n-k} A_2^k = a_\xi^{n-k} a_\eta^k.$$

Die $\bar{A}_k$ sind die wirklichen Coefficienten der transformirten Form; $a_\xi^{n-k} a_\eta^k$ ist aber eine Polare von f, nur geschrieben in den Transformationscoefficienten. Daher der Satz:

„Die Coefficienten von y der transformirten Form sind die Polaren der ursprünglichen Form, nur geschrieben in den Substitutionscoefficienten ξ und η.“

Wir können diesen Satz auch noch in anderer Weise formuliren. Multipliciren wir nämlich die Transformationsgleichungen (I) mit a_1 resp. a_2 und addiren die Resultate, so kommt:

$$a_x = a_\xi y_1 + a_\eta y_2. \tag{1}$$

Anderntheils ist nach dem Identitätssatze:

$$a_x = a_\xi \frac{(x\eta)}{(\xi\eta)} + a_\eta \frac{(\xi x)}{(\xi\eta)}. \tag{2}$$

Durch Comparation dieser beiden Gleichungen erhält man

$$y_1 = \frac{(x\eta)}{(\xi\eta)}, \quad y_2 = \frac{(\xi x)}{(\xi\eta)}. \tag{3}$$

Erhebt man aber die Identität (2) auf die n^{te} Potenz, so kommt:

$$a_x^n \cdot (\xi\eta)^n = \{a_\xi(x\eta) + a_\eta(\xi x)\}^n$$

und diese Gleichung lehrt in Verbindung mit (3):

„Multiplicirt man die Form $f = a_x^n$ mit der n^{ten} Potenz des Transformationsmoduls, so sind die Coefficienten von $(x\eta)^{n-k}(\xi x)^k = (\xi\eta)^n y_1^{n-k} y_2^k$, dividirt durch den betreffenden Binomialcoefficienten, die k^{ten} Polaren der Originalform."

18. *Erweiterung des Polarenbegriffes.* Im weiteren Sinne nennt man auch Formen, die mehr als zwei Reihen Veränderlicher enthalten, also Formen wie

$$a_x^{n-k-\lambda} a_y^k a_z^\lambda, \; a_x^{n-k-\lambda-\mu} a_y^k a_z^\lambda a_u^\mu, \text{ etc.},$$

Polaren der Form f. Ihr Bildungsprocess ist folgendermassen definirt. Man sondere vom Producte a_x^n zunächst $\varkappa + \lambda + \mu$ Factoren ab, ersetze $\varkappa$ derselben durch a_y, λ Factoren durch a_z, μ Factoren durch a_u; oder: Man nehme zuerst $\varkappa + \lambda + \mu$ Factoren a_x hinweg und ersetze sie durch Factoren a_y; von diesen trenne man wieder $\lambda + \mu$ Factoren ab und ersetze sie durch Grössen a_z, hierauf bringe man an Stelle von μ Factoren a_z wiederum μ Factoren a_u.

Man kann auch die so definirten Polaren durch rechnerische Processe erhalten. So würde die Differentiationsmethode folgende Operationen verlangen: Die Form f differentiire man $k + \lambda + \mu$ mal total nach x, ersetze die Incremente durch y. Hierauf differentiire man $\lambda + \mu$ mal nach y, ersetze die neuen Incremente durch z, endlich differentiire man μ mal total nach z, und ersetze die Incremente durch u.

19. *Differentialgleichung der Polaren.* Die Polaren sind also Formen mit mehreren Reihen cogredienter Variabler. Doch lässt sich aus ihrer Bildung erkennen, dass sie sehr specielle Formen dieser Art sind. In der That genügen sie auch einer bestimmten Differentialgleichung, die sich leicht aufstellen lässt. Bezeichnet man die Polare mit U, so dass also

$$U = a_x^{n-\lambda} a_y^\lambda,$$

dann ist:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = (n-\lambda)\, a_x^{n-\lambda-1} a_y^\lambda a_1$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = (n-\lambda)\, a_x^{n-\lambda-1} a_y a_2,$$

und daher:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\,\partial y_2} &= (n-\lambda)\, a_x^{n-\lambda-1} a_y^{\lambda-1} a_1 a_2\\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_2\,\partial y_1} &= (n-\lambda)\, a_x^{n-\lambda-1} a_y^{\lambda-1} a_2 a_1\end{aligned}\right\}$$

also:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\,\partial y_2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_2\,\partial y_1} = 0. \tag{I}$$

Das ist die partielle Differentialgleichung, welcher jede Polare genügt; wir werden später umgekehrt sehen, dass jede rationale ganze Function von x und y, welche diese Gleichung befriedigt, in der That eine Polare ist.

Besitzt die Polare mehr als zwei Reihen Veränderlicher, dann treten zu dieser Gleichung (I) noch weitere analog gebildete, so dass bei n Reihen von Variabeln die Anzahl derselben auf N anwächst, wo N die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung von n Elementen zu je zweien bedeutet. Dieselben sind natürlich nicht durchwegs selbstständige Gleichungen.

20. *Der Omegaprocess.* Durch die Differentialgleichung (I) ist gleichzeitig ein Process definirt, der wie jener der Faltung und Polarenbildung ein Invariantenprocess ist. Wir schreiben denselben, wenn wir ihn auf eine Form f, die in x vom Grade m, in y vom Grade n ist, angewendet wissen wollen, gewöhnlich in der Gestalt:

$$\Omega(f) = \frac{1}{m\cdot n}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial y_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial y_1}\right\}$$

und nennen ihn demgemäss Omegaprocess. Man kann ihn durch

$$\Omega(f) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}$$

repräsentiren.

Dass durch ihn die Invarianteneigenschaft eines symbolischen Productes nicht aufgehoben wird, erkennt man daraus, weil durch diese Operation aus demselben wieder nur symbolische Producte entstehen.

Wenden wir nämlich den Omegaprocess zunächst auf das symbolische Product

$$P = a_x^m b_y^n$$

an; wir erhalten:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1\,\partial y_2} = n\cdot m\cdot a_1\, a_x^{m-1} b_2 b_y^{n-1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2\,\partial y_1} = n\cdot m\cdot a_2\, a_x^{m-1} b_1 b_y^{n-1}.$$

Durch Subtraction folgt aus beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1\,\partial y_2} - \frac{\partial P}{\partial x_2\,\partial y_1} = n\,.\,m\,.\,a_x^{m-1} b_y^{n-1}\{a_1 b_2 - b_1 a_2\} = n.m.(ab)a_x^{m-1} b_y^{n-1},$$

also:

$$\Omega(P) = (ab)a_x^{m-1} b_y^{n-1}\,. \tag{I}$$

Unterwerfen wir diese Relation abermals demselben Process

$$\Omega^2(P) = \Omega(\Omega(P)) = \frac{1}{m-1\cdot n-1}\left\{\frac{\partial\Omega(P)}{\partial x_1\,\partial y_2} - \frac{\partial\Omega(P)}{\partial y_1\,\partial x_2}\right\},$$

so erhalten wir:

$$\Omega^2(P) = (ab)^2 a_x^{m-2} b_y^{n-2}, \text{ u. s. w.}$$

Aus symbolischen Producten entstehen also durch diese Operation immer wieder symbolische Producte, und man erkennt aus dem Beispiel die enge Beziehung, die zwischen Omega- und Faltungsprocess besteht. Alle symbolischen Producte, welche aus einem Stammproducte $P_x \cdot Q_x$ dadurch abgeleitet werden, dass man immer je einen linearen Factor von P_x mit einem von Q_x faltet, entstehen auch aus $P_x \cdot Q_y$, oder $Q_x \cdot P_y$ durch den Omegaprocess.

Seine Invarianteneigenschaft wird übrigens auch noch durch eine gewisse Relation bestätigt, die ihn mit Polarenbildung in Verbindung bringt.

Polarisirt man nämlich das Product

$$P = a_x^m b_y^n$$

nach x in Bezug auf y, so erhält man

$$P_y = a_x^{m-1} a_y b_y^n\,.$$

Bildet man aber hiervon wieder die erste Polare nach y in Bezug auf x, so kommt unter Anwendung der Differentiationsmethode:

$$(n+1)\sum \frac{\partial P_y}{\partial y_i} x_i = a_x^m b_y^n + n a_x^{m-1} a_y b_x b_y^{n-1}.$$

Hievon auf beiden Seiten

$$(n+1)\,P = a_x^m b_y + n a_x^m b_y^n$$

subtrahirt, liefert die Relation:

$$(n+1)\left\{P - \sum \frac{\partial P_y}{\partial y_i} x_i\right\} = n(ab)\,(xy) a_x^{m-1} b_y^{n-1} = n\,(xy)\cdot\Omega\,(P),$$

oder:

$$P = (P_y)_x + \frac{n}{n+1}(xy)\,\Omega(P). \tag{II}$$

Clebsch hat diese Relation benutzt, um die Form P in eine Reihe zu entwickeln, die nach Potenzen von (xy) fortschreitet, und deren Coefficienten Polaren gewisser Formen sind (Clebsch, Theorie der binären Formen, § 7. — Vgl. auch Nr. 25 und 28 dieses §).

21. *Polaren eines Productes mehrerer Formen.* In den meisten Fällen hat man nicht die Polare einer einzigen Form zu bilden, sondern eines Productes von Formen. Um dieselbe aufzustellen, benutze ich zunächst die am Schlusse von Nr. 13 entwickelte Methode. Es sei das symbolische Product, dessen Polare zu berechnen ist:

$$\Pi = (ab)(ac)(bc)\ldots a_x^\varrho b_x^\sigma c_x^\tau \ldots.$$

Die Klammerfactoren bleiben als Constante C von dem Polarenprocess unberührt. Die Factoren erster Art, — es seien λ an der Zahl — ersetzen wir wieder durch λ lineare Factoren r_{ix} und bilden sonach die Polare von

$$F = C r_{1x} r_{2x} r_{3x} \ldots r_{\lambda x}.$$

Dann erhalte ich hieraus die k^{te} Polare, indem ich in allen möglichen Combinationen ohne Wiederholung von λ Elementen je k Elemente r_{ix} herausgreife und jedesmal durch die $k!$ Permutationen der entsprechenden Elemente r_{iy} ersetze. Die Summe aller dieser Glieder, dividirt durch ihre Anzahl $\binom{\lambda}{k} k!$ liefert die Polare von F. Wir können sie also schreiben:

$$F_{y^k} = \frac{C}{k!\binom{\lambda}{k}} \sum_{i_1 i_2 \ldots i_k} r_{i_1 y} r_{i_2 y} \ldots r_{i_k y} \frac{F}{r_{i_1 x} \ldots r_{i_k x}}. \tag{I}$$

Ersetzen wir hierin wieder die Symbole

$$r_{1y}, r_{2y} \ldots r_{\varrho y} \text{ durch } a_x$$
$$r_{\varrho+1, y} \ldots r_{\sigma y} \text{ durch } b_x$$
$$r_{\sigma+1, y}, r_{\sigma+2, y} \ldots r_{\tau y} \text{ durch } c_x \text{ etc.,}$$

so stellt das Resultat die k^{te} Polare von Π dar.

22. *Darstellung dieses Polarenprocesses durch binomische Entwicklung.* Wir können nun wieder diese symbolische Methode durch Rechnung ersetzen und wählen zu dem Zwecke die binomische Entwicklung. Ich will mit einem Producte von zwei Formen beginnen. Es sei

$$F = a_x^m \cdot b_x^n = p_x^{m+n}.$$

Die Polare von F

$$F_{y^k} = p_x^{m+n-k} p_y^k$$

entsteht alsdann, wenn wir in F die Variable x_i durch $x_i + \lambda y_i$ ersetzen und den Coefficienten von $\binom{m+n}{k} \lambda^k$ in der Entwicklung von $p(x + \lambda y)^{m+n}$ nehmen.

Diesen Coefficienten erhalten wir auf folgende Weise. Es ist:

$$(a_x + \lambda a_y)^m = \binom{m}{0} a_x^m + \binom{m}{1} \lambda a_x^{m-1} a_y + \binom{m}{2} \lambda^2 a_x^{m-2} a_y^2 + \binom{m}{3} \lambda^3 a_x^{m-3} a_y^3 + \cdots$$

$$(b_x + \lambda b_y)^n = \binom{n}{0} b_x^n + \binom{n}{1} \lambda a_x^{n-1} a_y + \binom{n}{2} \lambda^2 a_x^{n-2} a_y^2 + \binom{n}{3} \lambda^3 a_x^{n-3} a_y^3 + \cdots$$

Durch Multiplication der beiden Entwicklungen bekommt man als Coefficienten von λ^k:

$$\binom{m+n}{k} F_{y^k} = \binom{m+n}{k} p_x^{m+n-k} p_y^k$$
$$= \binom{m}{0} \binom{n}{k} a_x^m b_x^{n-k} b_y^k + \binom{m}{1} \binom{n}{k-1} a_x^{m-1} a_y b_x^{n-k+1} b_y^{k-1}$$
$$+ \binom{m}{2} \binom{n}{k-2} a_x^{m-2} a_y^2 b_x^{n-k+2} b_y^{k-2} + \cdots$$
$$\cdots + \binom{m}{k} \binom{n}{0} a_x^{m-k} a_y^k b_x^m .$$

Die rechte Seite dieser Gleichung, dividirt durch $\binom{m+n}{k}$, stellt also die k^{te} Polare von $a_x^m \cdot b_x^n$ dar.

23. *Relation zwischen den Coefficienten der Polare.* In die zuletzt erhaltene Entwicklung führen wir folgende Abkürzungen ein. Wir setzen:

$$c_0 = \frac{\binom{m}{0}\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{k}}, \quad c_1 = \frac{\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}}{\binom{m+n}{k}}, \quad \ldots, \quad c_\varrho = \frac{\binom{m}{\varrho}\binom{n}{k-\varrho}}{\binom{m+n}{k}},$$

ferner:

$$G_0 = a_x^m b_x^{n-k} b_y^k, \; G_1 = a_x^{m-1} a_y b_y^{n-k-1}, \; \ldots, \; G_\varrho = a_x^{m-\varrho} a_y^\varrho b_x^{n-k+\varrho} b_y^{k-\varrho},$$

dann ist:

$$F_{y^k} = c_0 G_0 + c_1 G_1 + c_2 G_2 + \cdots c_\varrho G_\varrho \cdots c_k G_k$$

$$F_{y^k} = \sum_0^k c_\varrho G_\varrho . \tag{I}$$

Die Grössen G_ϱ bezeichnen wir kurz als „Glieder“ der Polare, das Glied G_0 führt den Namen „Anfangsglied“. Jedes Glied hat, wie man unmittelbar ersieht, die Eigenschaft, direct in F überzugehen, sobald man y durch x ersetzt. Da anderntheils F_{y^k} selbst in F übergeht durch diese Substitution, so folgt aus (I) die Identität:

$$F = c_0 F + c_1 F + c_2 F + \cdots c_k F$$

oder nach Division mit F

$$1 = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots c_k , \tag{II}$$

d. h. „die Summe der Coefficienten in der Polare F_{y^k} ist immer gleich Eins.“

24. *Benachbarte Glieder.* Jedes Glied G_ϱ kann man sich auf folgende Art symbolisch entstanden denken: Man schreibt m Factoren a_x und n Factoren b_x an, nimmt beliebig ϱ ($\varrho \leq k$) Factoren hinweg und

ersetzt sie entsprechend durch Factoren a_y resp. b_y. Dabei giebt der Zähler des zugehörigen Coefficienten c_ϱ immer an, wie oft durch Herbeiführung immer anderer und anderer Factoren diese Operation vorgenommen werden kann, nämlich $\binom{m}{\varrho}\binom{n}{k-\varrho}$ mal. Zwei aufeinanderfolgende Glieder G_ϱ und $G_{\varrho+1}$

$$G_\varrho = a_x^{m-\varrho} a_y^\varrho b_x^{n-k+\varrho} b_y^{k-\varrho}$$
$$G_{\varrho+1} = a_x^{m-\varrho-1} a_y^{\varrho+1} b_x^{n-k+\varrho+1} b_y^{k-\varrho-1}$$

unterscheiden sich nur dadurch, dass an Stelle des Factorenpaares $a_x b_y$, das Product $a_y b_x$ getreten ist, d. h. ein vorhergehendes Glied hat einen Factor a_x und einen Factor b_y mehr, als ein nachfolgendes. Zwei Glieder, die sich nur um zwei solche linearen Factoren unterscheiden, nennen wir „benachbarte Glieder". (Vgl. auch Nr. 10.) Ihre Differenz liefert:

$$G_\varrho - G_{\varrho+1} = a_x^{m-\varrho-1} a_y^\varrho b_x^{n-k+\varrho} b_y^{k-\varrho-1} (a_x b_y - b_x a_y).$$

Nun ist aber nach dem Identitätssatze Nr. 11, (III):

$$(a_x b_y - b_x a_y) = (ab)(xy).$$

Daher wird:

$$G_\varrho - G_{\varrho+1} = (ab)(xy) \cdot a_x^{m-\varrho-1} a_y^\varrho \cdot b_x^{n-k+\varrho} b_y^{k-\varrho-1}, \text{ d. h.}$$

„Die Differenz je zweier benachbarter Glieder einer Polare enthält immer den Factor $(ab)(xy)$."

25. *Verallgemeinerung dieses Satzes.* Dieser Satz gilt aber auch für die Differenz zweier beliebiger Glieder

$$G_\varrho - G_\sigma.$$

Denn es ist:

$$G_\varrho - G_\sigma = G_\varrho - G_{\varrho+1} + G_{\varrho+1} - G_{\varrho+2} + G_{\varrho+2} - \cdots + G_{\sigma-1} - G_\sigma,$$

wo nun rechts immer je zwei Glieder benachbart sind. Er gilt endlich aber auch für die Differenz

$$F_{y^k} - G_\varrho.$$

Denn multipliciren wir die Gleichung (II) Nr. 23 mit G_ϱ und subtrahiren sie von Gleichung (I), dann erhalten wir

$$F_{y^k} - G_\varrho = c_0(G_0 - G_\varrho) + c_1(G_1 - G_\varrho) + \cdots + c_k(G_k - G_\varrho).$$

Daher der Satz:

„Die Differenz zwischen Polare und einem ihrer Glieder enthält immer den Factor $(ab)(xy)$."

Wir wollen diesen fundamentalen Satz noch etwas weiter verfolgen. Der andere Factor, der mit $(ab)(xy)$ zusammen die Differenz $F_{y^k} - G_\varrho$ darstellt, besteht aus einer Summe von Gliedern H_σ, die in

x wie in y um je einen Grad niedriger sind. Multipliciren wir mit dem einen Factor (ab) in diese Summe hinein, so lässt sich jedes Glied

$$(ab)\, H_\sigma$$

als Glied einer gewissen Polare auffassen, die um einen Grad niedriger ist als die ursprüngliche Polare. Ueberdies ist diese $(k-1)^{\text{te}}$ Polare nicht wie F_{y^k} von dem Producte

$$f \cdot \varphi = a_x^m b_x^n$$

der beiden ursprünglichen Formen gebildet, sondern — eben wegen des Klammerfactors (ab) — von einer Form, die aus ihm durch einmalige Faltung entstanden ist. Bezeichnen wir diese Form mit

$$(f,\, \varphi)^1,$$

ihre Polare mit:

$$(f,\, \varphi)_{y^{k-1}}$$

und ein Glied derselben mit

$$G_{(f,\, \varphi)_{y^{k-1}}},$$

so kann man den eben erhaltenen Satz in die algebraische Form bringen

$$G_\varrho = F_{y^k} + (xy) \sum c_i\, G_{(f,\, \varphi)_{y^{k-1}}}. \tag{I}$$

Die Iteration liegt nahe. Ich ersetze die einzelnen Glieder der Summe in (I) gerade nach diesem Gesetze wieder durch die ihnen zugehörigen $(k-1)^{\text{ten}}$ Polaren und eine Summe anderer Glieder K, die neuerdings den Factor $(ab)\,(xy)$ erhalten, also $(k-2)^{\text{ten}}$ Polaren angehören von Formen, die durch zweimalige Faltung aus $f \cdot \varphi$ entstanden sind. Der Ausdruck (I) wird dann:

$$G_\varrho = F_{y^k} + (xy) \sum c_i\, (f,\, \varphi)_{y^{k-1}} + (xy)^2 \sum c_i^{(1)}\, K_{(f,\, \varphi)^2{}_{y^{k-1}}}.$$

Wiederholt man diesen Process so lange, bis man schliesslich auf nullte Polaren kommt, von Formen, die aus $f \cdot \varphi$ durch $k$malige Faltung hervorgingen, so gelangt man endlich zu dem Resultat:

$$\begin{aligned} G_\varrho = F_{y^k} + (xy) \sum c_i\, (f,\, \varphi)_{y^{k-1}} + (xy)^2 \sum c_i^{(1)}\, (f,\, \varphi)^2{}_{y^{k-2}} + \cdots \\ \cdots + (xy)^k \sum c_i^{k-1}\, (f,\, \varphi)^k_{y^0}, \text{ d. h.} \end{aligned} \tag{II}$$

„Jedes Glied einer Polare lässt sich entwickeln in eine Summe von Polaren, multiplicirt mit Potenzen von (xy). Das erste Glied dieser Summe ist die ursprüngliche Polare selbst und hat den Coefficienten Eins."

Für den hier betrachteten einfachen Fall werden wir später (§ 8) die Reihenentwicklung mit Angabe der Coefficienten geben.

26. *Beispiel.* Ich will die bisher gewonnenen Resultate an einem Beispiele verificiren. Es sei gegeben das Product

$$F = f \cdot \varphi = a_x^3 \cdot b_x^3 = r_{1x} r_{2x} r_{3x} \cdot r_{4x} r_{5x} r_{6x}.$$

Die zweite Polare dieses Products ist nach der ursprünglichen Definition (Nr. 21) dargestellt durch:

$$F_{y^2} = \frac{1}{2!\binom{6}{2}} \sum r_{i_1 y} r_{i_2 y} \cdot \frac{F}{r_{i_1 x} r_{i_2 x}}$$

$$= \frac{2!1}{2!15} \{ r_{1y} r_{2y}\ r_{3x} r_{4x} r_{5x} r_{6x} + r_{1y} r_{3y}\ r_{2x} r_{4x} r_{5x} r_{6x} + r_{1y} r_{4y}\ r_{2x} r_{3x} r_{5x} r_{6x}$$
$$+ r_{1y} r_{5y}\ r_{2x} r_{3x} r_{4x} r_{6x} + r_{1y} r_{6y}\ r_{2x} r_{3x} r_{4x} r_{5x} + r_{2y} r_{3y}\ r_{1x} r_{4x} r_{5x} r_{6x}$$
$$+ r_{2y} r_{4y}\ r_{1x} r_{3x} r_{5x} r_{6x} + r_{2y} r_{5y}\ r_{1x} r_{3x} r_{4x} r_{6x} + r_{2y} r_{6y}\ r_{1x} r_{3x} r_{4x} r_{5x}$$
$$+ r_{3y} r_{4y}\ r_{1x} r_{2x} r_{5x} r_{6x} + r_{3y} r_{5y}\ r_{1x} r_{2x} r_{4x} r_{6x} + r_{3y} r_{6y}\ r_{1x} r_{2x} r_{4x} r_{5x}$$
$$+ r_{4y} r_{5y}\ r_{1x} r_{2x} r_{3x} r_{6x} + r_{4y} r_{6y}\ r_{1x} r_{2x} r_{3x} r_{5x} + r_{5y} r_{6y}\ r_{1x} r_{2x} r_{3x} r_{4x} \}.$$

Ersetzen wir hierin $r_1\, r_2\, r_3$ durch a, $r_4\, r_5\, r_6$ durch b, so erhalten wir:

$$F_{y^2} = \frac{1}{15} \{ a_y^2 a_x b_x^3 + a_y^2 a_x b_x^3 + a_y b_y a_x^2 b_x^2 + a_y b_y a_x^2 b_x^2 + a_y^2 b_y a_x^2 b_x^2$$
$$+ a_y^2 a_x b_x^3 + a_y b_y a_x^2 b_x^2 + a_y b_y a_x^2 b_x^2 + a_y b_y a_x^2 b_x^2 + a_y b_y a_x^2 b_x^2$$
$$+ a_y b_y a_x^2 b_x^2 + a_y b_y a_x^2 b_x^2 + b_y^2 a_x^3 b_x + b_y^2 a_x^3 b_x + b_y^2 a_x^3 b_x \}.$$

Fassen wir alle gleichen Glieder zusammen, so kommt:

$$F_{y^2} = \frac{1}{5} \{ a_y^2 a_x b_x^3 + 3 a_y b_y a_x^2 b_x^2 + b_y^2 a_x^3 b_x \}.$$

In dem nämlichen Resultate gelangen wir nach Nr. 22 durch die binomische Entwicklung. Darnach ist:

$$F_{y^2} = \frac{1}{\binom{6}{2}} \left\{ \binom{3}{2} a_x^3 b_x b_y^2 + \binom{3}{1}\binom{3}{1} a_x^2 a_y b_x^2 b_y + \binom{3}{2} a_x a_y^2 b_x^3 \right.$$
$$= \frac{1}{5} \{ a_x^3 b_x b_y^2 + 3 a_x^2 a_y b_x^2 b_y + a_x a_y^2 b_x^3 \}.$$

Bilden wir nun die Differenz der Polare und des zweiten Gliedes. Man erhält:

$$F_{y^2} - \frac{5}{5} a_x^2 a_y b_x^2 b_y = \frac{1}{5} (a_x^3 b_x b_y^2 - a_x^2 a_y b_x^2 b_y) + \frac{1}{5} (a_x a_y^2 b_x^3 - a_x^2 a_y b_x^2 b_y)$$
$$= \frac{1}{5} (ab)\, a_x^2 b_x b_y (xy) + \frac{1}{5} (ab)\, a_x a_y b_x^2 (xy)$$

oder

$$F_{y^2} - \quad a_x^2 a_y b_x^2 b_y = \frac{(xy)}{5} \{ (ab)\, a_x^2 b_x b_y + (ab)\, a_x a_y b_x^2 \}.$$

Jeder der beiden Terme im zweiten Factor rechts stellt ein Glied der ersten Polare einer Form dar, die aus $a_x^3 b_x^3$ durch Faltung hervorgeht, nämlich der Form:

$$\Phi = (ab)\, a_x^2 b_x^2.$$

Die erste Polare dieser Form ist aber gerade

$$\Phi_y = \frac{1}{2} \{ (ab)\, a_x^2 b_x b_y + (ab)\, a_x a_y b_x^2 \}.$$

Folglich ist

$$a_x^2 b_x^2 a_y b_y = F_{y^2} - \frac{2}{5}(xy)\,\Phi_y.$$

27. *Beispiel.* Berechnen wir ebenso die vierte Polare von

$$P = a_x^6 b_x^4.$$

Sie ist, wenn wir uns wieder lineare Factoren r_{ix} eingeführt denken, dargestellt durch

$$\binom{10}{4} P_{y^4} = \sum r_{1y} r_{2y} r_{3y} r_{4y} \cdot \frac{P}{r_{1x} r_{2x} r_{3x} r_{4x}}.$$

Die 6 Factoren a_x lassen sich $\binom{6}{4}$ mal zu je 4 Factoren r_{ix} gruppiren. Also ist das Anfangsglied sammt Coefficienten

$$c_0 G_0 = \binom{6}{4}\binom{4}{0} a_y^4 a_x^2 b_x^4.$$

Sie lassen sich ferner $\binom{6}{3}$ mal zu je 3 Factoren r_{ix} verbinden. Jede dieser Complexionen kann mit je einem Factor b_x multiplicirt auftreten; folglich ist

$$c_1 G_1 = \binom{6}{3}\binom{4}{1} a_y^3 b_y a_x^3 b_x^3.$$

Auf gleiche Weise findet man die drei anderen Glieder und erhält so

$$\binom{10}{4} P_{y^4} = \binom{6}{4}\binom{4}{0} a_y^4 a_x^2 b_x^4 + \binom{6}{3}\binom{4}{1} a_y^3 b_y a_x^3 b_x^3 + \binom{6}{2}\binom{4}{2} a_y^2 b_y^2 a_x^4 b_x^2$$
$$+ \binom{6}{1}\binom{4}{3} a_y b_y^3 a_x^5 b_x + \binom{6}{0}\binom{4}{4} b_x^4 a_x^6$$

oder:

$$P_{y^4} = \frac{1}{210}\left\{15 a_y^4 a_x^2 b_x^4 + 80 a_y^3 b_y a_x^3 b_x^3 + 90 a_y^2 b_y^2 a_x^4 b_x^2 + 24 a_y b_y^3 a_x^5 b_x + b_y^4 a_x^6\right\}.$$

Zunächst erkennt man: die Summe aller Coefficienten ist Eins. Subtrahiren wir nun von P_{y^4} das Glied

$$G_2 = \frac{1}{210}\left\{15 a_y^2 b_y^2 a_x^4 b_x^2 + 80 a_y^2 b_y^2 a_x^4 b_x^2 + 90 a_y^2 b_y^2 a_x^4 b_x^2\right.$$
$$\left. + 24 a_y^2 b_y^2 a_x^4 b_x^2 + a_y^2 b_y^2 a_x^4 b_x^2\right\},$$

so erhalten wir:

$$P_{y^4} - G_2 = \frac{1}{210}\left\{15(G_0 - G_2) + 80(G_1 - G_2) + 24(G_3 - G_2) + G_4 - G_2\right\}.$$

Nun ist

$$G_1 - G_2 = (ab)(yx)\, a_y^2 b_y a_x^3 b_x^2$$
$$G_3 - G_2 = (ab)(xy)\, a_y b_y^2 a_x^4 b_x$$

und folglich:

$$G_0 - G_2 = G_0 - G_1 + G_1 - G_2 = (ab)(yx)\, a_y^3 a_x^2 b_x^3 + (ab)(yx)\, a_y^2 b_y a_x^3 b_x^2$$
$$G_4 - G_2 = G_4 - G_3 + G_3 - G_2 = (ab)(xy)\, b_y^3 a_x^5 b_x + (ab)(xy)\, a_y b_y^2 a_x^4 b_x.$$

Folglich ist:

$$P_{y^4} - G_2 = \frac{(ab)(xy)}{210} \Big\{ -15(a_y^2 b_y a_x^3 b_x^2 + a_y^3 a_x^2 b_x) - 80 a_y^2 b_y a_x^3 b_x^2$$
$$+ 24\, a_y b_y^2 a_x^4 b_x + b_y^3 a_x^5 + a_y b_y^2 a_x^4 b_x \Big\}$$
$$= \frac{(ab)(xy)}{210} \Big\{ -15 a_y^3 a_x^2 b_x^3 - 95 a_y^2 b_y a_x^3 b_x^2 + 25 a_y b_y^2 a_x^4 b_x + b_y^3 a_x^5 \Big\}.$$

Demnach wird:

$$G_2 = P_{y^4} + (xy) \Big\{ \frac{1}{14} (ab)\, a_y^3 a_x^2 b_x^3$$
$$+ \frac{19}{42} (ab)\, a_y^2 b_y a_x^3 b_x^2 - \frac{5}{42} (ab)\, a_y b_y^2 a_x^4 b_x - \frac{1}{210} (ab)\, b_y^3 a_x^5 \Big\}.$$

Die Glieder, welche sich rechts innerhalb der Klammer befinden, sind durchwegs Glieder der dritten Polare von

$$Q = (ab)\, a_x^5 b_x^3.$$

Man könnte sie also wieder ersetzen durch Q_{y^3} plus einer Summe von Gliedern zweiter Polaren u. s. w.

28. *Polaren eines beliebigen Productes von Formen.* Wir haben bereits in Nr. 21 den Process definirt, durch welchen die Polare eines Productes von mehr als zwei Formen erhalten wird. Es erübrigt noch, rechnerische Operationen anzugeben, durch welche dieser symbolische Process ersetzt werden kann. Am einfachsten bedienen wir uns wieder der binomischen Entwicklung. Sei nunmehr F das Product von τ Formen

$$f = a_x^m, \quad \varphi = b_x^n, \quad \psi = c_x^p, \quad \ldots \text{ etc.}$$

Dann ist die k^{te} Polare von F durch folgende Grösse definirt. Wir ersetzen in F x_i durch $x_i + \lambda y_i$, bilden die binomischen Entwicklungen der Formen

$$(a_x + \lambda a_y)^m, \quad (b_x + \lambda b_y)^n, \quad (c_x + \lambda c_y)^n, \quad \ldots \text{ etc.}$$

und multipliciren die so erhaltenen Summen. Der Coefficient von λ^k dividirt durch

$$\binom{m+n+p+\cdots s}{k},$$

liefert die k^{te} Polare von F. Die Coefficienten dieser Polare haben demnach die Form

$$\frac{\binom{m}{i_1}\binom{n}{i_2}\binom{p}{i_3}\cdots\binom{s}{i_k}}{\binom{m+n+p+\cdots s}{s}}$$

und ihre Summe ist wiederum gleich Eins, wie aus der ursprünglichen Definition Nr. 21 unmittelbar ersichtlich ist.

29. *Beispiele.* Wir berechnen die dritte Polare des Productes:

$$F = a_x^3 b_x^2 c_x.$$

Es ist:

$$(a_x + \lambda a_y)^3 = \binom{3}{0} a_x^3 + \binom{3}{1} \lambda a_x^2 a_y + \binom{3}{2} \lambda^2 a_x a_y^2 + \binom{3}{3} \lambda^3 a_y^3$$

$$(b_x + \lambda b_y)^2 = \binom{2}{0} b_x^2 + \binom{2}{1} \lambda b_x^2 b_y + \binom{2}{2} \lambda^2 b_y^2$$

$$c_x + \lambda c_y \quad = \binom{1}{0} c_x + \binom{1}{1} \lambda c_y .$$

Die dritte Polare ist somit:

$$F_{y^3} = \frac{1}{\binom{6}{3}} \Big\{ \binom{1}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{3} a_y^3 b_x^2 c_x + \binom{1}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{2} a_x^2 a_s b_y b_x c_x$$
$$+ \binom{1}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{1} a_y b_y^2 a_x^2 c_x + \binom{1}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1} a_y b_y c_y a_x^2 b_x$$
$$+ \binom{1}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{0} a_x^3 b_y^2 c_x \Big\} .$$

Ich möchte hierbei noch aufmerksam machen auf die Zahl der Glieder dieser Polare. Sie ist nämlich gleich der Zahl der Variationen mit Wiederholungen von 4 Elementen (0, 1, 2, 3) zur Summe 3. Dies lässt sich an diesem einfachen Beispiel direct ersehen; denn in den Coefficienten der einzelnen Glieder:

$$\binom{1}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{3}, \quad \binom{1}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{2}, \quad \binom{1}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{1}, \quad \binom{1}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}, \quad \binom{1}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{0}$$

stellen gerade die untern Zahlenreihen die erwähnten Complexionen dar. Dieses Gesetz, das aus dieser Art der Polarenberechnung unmittelbar hervorgeht, gilt auch allgemein.

Ueber die Anzahl dieser Variationen hat Cayley im Jahre 1856, Phil. Trans. Bd. 146, folgendes Gesetz aufgestellt:

> „Eine Zahl p kann als Summe von ϱ Zahlen der Reihe 0, 1, 2, ... so oft dargestellt werden, als der Coefficient $x^p z^\varrho$ in der Entwicklung nach steigenden Potenzen von z der Function
>
> $$\Phi = \frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^2 z)\dots(1-x^\varrho z)}$$
>
> beträgt. (Vgl. auch Faà di Bruno, Theorie der binären Formen, übersetzt von Walter, Seite 124.)

30. *Benachbarte Glieder.* Auch hier, bei Polaren eines Productes von Formen, sind wiederum zwei Glieder benachbart, wenn sie bis auf ein Factorenpaar $q_x \cdot r_y$ übereinstimmen (wobei r und q für irgend eines der Symbole $a, b, c, d, \dots$ etc. stehen). Die Differenz zweier benachbarter Glieder besitzt wieder das Factorenpaar (qr) (xy) zu Factoren. Bildet man alsdann die Differenz zweier beliebiger Glieder, oder die Differenz von Polare und einem ihrer Glieder, so hat diese Differenz zunächst den einen Factor (xy). Der zweite Factor gliedert

sich in eine Reihe von Summen, welche je mit einem der Klammerfactoren (qr) multiplicirt auftreten. Jede solche Theilsumme ist somit ein Aggregat von Gliedern, die $(k-1)^{\text{ten}}$ Polaren angehören von Formen, welche aus F durch Faltung entstanden sind. Es gilt somit noch immer der Satz:

„Jedes Glied einer Polare von F lässt sich darstellen durch die Polare selbst plus einer Summe von Gliedern, welche selbst wieder niedrigerern Polaren von Formen angehören, die aus F durch Faltung entstanden sind."

Wendet man auf diese Glieder niedrigerer Polaren den gleichen Satz an und wiederholt ihn so lange, bis alle Glieder durch Polaren ersetzt sind, so erkennt man die Richtigkeit des Satzes:

„Jedes Glied einer Polare und damit jedes symbolische Product mit zwei Reihen Veränderlicher x und y kann in eine Summe von Polaren entwickelt werden, die nach Potenzen von (xy) fortschreitet."

31. *Polaren mit mehr als zwei Reihen cogredienter Variabler.* Wir haben schon in Nr. 18 den Polarenbegriff für eine Form dahin erweitert, dass wir als Polare auch das symbolische Product definirten:

$$f_{y^k z^\lambda} = a_x^{n-k-\lambda}\, a_y^k\, a_z^\lambda .$$

Aehnlich können wir allgemein ein beliebiges symbolisches Product nach mehreren Reihen Variabler $y, z, u, v \ldots$ etc. polarisiren. Wir ersetzen in dem symbolischen Product

$$F = f \cdot \varphi \cdot \psi \ldots,$$

welches vom Grade $m + n + p + \cdots = s$ in x sein möge, die Variabeln x_i durch $x_i + \varrho_1 y_i + \varrho_2 z_i + \cdots$, entwickeln die einzelnen Factoren $f, \varphi, \psi \ldots$ nach dem polynomischen Lehrsatz und multipliciren die so erhaltenen Summen. Irgend eine Polare, etwa die Polare $F_{y^k z^\lambda u^\nu}$ ist alsdann dargestellt durch den Coefficienten von $\varrho_1^k \varrho_2^\lambda \varrho_3^\nu$, dividirt durch den Polynomialcoefficienten: $\frac{s!}{k!\,\lambda!\,\nu!\,(s-k-\lambda-\nu)!}$. Wir nennen sie wiederum eine **gemischte** Polare und alle Sätze, welche über die einfachen Polaren und deren Glieder aufgestellt wurden, lassen sich auf diese Polaren und deren Glieder übertragen. Insbesondere gilt der Satz:

„Jedes symbolische Product mit beliebig vielen Reihen cogredienter Veränderlicher $x, y, z, u \ldots$ kann in eine Summe von Polaren entwickelt werden, multiplicirt mit Potenzen von $(xy), (yz), (xz) \ldots$ etc.

§ 3. Ueberschiebungsprocess.

32. *Definition.* Die einfachsten symbolischen Producte u sind diejenigen, welche nur zwei Symbole enthalten:

$$u = (ab)^k a_x^{m-k} b_x^{n-k}.$$

Man nennt sie „Ueberschiebungen“, und der Process, durch den sie entstehen, ist der Faltungsprocess: Das Product

$$P = a_x^m \cdot b_x^n$$

der beiden Formen $f = a_x^m$, $\varphi = b_x^n$ wird k mal gefaltet. Wir werden eine solche k^{te} Ueberschiebung in der Folge auch sehr häufig durch

$$U = (f, \varphi)^k$$

darstellen. Ist $n < m$, so kann k alle Werthe von 0 bis n annehmen. Insbesondere ist:

$$(f, \varphi)^0 = f \cdot \varphi = a_x^m \cdot b_x^n$$
$$(f, \varphi)^n = (ab)^n a_x^{m-n}.$$

Jede höhere Ueberschiebung als die n^{te} verschwindet alsdann identisch.

Die Ueberschiebung ist eine auch unsymbolisch darstellbare Form, eine simultane Covariante von f und φ, und der rein symbolische Faltungsprocess liefert sonach hier ein Resultat, das sonst durch rein rechnerische Operationen erhalten wird. (Siehe Nr. 35.) Aus der Definition der Ueberschiebung als Resultat der Faltung eines Productes $f \cdot \varphi$ erkennt man unmittelbar die Gültigkeit folgender Relationen:

(α) $$(c \cdot f, \varphi)^k = c \cdot (f, \varphi)^k, \quad \text{d. h.:}$$

„Die Ueberschiebung eines Productes $c \cdot f$, wo c eine Constante, über eine Form φ ist gleich dem Producte der Ueberschiebung $(f, \varphi)^k$ in die Constante c.“

(β) $$(f + c_1 \cdot \psi, \varphi + c_2 \cdot \chi)^k = (f, \varphi)^k + c_1 \cdot (\psi, \varphi)^k + c_2 (f, \chi)^k + c_1 \cdot c_2 \cdot (\psi, \chi)^k,$$ d. h.:

„Die Ueberschiebung von linearen Systemen einzelner Formen ist gleich einem linearen Systeme der Ueberschiebungen dieser Formen.“

(γ) $$(\varphi, f)^k = (ba)^k b_x^{n-k} a_x^{m-k} = (-1)^k \cdot (f, \varphi)^k, \quad \text{d. h.:}$$

„Die k^{te} Ueberschiebung ändert, wenn man f mit φ vertauscht, ihr Zeichen, je nachdem k gerade oder ungerade.“

Im Interesse späterer Untersuchungen will ich die Faltungen, durch welche eine Ueberschiebung entsteht, noch auf einem umständlicheren Wege ausführen. Wir denken uns nämlich einen Augenblick

die m symbolischen Factoren von f, und die n Factoren von φ verschieden, etwa:

$$f = r_{1x} r_{2x} r_{3x} \cdots r_{mx} = a_x^m$$
$$\varphi = s_{1x} s_{2x} s_{3x} \cdots s_{nx} = b_x^n.$$

Die Ueberschiebung $(f, \varphi)^k$ entsteht alsdann, wenn wir das Product

$$P = f \cdot \varphi = r_{1x} r_{2x} \cdots r_{mx} \times s_{1x} s_{2x} \cdots s_{nx}$$

k mal falten und nachträglich r_k durch a, s_k durch b wieder ersetzen. Um aber hierbei keine der einzelnen Factoren auszuzeichnen, werden wir diese k Faltungen auf alle möglichen Arten vornehmen, die Summe aller so entstehenden symbolischen Producte bilden, und, damit wir nach Einführung der alten Symbole a und b wieder auf das einzige Product $(ab)^k a_x^{m-k} b_x^{n-k}$ kommen, diese Summe mit der Anzahl aller Glieder dividiren. Diese Anzahl ist im Allgemeinen gleich dem Producte

$$\binom{m}{k} k! \times \binom{n}{m} k! = m(m-1) \cdots (m-k+1) \cdot n(n-1) \cdots (n-k+1),$$

da jede Variation ohne Wiederholung von m Elementen zur k^{ten} Klasse mit jeder Variation ohne Wiederholung von n Elementen zu einer Faltung Veranlassung giebt, wenn wir völlig symmetrisch verfahren wollen. Man hat demnach:

$$(f, \varphi)^k = \frac{1}{m(m-1) \cdots (m-k+1)} \cdot \frac{1}{n(n-1) \cdots (n-k+1)}$$
$$\cdot \sum (r_{i_1} s_{l_1}) \cdots (r_{i_k} s_{l_k}) \cdot \frac{f \cdot \varphi}{r_{i_1 x} r_{i_2 x} \cdots s_{k_1 x} \cdots s_{l_k x}},$$

und dieser Ausdruck rechts reducirt sich auf

$$(f, \varphi)^k = (ab)^k a_x^{m-k} b_x^k,$$

wenn wir r_k durch a, und s_k durch b ersetzen.

33. *Der Omegaprocess und die Ueberschiebung.* Das gleiche Resultat, das wir hier durch $k$malige Faltung der beiden Formen f und φ erhielten, entsteht auch durch $k$malige Anwendung des Omegaprocesses, wenn wir vorher in einer der beiden Formen x mit y vertauschen, und nach ausgeführter Operation wieder y durch x ersetzen. Man erkennt dies aus den Entwicklungen in Nr. 20, nach welchen der Omegaprocess angewendet auf das Product

$$P = a_x^m b_y^n$$

die Resultate lieferte:

$$\Omega(P) = (ab) a_x^{m-1} b_y^{n-1}$$
$$\Omega^2(P) = (ab)^2 a_x^{m-2} b_y^{n-2} \text{ etc.}$$

Wir haben somit auch als weitere Definitionsgleichung:

$$(f, \varphi)^k = \{\Omega^k (f_x \cdot \varphi_y)\}_{y=k}. \tag{III}$$

34. *Ueberschiebung der Polaren.* Nach der ursprünglichen Definition wurde die Ueberschiebung in der Weise gebildet, dass man je zwei Factoren $a_x b_x$ durch den Klammerfactor (ab) ersetzte.

Wir können in diesen Process noch eine scheinbar überflüssige Zwischenoperation einführen, die wir aber sofort als einen für die Bildung der Ueberschiebung fundamentalen Process erkennen werden Ersetzen wir nämlich in dem Producte

$$P = a_x^m \cdot b_x^n$$

jedes der k Factorenpaare $a_x b_x$ zuerst durch k Factorenpaare $a_y b_y$, und falten wir nun erst k mal nach y, so entsteht wiederum

$$U = (ab)^k a_x^{m-k} b_x^{n-k}.$$

Die Zwischenoperation war aber nichts anderes als der Polarenprocess, durch welchen aus P die Form

$$f_{y^k} \cdot \varphi_{y^k} = a_x^{m-k} a_y^k \cdot b_x^{n-k} b_y^k$$

geworden war.

Die Ueberschiebung entstand hieraus durch Faltung der Polaren nach y. Daraus erkennen wir den Satz, der namentlich für complicirtere Formen f und φ von Wichtigkeit wird:

„Die k^{te} Ueberschiebung der k^{ten} Polaren ist gleich der k^{ten} Ueberschiebung der Formen," oder:

$$U = (f, \varphi)^k = (f_{y^k}, \varphi_{y^k})^k. \tag{IV}$$

Bei dieser Ueberschiebung der Polaren werden hier die Variabeln x als constant angesehen und die Ueberschiebung geht so weit als die Variabeln y gehen, d. h. die Operation liefert eine simultane Invariante der Polaren in Bezug auf die y.

35. *Unsymbolische Darstellung der Ueberschiebung zweier einfacher Formen f und φ.* Bezeichnen wir nun die k^{te} Polare von f mit

$$r_y^k = a_x^{m-k} a_y^k,$$

und ebenso die k^{te} Polare von φ mit

$$s_y^k = b_x^{n-k} b_y^k,$$

dann ist also die k^{te} Ueberschiebung dieser beiden Formen f und φ bezeichnet durch:

$$(rs)^k = (f_{y^k}, \varphi_{y^k})^k = (f, \varphi)^k = a_x^{m-k} b_x^{n-k} (ab)^k.$$

Es ist aber $r_y^k = r$ als Function von y betrachtet unsymbolisch gegeben durch:

$$r = \bar{r}_0 y_1^k + \binom{k}{1} \bar{r}_1 y_1^{k-1} y_2 + \binom{k}{2} \bar{r}_2 y_1^{k-2} y_2^2 + \cdots + \bar{r}_k y_2^k$$

und ebenso

$$s = \bar{s}_k y_2^k + \binom{k}{1} \bar{s}_{k-1} y_2^{k-1} y_1 + \binom{k}{2} \bar{s}_{k-2} y_2^{k-2} y_1^2 + \cdots + \bar{s}_0 y_1^k .$$

Hierbei sind die unsymbolischen Coefficienten $\bar{r}_i$, $\bar{s}_i$ im Allgemeinen Functionen von x. Stellt man nun anderntheils r und s symbolisch dar, setzt also

$$r = (r_1 y_1 + r_2 y_2)^k$$
$$s = (s_1 y_1 + s_2 y_2)^k ;$$

dann ist in symbolischer Bezeichnung die Invariante

$$(rs)^k = r_1^k s_2^k - \binom{k}{1} r_1^{k-1} r_2 s_2^{k-1} s_1 + \binom{k}{2} r_1^{k-2} r_2^2 s_2^{k-2} s_1^2 + \cdots \pm r_2^k s_1^k . \quad \text{(I)}$$

Ersetzt man aber hierin die symbolischen Coefficienten

$$r_1^k, \quad r_1^{k-1} \cdot r_2, \quad r_2^{k-2} \cdot r_2^2, \ldots$$
$$s_1^k, \quad s_1^{k-1} \cdot s_2, \quad s_2^{k-2} \cdot s_2^2, \ldots$$

durch die wirklichen

$$\bar{r}_0, \quad \bar{r}_1, \quad \bar{r}_2, \ldots$$
$$\bar{s}_0, \quad \bar{s}_1, \quad \bar{s}_2, \ldots,$$

so erhält man als unsymbolische Darstellung der Ueberschiebung $(f, \varphi)^k$ die Invariante der Polaren:

$$(rs)^k = \bar{r}_0 \bar{s}_k - \binom{k}{1} \bar{r}_1 \bar{s}_{k-1} + \binom{k}{2} \bar{r}_2 \bar{s}_{k-2} - + \cdots \pm \bar{r}_k \bar{s}_0 . \quad \text{(II)}$$

Dieser Ausdruck ist eine simultane Covariante von f und φ. Er stellt direct die bilineare Invariante der beiden Formen dar, sobald $m = n = k$, d. h. der Grad der beiden Formen mit dem Grade der Ueberschiebung übereinstimmt.

Nun sind die Coefficienten der Polare nichts anderes als die Grössen

$$\frac{(m-k)!}{m!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k-\varrho} \cdot \partial x_2^{\varrho}} \quad \text{(vergl. Nr. 14, (8)).}$$

Ersetzen wir daher dieselben in (I) durch diese Differentialquotienten, so erhalten wir als Ausdruck der k^{ten} Ueberschiebung

$$(f, \varphi)^k = (rs)^k = \frac{(m-k)!}{m!} \frac{(n-k)!}{n!} \left\{ \frac{\partial^k f}{\partial x_1^k} \cdot \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_2^k} \right.$$
$$\left. - \binom{k}{1} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k-1} \partial x_2} \cdot \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_2^{k-1} \partial x_1} + \cdots \pm \frac{\partial^k f}{\partial x_2^k} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^k} \right\},$$

oder in leicht verständlicher kürzerer Schreibweise:

$$(f, \varphi)^k = \frac{(m-k)!}{m!} \frac{(n-k)!}{n!} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\}^k . *) \qquad \text{(III)}$$

Vergleicht man diese Darstellung mit der Darstellung der k^{ten} Polare von $f = a_x^m$, Nr. 14 (8)

$$f_{y^k} = \frac{(m-k)!}{m!} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 \right\}^k,$$

so erkennt man, dass sich der Ueberschiebungsprocess auch folgendermassen formuliren lässt:

> „Die k^{te} Ueberschiebung von f über φ wird erhalten, wenn man in der k^{ten} Polare von f y_1 durch b_2 und y_2 durch $-b_1$ ersetzt, und die entsprechende $(n-k)^{\text{te}}$ Potenz des Symbols b_x von φ als Factor hinzufügt."

36. *Beispiele von simultanen Co- und Invarianten.* Ich will nun eine Reihe von Ueberschiebungen wirklich bilden. Wie schon erwähnt, erhält man die simultane bilineare Invariante zweier Formen gleichen Grades unmittelbar durch die Relation (II).

Ist z. B. $\quad f = a_x^2 = \bar{a}_0 x_1^2 + 2\bar{a}_1 x_1 x_2 + \bar{a}_2 x_2^2$

$$\varphi = b_x^2 = \bar{b}_0 x_1^2 + 2\bar{b}_1 x_1 x_2 + \bar{b}_2 x_2^2,$$

so ist $\quad (f, \varphi)^2 = (a_y^2, b_y^2)^2 = (ab)^2 = \bar{a}_0 \bar{b}_2 - 2\bar{a}_1 \bar{b}_1 + \bar{a}_2 \bar{b}_0. \qquad (1)$

Ebenso ist, wenn $f = a_x^3$ und $\varphi = b_x^3$:

$$(ab)^3 = \bar{a}_0 \bar{b}_3 - 3\bar{a}_1 \bar{b}_2 + 3\bar{a}_2 \bar{b}_1 - \bar{a}_3 \bar{b}_0. \qquad (2)$$

Berechnen wir auch die zweite Ueberschiebung der beiden Formen f und φ. Die zweite Polare von f ist unsymbolisch

$$f_{y^2} = a_y^2 a_x = (\bar{a}_0 x_1 + \bar{a}_1 x_2) y_1^2 + 2(\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2) y_1 y_2 + (\bar{a}_2 x_1 + \bar{a}_3 x_3) y_2^2.$$

Ersetzt man hierin

$$y_1 \text{ durch } b_2$$
$$y_2 \text{ durch } -b_1$$

und multiplicirt mit b_x, so erhält man

$$(ab)^2 a_x b_x = (\bar{a}_0 x_1 + \bar{a}_1 x_2) b_2^2 b_x - 2(\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2) b_1 b_2 b_x + (\bar{a}_2 x_1 + \bar{a}_3 x_3) b_1^2 b_x,$$

oder, wenn man b_x durch $b_1 x_1 + b_2 x_2$ ersetzt:

$$(ab)^2 a_x b_x = (\bar{a}_0 x_1 + \bar{a}_1 x_2)(b_1 b_2^2 x_1 + b_2^3 x_2) - 2(\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2)(b_1^2 b_2 x_1 + b_1 b_2^2 x_2)$$
$$+ (\bar{a}_2 x_1 + \bar{a}_3 x_2)(b_1^3 x_1 + b_1^2 b_2 x_2).$$

Führt man hier für die symbolischen Coefficienten b_1^3, b_1^2, b_2 etc. die wirklichen ein und ordnet nach den Potenzen der Variabeln x, so kommt:

*) Die Gleichung (III) lehrt, dass $(f, \varphi)^k = 0$ eine lineare Differentialgleichung zur Bestimmung der Form φ ist, sobald f als bekannt angenommen wird.

$$(ab)^2 a_x b_x = (\bar{a}_0\bar{b}_2 - 2\bar{a}_1\bar{b}_1 + \bar{a}_2\bar{b}_0)x_1^2 - (\bar{a}_1\bar{b}_2 + \bar{a}_2\bar{b}_1 - \bar{a}_0\bar{b}_3 + \bar{a}_3\bar{b}_0)x_1x_2$$
$$+ (\bar{a}_1\bar{b}_3 - 2\bar{a}_2\bar{b}_2 + \bar{a}_3\bar{b}_1)x_2^2. \tag{3}$$

37. *Beispiele von Co- und Invarianten einer Form.* Bei der Darstellung des Ueberschiebungsprocesses waren f und φ beliebige Formen. Wir können nun als Form φ die Form f selbst wieder wählen und erhalten auf diese Weise Co- und Invarianten einer einzigen Form, durch Ueberschiebung derselben über sich selbst.

So liefert das Beispiel (2) in Nr. 36 für die cubische Form

$$f = a_x^3 = b_x^3$$

$$(ab)^3 = \bar{a}_0\bar{a}_3 - 3\bar{a}_1\bar{a}_2 + 3\bar{a}_2\bar{a}_1 - \bar{a}_3\bar{a}_0 = 0,$$

d. h. die dritte Ueberschiebung von f über sich selbst verschwindet, was a priori aus dem symbolischen Product $(ab)^3$ hervorgeht. (Vergleiche Nr. 8.)

Ebenso wird nach Beispiel (3) Nr. 36

$$(ab)^2 a_x b_x = 2\left[(\bar{a}_0\bar{a}_2 - \bar{a}_1^2)x_1^2 + (\bar{a}_0\bar{a}_3 - \bar{a}_1\bar{a}_2)x_1x_2 + (\bar{a}_1\bar{a}_3 - \bar{a}_2^2)x_2^2\right]. \tag{4}$$

Bezeichnet man diese Covariante von f mit Δ_x^2, also ihre Coefficienten mit $\bar{\Delta}_0$, $\bar{\Delta}_1$, $\bar{\Delta}_2$, so kann man von ihr selbst einmal die erste Ueberschiebung über f, dann die zweite über sich selbst auf folgende Weise bilden. Es ist:

$$(f, \Delta) = (a\Delta)a_x^2\Delta_x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \Delta}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \Delta}{\partial x_1}\right\}.$$

Man erhält somit

$$(a\Delta)a_x^2\Delta_x = (\bar{a}_0x_1^2 + 2\bar{a}_1x_1x_2 + \bar{a}_2x_2^2)\Delta_2\Delta_x - (\bar{a}_1x_1^2 + 2\bar{a}_2x_1x_2 + \bar{a}_3x_2^2)\Delta_1\Delta_x$$
$$= (\bar{a}_0x_1^2 + 2\bar{a}_1x_1x_2 + \bar{a}_2x_2^2)(\bar{\Delta}_1x_1 + \bar{\Delta}_2x_2)$$
$$- (\bar{a}_1x_1^2 + 2\bar{a}_2x_2 + \bar{a}_3x_2^2)(\bar{\Delta}_0x_1 + \bar{\Delta}_1x_2).$$

Ersetzt man hierin die Coefficienten von Δ durch ihre Werthe, also:

$$\bar{\Delta}_0 \text{ durch } 2(\bar{a}_0\bar{a}_2 - \bar{a}_1^2)$$
$$\bar{\Delta}_1 \text{ durch } (\bar{a}_0\bar{a}_3 - \bar{a}_1\bar{a}_2)$$
$$\bar{\Delta}_2 \text{ durch } 2(\bar{a}_1\bar{a}_3 - \bar{a}_2^2),$$

und ordnet nach fallenden Potenzen von x_1, so erhält man :

$$(a\Delta)a_x^2\Delta_x = (\bar{a}_0^2\bar{a}_3 - 3\bar{a}_0\bar{a}_1\bar{a}_2 + 2\bar{a}_1^3)x_1^3 + 3(\bar{a}_0\bar{a}_1\bar{a}_3 - 2\bar{a}_0\bar{a}_2^2 + \bar{a}_1^2\bar{a}_2)x_1^2x_2$$
$$- 3(\bar{a}_0\bar{a}_2\bar{a}_3 - 2\bar{a}_1^2\bar{a}_3 + \bar{a}_1\bar{a}_2^2)x_1x_2^2 - (\bar{a}_0\bar{a}_3^2 - 3\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3 + 2\bar{a}_2^3)x_2^3. \tag{5}$$

Endlich liefert die zweite Ueberschiebung der quadratischen Form Δ über sich selbst

$$(\varDelta, \varDelta)^2 = (\varDelta \varDelta^{(1)})^2 = (\varDelta_1^2 \varDelta_2^{(1)2} - 2\varDelta_1 \varDelta_2^{(1)} \varDelta_2 \varDelta_1^{(1)} + \varDelta_2^2 \varDelta_1^{(1)2}) = 2(\bar{\varDelta}_0 \bar{\varDelta}_2 - \bar{\varDelta}_1^2)$$

$$= 2\left\{4(\bar{a}_0 \bar{a}_2 - \bar{a}_1^2)(\bar{a}_1 \bar{a}_3 - \bar{a}_2^2) - (\bar{a}_0 \bar{a}_3 - \bar{a}_1 \bar{a}_2)^2\right\},$$

oder

$$(\varDelta, \varDelta)^2 = 2\left\{6a_0 a_1 a_2 a_3 - 4a_2^3 a_0 - 4a_1^3 a_3 + 3a_1^2 a_2^2 - a_0^2 a_3^2\right\}. \tag{6}$$

Wir haben somit durch einfache Ueberschiebungsprocesse eine Invariante 4ten Grades in den Coefficienten, eine Covariante 3ten Grades in Coefficienten und Variabeln, und ferner eine Covariante 2ten Grades der cubischen Form f kennen gelernt. Wir werden später sehen, dass diese drei Formen überhaupt die einzigen selbstständigen Covarianten von f sind, d. h. dass sich alle übrigen rational und ganz durch f und diese drei ausdrücken lassen.

38. *Ueberschiebungen von Producten von Formen.* Wir gehen nun zum complicirteren Falle des Ueberschiebungsprocesses über, in welchem jede der beiden Formen, die zur Ueberschiebung gelangen sollen, ein Product einfacher Formen ist. Die Ueberschiebung ist dann nicht mehr wie im vorigen Falle durch ein einziges symbolisches Product dargestellt, sondern durch eine ganze Reihe derselben, die wir nunmehr ermitteln wollen.

Sei F das Product der Formen

$$f_1 = a_x^m, \quad f_2 = b_x^n, \cdots f_k = k_x^p;$$

ferner Φ das Product der Formen

$$\varphi_1 = \alpha_x^\mu, \quad \varphi_2 = \beta_x^\nu, \cdots \varphi_x = x_x^\pi.$$

Für die linearen symbolischen Factoren der Formen f_i führen wir der Reihe nach die Factoren r_{ix} ein; ihre Anzahl s ist also gleich der Summe der Grade aller Formen, also

$$s = m + n + \cdots + p.$$

Die linearen Factoren der Formen φ ersetzen wir ebenso durch die Factoren ϱ_{ix}; die Anzahl σ derselben ist dann

$$\sigma = \mu + \nu + \cdots + \pi.$$

Die k^{te} Ueberschiebung der beiden Formen F und Φ wird dann erhalten, wenn wir das Product

$$\Pi = r_{1x} r_{2x} \cdots r_{sx} \cdot \varrho_{1x} \varrho_{2x} \cdots \varrho_{\sigma x}$$

auf alle möglichen Arten in der Weise $k$mal falten, dass immer andere Variationen von je k Factoren r_{ix} mit immer neuen Variationen k Factoren $\varrho_{\lambda x}$ zu k Klammerfactoren vereinigt werden. Die Summe aller so entstehenden symbolischen Producte dividirt durch ihre Anzahl gibt die Ueberschiebung von F über Φ. Diese Anzahl ist daher

gleich dem Producte der Anzahl der Variationen von s Elementen zur k^{ten} Klasse in die Anzahl der Variationen von σ Elementen zur k^{ten} Klasse. Es ist also die Ueberschiebung definirt durch die Gleichung:

$$(F, \Phi)^k = \frac{(s-k)!}{s!} \cdot \frac{(\sigma-k)!}{\sigma!}$$

$$\cdot \sum (r_{i_1} \varrho_{\lambda_1})(r_{i_2} \varrho_{\lambda_2}) \cdots (r_{i_k} \varrho_{\lambda_k}) r_{i_{k+1} x} \cdots r_{i_s x} \cdot \varrho_{\lambda_{k+1} x} \cdots \varrho_{\lambda_\sigma x}. \quad \text{(I)}$$

Ersetzt man in dieser Summe

$$\begin{array}{ll} r_{1x}, r_{2x}, \cdots r_{mx} & \text{durch } a_x \\ r_{m+1,x}, \quad \cdots r_{m+n,x} & \text{durch } b_x \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \varrho_{1x}, \varrho_{2x}, \cdots \varrho_{\mu x} & \text{durch } \alpha_x \\ \varrho_{\mu+1,x}, \quad \cdots \varrho_{\mu+\nu,x} & \text{durch } \beta_x, \text{ etc.} \end{array}$$

und fasst alle gleichen Glieder zusammen, so erhält man die Ueberschiebung ausgedrückt durch die ursprünglichen Symbole von F und Φ. Die Summe aller Coefficienten dieser Summe ist gleich Eins, wie aus der Definition der Ueberschiebung direct hervorgeht. (Vergl. auch Nr. 32.)

Anmerkung. Es mag noch bemerkt werden, dass bei wirklicher Berechnung solcher Ueberschiebungen nicht jede Variation der Elemente r_k mit jeder Variation der Elemente ϱ_k verbunden zu werden braucht. Es genügt vielmehr, jede Combination von k Factoren r_{kx} mit jeder Variation von k Factoren ϱ_{kx} zu falten, da bereits hierdurch alle möglichen Arten von wirklich verschiedenen Verbindungen geliefert werden. Die Zahl der Glieder ist alsdann gleich der oben erwähnten dividirt durch $k!$. Wenn ich in der oben gegebenen Entwicklung mehr Faltungen als nöthig vornahm, so geschah das einmal um die Symmetrie nicht zu verletzen, und anderntheils um die Uebereinstimmung des numerischen Coefficienten $\frac{(s-k)!}{s!} \frac{(\sigma-k)!}{\sigma!}$ mit dem Nr. 35 (III) gegebenen hervorzuheben.

39. *Beispiel* 1. Ich will diese Darstellung des Ueberschiebungsprocesses an einem einfachen Beispiele deduciren, das bereits in Nr. 37 behandelt wurde. Wir hatten dort die zweite Ueberschiebung der quadratischen Covariante einer cubischen Form über sich selbst berechnet, und zu dem Zwecke für dieselbe das neue Symbol Δ eingeführt. Bilden wir nun direct die zweite Ueberschiebung dieser Form

$$\Delta = (ab)^2 a_x b_x = (cd)^2 c_x d_x = \text{etc.}$$

über sich selbst, so kommt nach den vorhergehenden Entwicklungen

$$\left((ab)^2 a_x b_x,\ (cd)^2 c_x d_x\right)^2 = (ab)^2 (cd)^2 (a_x b_x,\ c_x d_x)^2$$

$$= \frac{1}{2} \left\{(ab)^2 (cd)^2 (ac)(bd) + (ab)^2 (cd)^2 (ad)(bc)\right\}.$$

Beide Glieder sind einander gleich; denn sie gehen in einander über durch Vertauschung der gleichwerthigen Symbole a und b, oder c und d. Ihre Summe kann also durch das doppelte erste Glied ersetzt werden und somit ist diese Invariante $(\varDelta, \varDelta)^2$ auch dargestellt durch

$$(\varDelta, \varDelta)^2 = (ab)^2(cd)^2(ac)(bd) = (ab)^2(cd)^2(ad)(bc).$$

Beispiel 2. Wir stellen uns ferner die Aufgabe, eine durch ein symbolisches Product dargestellte Covariante oder Invariante einer Form f in den Wurzeldifferenzen dieser Form zu berechnen. Die Methode will ich an einem Beispiel entwickeln. Es sei gegeben die Form $f = a_x^4$; sie besitzt eine Invariante $i = (ab)^4$. Um sie in den Wurzeln α_1, α_2, α_3, α_4 von f darzustellen, bilden wir zunächst diese Invariante durch vierte Ueberschiebung von a_x^4 mit:

$$f = \alpha_{1x}\ \alpha_{2x}\ \alpha_{3x}\ \alpha_{4x}$$

und erhalten nach Nr. 38 (I):

$$i = (ab)^4 = (a\alpha_1)(a\alpha_2)(a\alpha_3)(a\alpha_4); \tag{1}$$

auf diese Weise ist bereits ein Symbol b durch die Wurzeln $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ ersetzt. Es handelt sich also noch darum, auch für das Symbol a die Wurzeln α_i einzuführen. Wir ersetzen zu dem Zwecke in (1) a durch z und überschieben die Polare $b_z^4 = \alpha_{1z}\ \alpha_{2z}\ \alpha_{3z}\ \alpha_{4z}$ viermal über die Polare $a_z^4 = \alpha_{1z}\, \alpha_{2z}\, \alpha_{3z}\, \alpha_{4z}$. · So erhalten wir nach Nr. 38 (I) und Anmerkung:

$$(a_z^4, b_z^4)^4 = (ab)^4 = (\alpha_{1z} \cdot \alpha_{2z} \cdot \alpha_{3z} \cdot \alpha_{4z},\ \alpha_{1z}\alpha_{2z}\alpha_{3z}\alpha_{4z})^4$$
$$= \frac{1}{4!} \sum (\alpha_{i_1}\alpha_1)(\alpha_{i_2}\alpha_2)(\alpha_{i_3}\alpha_3)(\alpha_{i_4}\alpha_4),$$

oder mit Vernachlässigung jener Glieder der Summe, welche wegen Factoren $(\alpha_{i_1}\, \alpha_{i_1}) = 0$ identisch verschwinden:

$$(ab)^4 = i = \frac{1}{4!}\left\{(\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4) + (\alpha_1\alpha_3)(\alpha_2\alpha_4) + (\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2\alpha_3)\right\}^2.$$

Ganz in derselben Weise verfährt man auch allgemein. Man ersetzt zunächst ein Symbol der Covariante durch y, und bildet die n^{te} Ueberschiebung dieser Polare mit der Polare $f_{y^n} = \alpha_{1y}\, \alpha_{2y} \cdots \alpha_{ny}$. So erhält man ein Aggregat von Gliedern, welche ein Symbol weniger enthalten. In jedem dieser Glieder ersetzt man wiederum ein Symbol durch z, und überschiebt dasselbe abermals n mal über $f_{z^n} = \alpha_{1z}\, \alpha_{2z} \cdots \alpha_{nz}$ etc. Dadurch ist die Zahl der Symbole um 2 reducirt, und so setzt man den Process fort.

40. *Darstellung der Ueberschiebung durch Ueberschiebung von Polaren. Erster Fall.* Bei Berechnung einer Ueberschiebung, welche an zwei Producten von Formen ausgeführt werden soll, kann man sich nun

aber auch wieder des bereits in Nr. 34 bewiesenen Satzes bedienen. Die Sätze über Eigenschaften der Polaren lassen sich alsdann auf die Ueberschiebung übertragen. Ich will mich indess bei den folgenden Entwicklungen auf den Fall beschränken, in dem F und Φ nur als Producte von je zwei Formen vorausgesetzt werden, da die Verallgemeinerung nur eine öftere Anwendung der Operationen des speciellen Falles erheischt, und keine neuen Ueberlegungen nöthig macht. Ueberdies sei zunächst vorausgesetzt, dass der Grad der beiden Producte in x gleich dem Grade k der Ueberschiebung sei, dass also, wenn

$$F = f \cdot \varphi = a_x^m \cdot b_x^n$$

$$\Phi = \psi \cdot \chi = \alpha_x^\mu \cdot \beta_x^\nu$$

für den Exponenten der Ueberschiebung

$$U = (F, \Phi)^k$$

die Beziehung bestehe

$$k = m + n = \mu + \nu.$$

Unter dieser Voraussetzung besteht nun aber die k^{te} Polare von F aus dem einzigen Gliede

$$F_{y^k} = a_y^m \cdot b_y^n$$

und ebenso

$$\Phi_{y^k} = \alpha_y^\mu \cdot \beta_y^\nu.$$

Faltet man das Product $F_{y^k} \cdot \Phi_{y^k}$ auf alle möglichen Arten, etwa indem man die linearen Factoren der einen Polare einen Moment durch r_{ix}, die der andern durch ϱ_{kx} ersetzt und nun die einzige Combination der r_{ix} mit allen Permutationen der ϱ_{ix} durch Faltung verbindet, so bildet die Summe aller dieser Glieder, dividirt durch ihre Anzahl, die k^{te} Ueberschiebung von F über Φ. Ersetzt man wieder r_{ix} und ϱ_{ix} in geeigneter Weise durch die ursprünglichen Factoren a_x b_x α_x β_x, fasst hierauf alle gleichen Glieder zu einem einzigen Gliede L_s zusammen, so ist die Ueberschiebung dargestellt durch

$$(F, \Phi)^k = \sum q_s L_s,$$

wo L_s von der Form $(a\alpha)^{\nu_1} (b\beta)^{\nu_2} (a\beta)^{\nu_3} (b\beta)^{\nu_4}$, $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = k$, und q_s constante Coefficienten sind, deren Summe gleich Eins ist.

41. *Zweiter Fall.* Ist nun der Grad des Productes F, und der des Productes Φ grösser als der der Ueberschiebung, oder höchstens eines der beiden Producte von gleichem Grade wie die Ueberschiebung, so ist die k^{te} Polare von F (vergl. Nr. 22)

$$F_{y^k} = \binom{m}{0}\binom{n}{k} a_x^m b_x^{n-k} b_y^k + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} a_x^{m-1} a_y b_x^{n-k+1} b_y^{k-1} + \cdots = \sum c_i G_i$$

und ebenso

$$\Phi_{y^k} = \binom{\mu}{0}\binom{\nu}{k} \alpha_x^\mu \beta_x^{\nu-k} \beta_y^k + \binom{\mu}{1}\binom{\nu}{k-1} \alpha_x^{\mu-1} \alpha_y \beta_x^{\nu-k+1} \beta_y + \cdots = \sum p_\varrho H_\varrho .$$

Die Ueberschiebung erhält man, indem man das Product

$$F_{y^k} \cdot \Phi_{y^k} = \sum c_i G_i \cdot \sum p_\varrho H_\varrho$$

auf alle möglichen Arten nach den in y linearen Factoren faltet. Sie ist also dargestellt durch die Summe

$$(F, \Phi)^k = \sum \sum c_i \cdot p_\varrho (G_i, H_\varrho)^k, \tag{I}$$

wo nun das Glied $(G_i, H_\varrho)^k$ entsteht, indem man auf irgend zwei Glieder der k^{ten} Polaren $k$mal den Faltungsprocess anwendet. Die Ueberschiebung der beiden Formen F und Φ ist also zurückgeführt auf eine Summe von Ueberschiebungen solcher Formen G_i und H_ϱ, deren Grad in y genau mit dem Grade der Ueberschiebung übereinstimmt. Jede solche Ueberschiebung ist nach Nr. 40 dargestellt durch

$$(G_i, H_\varrho)^k = \sum q_s L_s .$$

Trägt man also dieselben in (I) ein, so erhält man:

$$(F, \Phi)^k = \sum \sum c_i p_\varrho \sum q_s L_s = \sum \sum \sum c_i p_\varrho q_s L_s$$
$$= \sum \lambda_{i\varrho s} (a\alpha)^{\nu_1} (b\beta)^{\nu_2} (a\beta)^{\nu_3} (b\beta)^{\nu_4} a_x^{m-(\nu_1+\nu_3)} b_x^{n-(\nu_2+\nu_4)} \alpha_x^{\mu-(\nu_1+\nu_3)} \beta_x^{\nu-(\nu_2+\nu_4)} .$$

Hierbei ist die Summe der Coefficienten $\lambda_{i\varrho s}$ gleich Eins. Denn es ist

$$\left.\begin{aligned} \sum c_i &= 1 \\ \sum p_\varrho &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ nach Nr. 23}$$

und ebenso

$$\sum q_s = 1 \quad \text{nach Nr. 40,}$$

folglich auch

$$\sum c_i \cdot \sum p_\varrho \cdot \sum q_s = \sum \lambda_{i\varrho s} = 1.$$

42. *Benachbarte Glieder einer Ueberschiebung.* Wie bei den Polaren so spricht man auch hier von benachbarten Gliedern. Doch ist die Mannigfaltigkeit der Nachbarschaft nun eine grössere geworden. So können zwei Glieder benachbart sein, wenn in dem einen an Stelle von

$$a_x (b\alpha) \quad \text{sich befindet} \quad b_x (a\alpha), \tag{1}$$

oder an Stelle von

$$\alpha_x (a\beta) \quad \text{sich befindet} \quad \beta_x (a\alpha), \tag{2}$$

während alle übrigen Factoren übereinstimmen. Im ersten Falle hat die Differenz der betreffenden Glieder den Factor

$$a_x(b\alpha) - b_x(a\alpha) = a_x(ab),$$

im zweiten Falle den Factor

$$\alpha_x(a\beta) - \beta_x(a\alpha) = a_x(\alpha\beta),$$

wie aus dem Identitätssatz Nr. 11 hervorgeht.

Die Differenz zweier in dieser Weise benachbarter Glieder hat demnach immer einen der beiden Factoren

$$(ab) \quad \text{oder} \quad (\alpha\beta).$$

Die Nachbarschaft zweier Glieder kann aber auch lediglich durch Klammerfactoren bedingt sein. Es kann die Stelle von

$$(a\alpha)(b\beta) \quad \text{das Product} \quad (a\beta)(b\alpha) \tag{3}$$

einnehmen; dann hat nach dem Identitätssatze die Differenz dieser beiden Glieder

$$G_1 - G_2 = \bar{G}\,\{(a\alpha)(b\beta) - (a\beta)(b\alpha)\}$$
$$= \bar{G}\,(ab)(\alpha\beta)$$

den Factor $(ab)(\alpha\beta)$.

„Diese Differenzen haben also in allen drei Fällen mindestens einen Klammerfactor, der durch Faltung zwischen Formen F allein, oder Φ allein entsteht, und nicht durch gegenseitige Faltung von F mit Φ.“

So ist z. B. in der schon mehrfach berechneten Ueberschiebung

$$U = \left((ab)^2 a_x b_x,\ (cd)^2 c_x d_x\right)^2$$
$$= \frac{(ab)^2(cd)^2}{2}\left\{(ac)(bd) + (ad)(bc)\right\}$$

die Differenz der beiden Glieder dargestellt durch

$$G_1 - G_2 = (ab)^2(cd)^2\{(ac)(bd) - (ad)(bc)\}$$
$$= (ab)^3(cd)^3.$$

Die rechte Seite verschwindet aus bekannten Gründen, wenn a, b, c, d Symbole der cubischen Form $f = a_x^3$ sind. Dann ist also

$$G_1 = G_2,$$

folglich

$$U = \frac{1}{2}\cdot 2\,G_1 = (ab)^2(cd)^2(ac)(bd),$$

was wir schon auf anderem Wege gezeigt haben. (Vergl. Nr. 39.)

Die eben besprochene Eigenschaft der Differenz benachbarter Glieder kann man auch für die Differenz zweier beliebiger Glieder L_i und L_p nachweisen. Denn es ist

$$L_i - L_p = (L_i - L_{i+1}) + (L_{i+1} - L_{i+2}) + \cdots + (L_{p-1} - L_p).$$

Jede Differenz rechts besitzt den Factor (ab) oder $(\alpha\beta)$, also ist die Differenz links durch ein Aggregat von Gliedern darstellbar, welche entweder den Factor (ab) oder den Factor $(\alpha\beta)$ oder beide besitzen.

43. *Anwendungen.* Man kann von diesen Sätzen interessante Anwendungen machen, die für uns in der Folge von Wichtigkeit sein werden. Denken wir uns eine Covariante A_i der Form $f_n = a_x^n$, so können wir uns genau dieselbe Covariante B_i der Form $\varphi = \alpha_x^m$ bilden, wenn $m \geqq n$, indem wir an der Potenz φ^ϱ die nämlichen Faltungen vornehmen, die wir an f^ϱ machten, um die Form A_i zu erhalten. Nennen wir der Einfachheit halber A_i des Modell, B_i das Bild. Ist insbesondere

$$\varphi = (ab)^{2\mu} a_x^{n-\mu} b_x^{n-\mu} = (aa_1)^{2\mu} a_x^{n-\mu} a_{1x}^{n-\mu},$$

also eine gerade Ueberschiebung der Form f über sich selbst, so können wir mit Hilfe der Eigenschaft benachbarter Glieder für Bilder B_i, welche aus dieser Form nach den Modellen A_i gestaltet werden, eine Reihe von Sätzen ableiten.

In diesem Falle nämlich kann man aus der Potenz

$$\varphi^\varrho = (aa_1)^{2\mu} a_x^{n-\mu} a_{1x}^{n-\mu} \cdot (bb_1)^{2\mu} b_x^{n-\mu} b_{1x}^{n-\mu} \cdots (rr_1)^{2\mu} r_x^{n-\mu} r_{1x}^{n-\mu}$$

eine Menge Bilder B_i nach dem Modelle A_i herstellen, je nachdem man die durch A_i dictirten Faltungen der Potenz

$$f^\varrho = a_x^n \cdot b_x^n \cdot c_x^n \cdots r_x^n$$

in φ^ϱ ausführt, d. h. je nachdem man in φ^ϱ die entsprechenden Faltungen an $a_x^{n-\mu} b_x^{n-\mu}$, oder an $a_x^{n-\mu} b_{1x}^{n-\mu}$, oder an $a_{1x}^{n-\mu} b_x^{n-\mu}$, oder endlich an $a_{1x}^{n-\mu} b_{1x}^{n-\mu}$ vornimmt.

Wir nennen dann wieder zwei Bilder B_i und B_i' **benachbarte** Bilder, wenn sie dadurch aus einander hervorgehen, dass man in zwei symbolischen Factoren derselben a mit a_1 vertauscht. Ihre Differenz hat dann immer um einen Factor $(aa_1) = (bb_1) = (cc_1)$ mehr als das einzelne Bild.

Ist z. B.

$$B_i = (ab)(a_1b_1)G_i$$
$$B_i' = (a_1b)(ab_1)G_i,$$

dann ist:

$$B_i - B_i' = G_i\{(ab)(a_1b_1) - (a_1b)(ab_1)\}$$
$$= G_i(aa_1)(bb_1);$$

oder ist:

$$B_i = a_x(a_1b)G_i$$
$$B_i' = a_{1x}(ab)G_i,$$

so ist

$$B_i - B_i' = G_i\{a_x(a_1b) - a_{1x}(ab)\} = G_i(aa_1)b_x.$$

Genau wie vorhin erkennt man daher, dass auch die Differenz zwei beliebiger Bilder B_i und $\overline{B}_i$ sich durch ein Aggregat von Gliedern darstellen lässt, deren jedes einen Factor (aa_1) mehr besitzt als das einzelne Bild. Da nun ein Bild mindestens $(aa_1)^{2\mu}$ bereits zum Factor hat, so erkennt man die Richtigkeit der Behauptung:

„Die Differenz zweier Bilder B_i ist gleich einem Aggregat von Gliedern, welche den Klammerfactor $(ab)^{2\mu+1}$ oder wegen Nr. 12 $(ab)^{2\mu+2}$ besitzen.“

Man kann auch sagen:

„Die Differenz zweier Bilder ist null, bis auf Glieder mit dem Factor $(ab)^{2\mu+2}$.“

Wir werden einen derartigen aus Klammerfactoren zusammengesetzten charakteristischen Factor Modul nennen, und demnach diesen Satz in die algebraische Form kleiden:

$$\overline{B}_i - B_i \equiv 0 \bmod (ab)^{2\mu+2}. \tag{1}$$

Hat man nun drei symbolische Producte A, so dass

$$A_1 = a_x(bc)\psi$$
$$A_2 = b_x(ca)\psi$$
$$A_3 = c_x(ab)\psi,$$

dann verschwindet wegen des Identitätssatzes ihre Summe identisch. Das Gleiche gilt für die erste Gattung der oben erwähnten vier Bilder,

$$B_1 = a_x(bc)\psi'$$
$$B_2 = b_x(ca)\psi'$$
$$B_3 = c_x(ab)\psi',$$

die ja neben andern Klammerfactoren genau dieselben enthalten wie die Modelle A_i.

Nimmt man demnach drei beliebige Bilder $\overline{B}_1\ \overline{B}_2\ \overline{B}_3$, so ist wegen Gleichung (1)

$$\sum_1^3 \overline{B}_i - \sum_1^3 B_i \equiv 0 \bmod (ab)^{2\mu+2},$$

weil aber $\sum B_i = 0$, so erhält man

$$\sum_1^3 \overline{B}_i \equiv 0 \bmod (ab)^{2\mu+2}. \tag{2}$$

Dieses Resultat lässt uns aber einen sehr wichtigen Satz beweisen:

„Ist $F(A_i)$ eine ganze Function von symbolischen Producten A_i der Art, dass weder ihre Glieder einzeln null sind, noch

sich gegenseitig aufheben; so ist, wenn diese Function F gleichwohl identisch verschwindet, die entsprechende Function von Bildern, also von symbolischen Producten B_i der Form $\varphi = (f, f)^{2\mu}$

$$F(\bar{B}_i) \equiv 0 \bmod (ab)^{2\mu+2}."$$

Denn man kann setzen (vergl. § 1 Nr. 12, und § 10 Nr. 117)

$$F(A_i) = 0 = \sum \left\{ (bc)\, a_x + (ca)\, b_x + (ab)\, c_x \right\} \varphi$$

und demnach für die genau entsprechenden Bilder (erster Gattung)

$$F(B_i) = \sum \left\{ (bc)\, a_x + (ca)\, b_x + (ab)\, c_x \right\} \varphi' = 0.$$

Sind alsdann $\bar{B}_i$ beliebige Bilder, so ist

$$F(\bar{B}_i) - F(B_i) \equiv 0 \bmod (ab)^{2\mu+2};$$

also weil der Subtrahend links verschwindet

$$F(\bar{B}_i) \equiv 0 \bmod (ab)^{2\mu+2}. \qquad (3)$$

Wir werden später von diesem Satze eine hervorragende Anwendung machen.

44. *Differenz der Ueberschiebung selbst mit einem ihrer Glieder.* Die Eigenschaft, die wir für die Differenz zweier beliebiger Glieder einer Ueberschiebung nachgewiesen haben, besitzt auch die Differenz zwischen einem Gliede und der ganzen Ueberschiebung. Denn da in der Ueberschiebung die Summe aller Coefficienten Eins ist, so folgt durch Subtraction der beiden Gleichungen

$$U = \sum \lambda_{i\varrho s} L_s$$

$$L_q = L_q \sum \lambda_{i\varrho s}$$

die Gleichung

$$L_q = U + \sum_{i,\varrho,s} \lambda_{i\varrho s} (L_q - L_s)$$

oder, wenn wir links in den Differenzen die Factoren (ab) resp. $(\alpha\beta)$ absondern:

$$L_q = U + (ab)^{\varepsilon_1} (\alpha\beta)^{\varepsilon_2} \sum \lambda_{i\varrho s} P_s, \; (\varepsilon_1 \text{ u. } \varepsilon_2 = 0 \text{ oder } 1)\; \varepsilon_1 \gtrless \varepsilon_2 = 0. \quad \text{(I)}$$

Nun sind die symbolischen Producte $(ab)^{\varepsilon_1} (\alpha\beta)^{\varepsilon_2} P_s$ Glieder, welche irgend einen Klammerfactor, wie ihn die Ueberschiebung U involviren würde, weniger besitzen, dafür aber mindestens einen mehr, welcher dieser Ueberschiebung U fremd ist, insofern er nur durch Faltung der Formen von F unter sich, oder der Formen Φ unter sich entstehen kann. Daraus lernen wir zweierlei: Erstens, diese Glieder in den

Summen rechts gehören Ueberschiebungen an, die einen um mindestens Eine Einheit niedrigeren Grad $k - 1$ haben als die Ueberschiebung U; zweitens, diese Ueberschiebungen beziehen sich auf Formen niedrigeren Grades, welche, sei es aus F oder sei es aus Φ, durch Faltung entstanden sind.

Wir gewinnen also zunächst den Satz:

„Jedes Glied einer Ueberschiebung lässt sich darstellen durch die Ueberschiebung selbst plus einer Summe von Gliedern, welche niedrigeren Ueberschiebungen von Formen niedrigeren Grades angehören.“

Ersetzen wir nun vermöge dieses Satzes abermals die Glieder

$$(ab)^{\varepsilon_1}(\alpha\beta)^{\varepsilon_2} P_i$$

durch ihre Ueberschiebungen und fahren in diesem Processe so lange fort, bis wir zu nullten Ueberschiebungen von Formen gelangen, die aus F oder Φ durch vielfache Faltung entstanden sind, so werden wir endlich zu dem Satze geführt:

„Jedes Glied einer Ueberschiebung lässt sich darstellen durch eine Summe von Ueberschiebungen,“

oder

$$L = U + \sum c_i^{(1)} U_i^{(1)} + \sum c_i^{(2)} U_i^{(2)} + \cdots + \sum c_i^{(k)} U_i^{(k)}. \qquad \text{(II)}$$

Dabei sind die Grössen $c_i^{(\varrho)}$ Constante, die Grössen $U_i^{(\varrho)}$ der Reihe nach Ueberschiebungen $(k-1)^{\text{ten}}$, $(k-2)^{\text{ten}}$ bis nullten Grades von Formen, die aus F oder Φ durch einmalige, zweimalige resp. $k$malige Faltung entstanden sind.

Diese beiden Sätze (I) und (II) entsprechen den analogen Sätzen (I) und (II) Nr. 25 über Polaren.

45. *Jedes symbolische Product lässt sich auf eine Summe einfacher Ueberschiebungen zweier Formen reduciren.* Der letzte Satz kann noch erweitert werden, indem wir ihn auf ein beliebiges symbolisches Product, ohne Rücksicht darauf, ob ihm die Bedeutung einer wirklichen binären Form zukommt oder nicht, ausdehnen. Das Princip, das uns die Darstellung eines solchen symbolischen Productes durch eine Summe von einfachen Ueberschiebungen ermöglicht, liegt in der wiederholten Einführung neuer Symbole, die so lange fortgesetzt wird, bis in jedem Gliede der entstehenden Summe nur mehr zwei Symbole übrig sind. (Vgl. auch Camille Jordan, Liouville Journal, sér. 3, Bd. 2 und 5.) Ich will der Deutlichkeit halber ein Beispiel voraussenden.

Es sei gegeben das symbolische Product:

$$P = (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2 a_x b_x c_x .$$



Halten wir in demselben die beiden Symbole a und b fest, ersetzen dagegen das Symbol c durch eine Variable y, so wird aus P, abgesehen vom Factor (xy), der Ausdruck:

$$G_\varrho = (ab)^2 a_y^2 b_y^2 a_x b_x.$$

Derselbe stellt nichts anderes dar, als ein Glied der vierten Polare einer Form:

$$\alpha_x^6 = (ab)^2 a_x^3 b_x^3.$$

Dieses Glied lässt sich in die Polare $(\alpha_x^6)_{y^4}$ plus einer Summe von Polaren niedrigerer Formen entwickeln, die aus α_x^6 durch Faltung entstehen. Das Resultat der Entwicklung können wir direct aus dem Beispiel Nr. 26 ableiten, indem wir in der Gleichung

$$a_x^2 b_x^2 a_y b_y = F_{y^2} - \frac{2}{5}(xy)\,\Phi_y$$

x mit y vertauschen und mit $(ab)^2$ multipliciren; dies liefert

$$(ab)^2 a_y^2 b_y^2 a_x b_x = (\alpha_x^6)_{y^4} + \frac{2}{5}(xy)(\beta_x^4)_{y^3},$$

wobei mit β_x^4 die Form $(ab)^3 a_x^2 b_x^2$ bezeichnet ist. Ersetzen wir hierin y_1 wieder durch c_2 und y_2 durch $-c_1$ und multipliciren mit dem aus dem unterdrückten Factor (xy) durch diese Substitution wieder hergestellten Factor c_x, so erhalten wir:

$$P = (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2 a_x b_x c_x = (\alpha_x^6, c_x^5)^4 + \frac{2}{5}(\beta_x^4, c_x^5)^3.$$

Das symbolische Product P ist somit durch eine vierte und eine dritte Ueberschiebung dargestellt.

46. *Allgemeine Darstellung.* Um also ein symbolisches Product (mit beliebig vielen Reihen von Symbolen)

$$\begin{array}{l} a,\ b,\ c \ldots \text{etc.} \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \ldots \text{etc.} \\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c} \ldots \text{etc.} \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

durch eine Summe von Ueberschiebungen darzustellen, verfahren wir folgendermassen. Wir halten eine Reihe von Symbolen fest, etwa die Symbole $a, b, c \ldots$ etc., ersetzen alle übrigen durch Variable y, z $u, v \ldots$ etc. und sondern einen Augenblick die dadurch aus Factoren erster Art entstehenden identischen Covarianten $(xy), (xz), (xu), (xv) \ldots$ ab. Der so entstehende Ausdruck ist dann nichts anderes, als ein Polarenglied einer Form, die wir mit f bezeichnen wollen. Dieses Glied lässt sich aber nach Nr. 24 und 31 in eine Reihe von Polaren entwickeln, welche Formen angehören mögen, die wir mit

$$\varphi = A_x^\mu, \quad \psi = B_x^\nu, \quad \chi = C_x^\varrho \ldots \text{etc.}$$

bezeichnen. Ersetzt man nun in dieser Reihe die Formen φ, ψ, χ ... etc. durch das ihnen zugeordnete Symbol A, B, C etc., substituirt sodann für die Variabeln y, z, u ... wieder die ursprünglichen Symbole

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \text{ etc.}$$

und multiplicirt nun mit den vorhin abgesonderten Factoren (xy), (xz) ... d. i. mit:

$$\alpha_x, \beta_x, \gamma_x \ldots$$
$$\mathfrak{a}_x, \mathfrak{b}_x, \mathfrak{c}_x \ldots,$$

so entsteht auf der linken Seite das ursprüngliche Product P. Rechts dagegen erhalten wir eine Summe von symbolischen Producten, deren jedes statt der ganzen Symbolreihe

$$a, b, c, \ldots$$

nur je ein einziges enthält, sei es das Symbol A der Form φ, oder das Symbol B der Form ψ, ... etc. Ein solches Glied enthält also weniger Symbole wie vorher, und wir können nun in jedem derselben, genau auf dieselbe Weise wie in P selbst, die Zahl der Symbole reduciren.

Auf diese Weise gelangen wir schliesslich zu einer Summe von Gliedern, deren jedes nur mehr zwei Symbole enthält. Solche symbolische Producte haben wir aber als einfache Ueberschiebungen definirt, und wir sind somit berechtigt den Satz aufzustellen:

„Jedes symbolische Product lässt sich durch eine Summe von einfachen Ueberschiebungen darstellen."

§ 4. Die einfachsten Ueberschiebungen.

47. *Die Functionaldeterminante.* Unter den Ueberschiebungen haben insbesondere zwei eine hervorragende Bedeutung. Es sind gerade die beiden einfachsten Ueberschiebungen zweier Formen, nämlich die erste und die zweite. Die erste ist bekannt unter dem Namen „Functionaldeterminante" oder auch „Jacobi'sche Determinante" (vergl. Bd. I § 9). Sie ist, wenn

$$f = a_x^m, \quad \varphi = b_x^n$$

die beiden Formen sind, dargestellt durch

$$(f, \varphi) = a_x^{m-1} b_x^{n-1} (ab),$$

und unterscheidet sich von der im ersten Bande § 9 definirten Function nur um den Factor $m \cdot n$. Man erkennt dies unmittelbar aus der unsymbolischen Schreibweise dieser Form (vgl. Nr. 35, III)

$$(f, \varphi) = \begin{vmatrix} f_1, & f_2 \\ \varphi_1, & \varphi_2 \end{vmatrix}, \tag{I}$$

wobei

$$f_i = \frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \varphi_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Diese Determinante lässt sich übrigens, was für die folgenden Betrachtungen bequemer ist, auch als eine dreigliedrige darstellen. Das symbolische Product

$$(ab)\,a_x b_x = (a_1 b_2 - b_1 a_2)(a_1 x_1 + a_2 x_2)(b_1 x_1 + b_2 x_2)$$

hat nämlich, wie die Determinantentheorie lehrt (vergl. Bd. I Nr. 40, Anmerkung), als Determinante geschrieben die Matrix

$$\begin{vmatrix} a_1^2, & a_1 a_2, & a_2^2 \\ b_1^2, & b_1 b_2, & b_2^2 \\ x_2^2, & -x_1 x_2, & x_2^2 \end{vmatrix} = (ab)\,a_x b_x.$$

Multiplicirt man hier die erste Zeile mit a_x^{m-2}, die zweite mit b_x^{n-2} und berücksichtigt, dass

$$\begin{aligned} a_1^2 a_x^{m-2} &= f_{11}, & b_1^2 b_x^{n-2} &= \varphi_{11} \\ a_1 a_2 a_x^{m-2} &= f_{12}, & b_1 b_2 b_x^{n-2} &= \varphi_{12} \\ a_2^2 a_x^{m-2} &= f_{22}, & b_2^2 b_x^{n-2} &= \varphi_{22}, \end{aligned}$$

so erhält man für die Functionaldeterminante die dreigliedrige Determinante:

$$(f, \varphi) = (ab)\,a_x^{m-1} b_x^{n-1} = \begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{22} \\ \varphi_{11}, & \varphi_{12}, & \varphi_{22} \\ x_2^2, & -x_1 x_2, & x_1^2 \end{vmatrix}. \tag{II}$$

48. *Die Functionaldeterminante als Form ungeraden Charakters.* Da die Functionaldeterminante nur einen einzigen Klammerfactor besitzt, so ist sie eine Form ungeraden Charakters (forme gauche). Wir können zeigen, dass ihr Quadrat sich als eine ganze Function von Formen geraden Charakters darstellen lassen muss, eine Eigenschaft, die sie mit allen schiefen Co- und Invarianten theilt. (Vergl. Nr. 8.)

In der That, vertauschen wir in (II) Nr. 47 die erste und letzte Colonne und multipliciren die zweite Colonne mit -2, so erhalten wir

$$+2(f, \varphi) = \begin{vmatrix} f_{22}, & -2f_{12}, & f_{11} \\ \varphi_{22}, & -2\varphi_{12}, & \varphi_{11} \\ x_2^2, & +2x_1 x_2, & x_1^2 \end{vmatrix}.$$

Bilden wir nun das Product dieser Determinante mit der ursprünglichen, so kommt:

$$2(f,\varphi)\cdot(f,\varphi) = \begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{22} \\ \varphi_{11}, & \varphi_{12}, & \varphi_{22} \\ x_1^2, & -x_1x_2, & x_2^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{22}, & -2f_{12}, & f_{11} \\ \varphi_{22}, & -2\varphi_{12}, & \varphi_{11} \\ x_2^2, & 2x_1x_2, & x_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2(f_{11}f_{22} - f_{12}^2), & f_{22}\varphi_{11} - 2f_{12}\varphi_{12} + f_{11}\varphi_{22}, & f \\ f_{22}\varphi_{11} - 2f_{12}\varphi_{12} + f_{11}\varphi_{22}, & 2(\varphi_{22}\varphi_{11} - \varphi_{12}^2), & \varphi \\ f, & \varphi, & 0 \end{vmatrix}.$$

Hierin ist nach Nr. 45, III:

$$\begin{aligned} f_{11}\varphi_{22} - 2f_{12}\varphi_{12} + f_{22}\varphi_{11} &= (f,\varphi)^2 \\ 2(f_{11}f_{22} - f_{12}^2) &= (f,f)^2 \\ 2(\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2) &= (\varphi,\varphi)^2. \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir als Ausdruck für das Quadrat der Functionaldeterminante $J = (f,\varphi)$

$$J^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (f,f)^2, & (f,\varphi)^2, & f \\ (f,\varphi)^2, & (\varphi,\varphi)^2, & \varphi \\ f, & \varphi, & 0 \end{vmatrix}$$

oder

$$J^2 = -\frac{1}{2}\left\{(f,f)^2\cdot\varphi^2 - 2(f,\varphi)^2 f\cdot\varphi + (\varphi,\varphi)^2\cdot f^2\right\}. \qquad \text{(I)}$$

Die Formen f und φ sowohl, als ihre zweiten Ueberschiebungen, sind aber Formen geraden Charakters; denn f und φ haben keine und ihre zweiten Ueberschiebungen haben zwei Klammerfactoren, gehen also bei Transformation bis auf eine gerade Potenz des Moduls Δ in sich selbst über.

Genau in derselben Weise kann man auch das Product zweier verschiedener Functionaldeterminanten darstellen. Man erhält

$$2(f,\varphi)\cdot(\chi,\psi) = \begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{22} \\ \varphi_{11}, & \varphi_{12}, & \varphi_{22} \\ x_1^2, & -x_1x_2, & x_2^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \chi_{22}, & -2\chi_{12}, & \chi_{11} \\ \psi_{22}, & -2\psi_{12}, & \psi_{11} \\ x_2^2, & +2x_1x_2, & x_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (f,\chi)^2, & (\varphi,\chi)^2, & \chi \\ (f,\psi)^2, & (\varphi,\psi)^2, & \psi \\ f, & \varphi, & 0 \end{vmatrix}$$

oder

$$(f,\varphi)\cdot(\chi,\psi) = -\frac{1}{2}\left\{(f,\chi)^2\varphi\cdot\psi - (f,\psi)^2\varphi\cdot\chi - (\varphi,\chi)^2 f\cdot\psi + (\varphi,\psi)^2 f\cdot\chi\right\}. \qquad \text{(II)}$$

49. *Die Functionaldeterminante der zweiten Polaren dreier Formen.* Bildet man von den drei Formen

$$f = a_x^m,\ \ \varphi = b_x^n,\ \ \psi = c_x^p$$

die zweiten Polaren

$$\begin{aligned} f_{y^2} &= f_{11} y_1^2 + 2 f_{12} y_1 y_2 + f_{22} y_2^2 \\ \varphi_{y^2} &= \varphi_{11} y_1^2 + 2 \varphi_{12} y_1 y_2 + \varphi_{22} y_2^2 \\ \psi_{y^2} &= \psi_{11} y_1^2 + 2 \psi_{12} y_1 y_2 + \psi_{22} y_2^2, \end{aligned}$$

so können wir im Sylvester'schen Sinne (vergl. Bd. I. Nr. 143) die Resultante der drei in y quadratischen Formen als Functionaldeterminante betrachten und erhalten, abgesehen von einem Factor 2, als Ausdruck derselben die Determinante

$$U = \begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{22} \\ \varphi_{11}, & \varphi_{12}, & \varphi_{22} \\ \psi_{11}, & \psi_{12}, & \psi_{22} \end{vmatrix} = a_x^{m-2} b_x^{n-2} c_x^{p-2} \begin{vmatrix} a_1^2, & a_1 a_2, & a_2^2 \\ b_1^2, & b_1 b_2, & b_2^2 \\ c_1^2, & c_1 c_2, & c_2^2 \end{vmatrix} \tag{I}$$

$$= (ab)(ac)(bc)\, a_x^{m-2} b_x^{n-2} c_x^{p-2}.$$

Dieselbe Determinante geht auch aus $J = (f, \varphi)$ Nr. 47 (II) hervor, wenn wir x_1 durch $-\psi_2$ und x_2 durch ψ_1 ersetzen.

Auch diese Covariante U ist eine Form ungeraden Charakters und wir können sie ganz in derselben Weise wie die Functionaldeterminante J durch gerade Formen darstellen. Multipliciren wir sie nämlich mit

$$2U = \begin{vmatrix} f_{22}, & -2 f_{12}, & f_{11} \\ \varphi_{22}, & -2\varphi_{12}, & \varphi_{11} \\ \psi_{22}, & -2\psi_{12}, & \psi_{11} \end{vmatrix},$$

so erhalten wir:

$$2U^2 = \begin{vmatrix} (f, f)^2, & (f, \varphi)^2, & (f, \psi)^2 \\ (f, \varphi)^2, & (\varphi, \varphi)^2, & (\varphi, \psi)^2 \\ (f, \psi)^2, & (\varphi, \psi)^2, & (\psi, \psi)^2 \end{vmatrix}. \tag{II}$$

Die Determinante rechts ist eine Covariante, die, wie wir später sehen werden, unter die Gattung der Combinanten zu rechnen ist. Ihre Elemente sind die Coefficienten von λ in der zweiten Ueberschiebung

$$(F, F)^2$$

der Form

$$F = \lambda_1 f + \lambda_2 \varphi + \lambda_3 \psi$$

über sich selbst. Denn bilden wir die zweite Polare

$$F_{y^2} = \lambda_1 f_{y^2} + \lambda_2 \varphi_{y^2} + \lambda_3 \psi_{y^2},$$

so erhält man daraus die Ueberschiebung, wenn man in dem Producte

$$\{\lambda_1 f_{y^2} + \lambda_2 \varphi_{y^2} + \lambda_3 \psi_{y^2}\}\ \{\lambda_1 f_{y^2} + \lambda_2 \varphi_{y^2} + \lambda_3 \psi_{y^2}\}$$

alle nach der Multiplication entstehenden Glieder nach y zweimal faltet. Dies ist, da wir hier einfache Formen zweiten Grades in y haben, immer nur auf eine einzige Art möglich, so dass wir erhalten:

$$(F, F)^2 = \lambda_1^2(f, f)^2 + \lambda_2^2(\varphi, \varphi)^2 + \cdots + 2\lambda_1\lambda_2(f, \varphi)^2 + \cdots$$

50. *Relation zwischen drei und vier binären Formen.* Das in diesem Paragraph nun schon zum wiederholten Male benutzte Princip, durch Determinantenmultiplication Relationen zu erhalten, wollen wir noch benutzen, um Relationen zwischen beliebigen Formen herzustellen.

Wir erhalten eine Relation zwischen den drei beliebigen Formen f, φ und ψ, wenn wir die beiden Determinanten vom Werthe null

$$D = \begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{22}, & 0 \\ \varphi_{11}, & \varphi_{12}, & \varphi_{22}, & 0 \\ \psi_{11}, & \psi_{12}, & \psi_{22}, & 0 \\ x_1^2, & -x_1x_2, & x_2^2, & 0 \end{vmatrix} \tag{I}$$

und

$$2D = \begin{vmatrix} f_{22}, & -2f_{12}, & f_{11}, & 0 \\ \varphi_{22}, & -2\varphi_{12}, & \varphi_{11}, & 0 \\ \psi_{22}, & -2\psi_{12}, & \psi_{11}, & 0 \\ x_2^2, & +2x_1x_2, & x_1^2, & 0 \end{vmatrix} \tag{II}$$

mit einander multipliciren. Das Resultat der Multiplication ist:

$$0 = \begin{vmatrix} (f, f)^2, & (f, \varphi)^2, & (f, \psi)^2, & f \\ (f, \varphi)^2, & (\varphi, \varphi)^2, & (\varphi, \psi)^2, & \varphi \\ (f, \psi)^2, & (\varphi, \psi)^2, & (\psi, \psi)^2, & \psi \\ f, & \varphi, & \psi, & 0 \end{vmatrix} = \varDelta. \tag{III}$$

Nach den Elementen der letzten Zeile und Reihe ausgewerthet, liefert sie, wenn man die Unterdeterminanten zweiter Ordnung mit $A_{\substack{4k\\4i}}$ bezeichnet (vergl. Bd. I. Nr. 64 und Beispiel 65)

$$\begin{aligned}\varDelta &= -\sum a_{4i}\,a_{k4}\,A_{\substack{4k\\4i}} \\ &= -\left\{A_{\substack{41\\41}} f^2 + A_{\substack{42\\42}} \varphi^2 + A_{\substack{43\\43}} \psi^2 + 2A_{\substack{41\\42}} f\cdot\varphi + 2A_{\substack{41\\43}} f\cdot\psi + 2A_{\substack{42\\43}} \varphi\cdot\psi\right\},\end{aligned}$$

oder in leicht verständlicher Abkürzung:

$$\varDelta = -(A_1 f + A_2\varphi + A_3\psi)^2 = 0.$$

Vertauscht man in den beiden Determinanten (I) und (II) wieder x_1 mit χ_2 und x_2 mit $-\chi_1$, so erhält man durch Multiplication derselben die Relation:

$$\begin{vmatrix} (f, f)^2, & (f, \varphi)^2, & (f, \psi)^2, & (f, \chi)^2 \\ (f, \varphi)^2, & (\varphi, \varphi)^2, & (\varphi, \psi)^2, & (\varphi, \chi)^2 \\ (f, \psi)^2, & (\psi, \varphi)^2, & (\psi, \psi)^2, & (\psi, \chi)^2 \\ (f, \chi)^2, & (\chi, \varphi)^2, & (\chi, \psi)^2, & (\chi, \chi)^2 \end{vmatrix} = 0,$$

und diese Determinante giebt eine Relation zwischen Covarianten von vier beliebigen Formen. Wir werden später, insbesondere bei der Theorie der quadratischen Formen, von den bisher entwickelten Relationen vielfach Gebrauch machen.

51. *Die Functionaldeterminante* (f, φ) *und die erste Polare* $(f \cdot \varphi)_y$. Die Functionaldeterminante giebt auch noch in anderer Richtung zu Relationen Veranlassung, die besonders für die symbolische Rechnung von Nutzen sind. Hierher gehört ihre Beziehung zur Polare $(f \cdot \varphi)_y$. Diese Polare ist nämlich, wenn $f = a_x^m = b_x^m \cdots$ und $\varphi = \alpha_x^n = \beta_x^n \cdots$, dargestellt durch:

$$(f \cdot \varphi)_y = \frac{m}{m+n} \cdot a_x^{m-1} a_y \alpha_x^n + \frac{n}{m+n} a_x^m \alpha_x^{n-1} \alpha_y \tag{1}$$
$$= c_0 G_0 + c_1 G_1 \text{ (vgl. Nr. 22).}$$

Die Differenz der beiden Glieder ist:

$$G_1 - G_2 = a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1} (a_y \alpha_x - \alpha_y a_x) = a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1} (a\alpha)(yx),$$

oder

$$(yx) \cdot (f, \varphi) = a_x^{m-1} a_y \alpha_x^n - a_x^m \alpha_x^{n-1} \alpha_y. \tag{2}$$

Eliminiren wir aus beiden Gleichungen (1) und (2) einmal das erste, sodann das zweite Glied rechts, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} (f \cdot \varphi)_y - \frac{m}{m+n} (yx) \cdot (f, \varphi) &= a_x^m \alpha_x^{n-1} \alpha_y = f \cdot \varphi_y \\ (f \cdot \varphi)_y + \frac{n}{m+n} (yx) \cdot (f, \varphi) &= a_x^{m-1} a_y \alpha_x^n = f_y \cdot \varphi \end{aligned}\right\}. \tag{I}$$

Diese beiden Gleichungen, von denen die zweite auch durch Vertauschung von f mit φ aus der ersten erhalten werden kann, setzen die Polare $(f \cdot \varphi)_y$ mit der Functionaldeterminante (f, φ) und den Polaren f_y und φ_y in Beziehung.

Dabei haben wir nicht vorausgesetzt, dass f und φ, unsymbolisch genommen, wirkliche binäre Formen sind. Die Relationen (I) gelten also auch, wenn wir in ihnen f durch a_x^{m-1} und φ durch α_x^{n-1} ersetzen und nachträglich mit $(a\alpha)$ multipliciren. Dann geht aber

$$(f \cdot \varphi)_y \text{ über in } (a\alpha) \cdot (a_x^{m-1} \cdot \alpha_x^{n-1})_y = (f, \varphi)_y,$$

ferner:

$$(f,\varphi) \text{ über in } (a\alpha)(a_x^{m-1},\ \alpha_x^{n-1}) = (a\alpha)^2 a_x^{m-2}\alpha_x^{n-2} = (f,\varphi)^2.$$

Demnach können wir aus den Relationen (I) die beiden neuen gewinnen:

$$\left.\begin{aligned}(f,\varphi)_y - \frac{m-1}{m+n-2}(yx)\cdot(f,\varphi)^2 &= (a\alpha)\,a_x^{m-1}\,\alpha_y\,\alpha_x^{n-2}\\ (f,\varphi)_y + \frac{n-1}{m+n-2}(yx)\cdot(f,\varphi)^2 &= (a\alpha)\,a_x^{m-2}\,a_y\,\alpha_x^{n-1}\end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II)}$$

In ihnen sind die Ausdrücke rechts die Glieder der Polare $(f,\varphi)_y$ und die Relationen (I) und (II) sind somit nichts anderes, als die in Nr. 25 gegebene Darstellung eines Gliedes durch seine Polare und die Polaren von niedrigeren Formen.

52. *Die Functionaldeterminante von* (f,φ) *und* f *oder* φ. Eine besondere Rolle spielen bei späteren Untersuchungen die Functionaldeterminanten von Functionaldeterminanten, also die erste Ueberschiebung von (f,φ) über eine dritte Form ψ, welche wir symbolisch bezeichnen mit

$$((f,\varphi),\psi) = U.$$

Diese Formen haben nämlich die Eigenschaft, dass sie sich immer durch ein Aggregat niedrigerer Formen darstellen lassen. Nehmen wir zunächst an, ψ sei eine der beiden Formen f oder φ selbst. Die erste Ueberschiebung $U = ((f,\varphi), f)$ entsteht nämlich, wenn wir in der Polare $(f,\varphi)_y$ die Variabeln y_1 durch b_2, und y_2 durch $-b_1$ ersetzen (vergl. Nr. 35) und mit b_x^{m-1} multipliciren. Aus der zweiten der Relationen (II) erhalten wir demnach:

$$((f,\varphi),f) = (a\alpha)(ab)\,a_x^{m-2}\,b_x^{m-1}\,\alpha_x^{n-1} - \frac{n-1}{m+n-2}(f,\varphi)^2\cdot b_x\cdot b_x^{m-1}.$$

Hierin ist das zweite Glied rechts bereits das Product von zwei einfacheren Formen $(f,\varphi)^2$ und $b_x^m = f$. Das erste Glied G_1 lässt sich mit Hilfe des Identitätssatzes in ein ähnliches Product verwandeln. Vertauscht man nämlich in ihm die gleichwerthigen Symbole a und b, so wird aus dem Gliede

$$G_1 = \quad (a\alpha)(ab)\,a_x^{m-2}\,b_x^{m-1}\,\alpha_x^{n-1}$$

wiederum

$$G_1 = -(b\alpha)(ab)\,b_x^{m-2}\,a_x^{m-1}\,\alpha_x^{n-1}.$$

Durch Addition erhält man:

$$2G_1 = (ab)\,a_x^{m-2}\,b_x^{m-2}\,\alpha_x^{n-1}\left\{(a\alpha)\,b_x - (b\alpha)\,a_x\right\},$$

oder, weil gemäss dem Identitätssatze die Differenz in der Klammer gleich $(ab)\,\alpha_x$ ist,

$$G_1 = \frac{1}{2}(ab)^2\,a_x^{m-2}\,b_x^{m-2}\,\alpha_x^n = \frac{1}{2}(f,f)^2\cdot\varphi.$$

Die Functionaldeterminante $((f, \varphi), f)$ ist somit dargestellt durch:

$$((f, \varphi), f) = \frac{1}{2}(f, f)^2 \cdot \varphi - \frac{n-1}{m+n-2} \cdot (f, \varphi)^2 \cdot f. \qquad \text{(I)}$$

Dabei ist natürlich vorausgesetzt, dass beide Formen f und φ von höherem als dem ersten Grade in x sind.

Vertauschen wir in der Relation (I) f mit φ, so erhalten wir auch die andere erste Ueberschiebung $((\varphi, f), \varphi) = -((f, \varphi), \varphi)$ dargestellt durch die Gleichung:

$$((f, \varphi), \varphi) = -\frac{1}{2}(\varphi, \varphi)^2 \cdot f + \frac{m-1}{m+n-2}(f, \varphi)^2 \cdot \varphi. \qquad \text{(II)}$$

53. *Die Functionaldeterminante von (f, φ) und ψ.* Ist nun $\psi = r_x^p$ eine von f und φ verschiedene Form (sie kann auch selbst wieder eine Functionaldeterminante sein), so können wir die erste Ueberschiebung

$$U = ((f, \varphi), \psi)$$

auf folgende Weise durch Formen niederern Grades ausdrücken. Wir ersetzen zunächst wieder in der zweiten der beiden Relationen (II) Nr. 51 y durch r, d. h. y_1 durch r_2, y_2 durch $-r_1$ und erhalten nach Multiplication mit r_x^{p-1}

$$((f, \varphi), \psi) = (a\alpha)(ar) a_x^{m-2} \alpha_x^{n-1} r_x^{p-1} - \frac{n-1}{m+n-2}(f, \varphi)^2 \cdot \psi. \quad (1)$$

Zur Umformung des ersten Gliedes benutzen wir den Productsatz

$$(a\alpha)(ar)\alpha_x r_x = \frac{1}{2}\left\{(a\alpha)^2 r_x^2 + (ar)_x^2 \alpha_x^2 - (\alpha r)^2 a_x^2\right\}.$$

Substituiren wir diesen Werth von $(\alpha a)(ar)\alpha_x r_x$ in (1), so kommt:

$$((f, \varphi), \psi) = \frac{1}{2}\left\{(a\alpha)^2 a_x^{m-2} \alpha_x^{n-2} \cdot \psi + (ar)^2 a_x^{m-2} r_x^{p-2} \cdot \varphi - (\alpha r)^2 \alpha_x^{n-2} r_x^{p-2} \cdot f\right\}$$

$$- \frac{n-1}{m+n-2}(f, \varphi)^2 \cdot \psi$$

$$= \frac{1}{2}(f, \varphi)^2 \cdot \psi + \frac{1}{2}(f, \psi)^2 \cdot \varphi - \frac{1}{2}(\varphi, \psi)^2 \cdot f - \frac{n-1}{m+n-2}(f, \varphi)^2 \cdot \psi,$$

oder endlich:

$$((f, \varphi), \psi) = \frac{m-n}{2(m+n-2)}(f, \varphi)^2 \cdot \psi + \frac{1}{2}\left\{(f, \psi)^2 \cdot \varphi - (\varphi, \psi)^2 \cdot f\right\}. \quad \text{(III)}$$

Wir sind somit berechtigt, den Satz aufzustellen:

„Die Functionaldeterminante einer Form ψ mit einer andern Functionaldeterminante ist, wenn alle Formen vom höheren als vom ersten Grade in x sind, immer durch Producte niedrigerer Formen ausdrückbar.“

Aus der Relation (III) gehen selbstverständlich die beiden früheren Relationen (I) oder (II) hervor, wenn wir ψ durch f oder φ ersetzen.

54. *Die zweite Ueberschiebung einer Form f über sich selbst.* Als zweites Beispiel einer einfachen Ueberschiebung wollen wir noch die Covariante $(ab)^2\, a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}$ betrachten. Diese Form wurde zuerst von Hesse als eine Covariante einer Form $f = a_x^m = b_x^m$ entdeckt (Crelle Journal Bd. 28) und führt nach ihm den Namen Hesse'sche Determinante oder Hesse'sche Form. Sie ist dargestellt symbolisch durch

$$(f, f)^2 = (ab)^2\, a_x^{m-2}\, b_x^{m-2} = H,$$

unsymbolisch durch:

$$H = \frac{2}{m^2 (m-1)^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}.$$

Man kann sie auch auffassen als Functionaldeterminante der beiden ersten Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2}$. Wir haben diese Covariante bereits in mehreren Beispielen kennen gelernt. So ist die Discriminante der quadratischen Form $f = a_x^2 = b_x^2$ nichts anderes als die Hesse'sche Form

$$H = (ab)^2 = 2\,(\overline{a}_0\, \overline{a}_2 - \overline{a}_1^2),$$

ebenso war die in Nr. 37 berechnete Covariante zweiten Grades einer cubischen Form die Hesse'sche Covariante.

$$H = (ab)^2\, a_x\, b_x = 2\, \{ (\overline{a}_0\, \overline{a}_2 - \overline{a}_1^2)\, x_1^2 + (\overline{a}_0\, \overline{a}_3 - \overline{a}_1\, \overline{a}_2)\, x_1\, x_2 + \cdots \}.$$

55. *Lehrsatz von Hesse.* Von dieser Covariante hatte Hesse den allgemeinen Satz aufgestellt und bewiesen:

„Ist die Determinante

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_3} \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_3} & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_n}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_n}, & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

der zweiten Differentialquotienten einer Function f mit n Variabeln identisch Null, so reducirt sich die Dimension der Form f um einen Grad.“

Im Jahre 1876 zeigten nun Gordan und Nöther, dass der Satz in dieser Allgemeinheit unrichtig ist.

Durch das Verschwinden der Hesse'schen Form reduciren sich zwar binäre Formen auf reine Potenzen eines linearen Ausdruckes, Formen mit drei Variabeln, also ternäre auf binäre, quaternäre auf ternäre; dagegen giebt es bereits quinäre Formen, deren H zwar

identisch verschwindet, die sich aber keineswegs auf quaternäre reduciren lassen.

Wir geben hier den Beweis des von Hesse aufgestellten Satzes für binäre Formen, indem wir ihn folgendermassen formuliren.

> „Ist die Covariante $(ab)^2\, a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}$ der Form $f(x_1 x_2)$ identisch null, so ist $f(x_1 x_2)$ eine reine Potenz: $(\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2)^n$."

Zum Beweise bringen wir zunächst die Voraussetzung

$$H = (ab)^2\, a_x^{m-2}\, b_x^{m-2} = 0 \tag{1}$$

durch eine andere Relation zum Ausdruck. Wir multipliciren Gleichung (1) mit $\frac{(xy)^2}{2}$, und können dann schreiben:

$$\frac{(xy)^2}{2}\,(ab)^2\, a_x^{m-2}\, b_x^{m-2} = \frac{1}{2}\,(a_x b_y - b_x a_y)^2\, a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}$$
$$= \frac{1}{2}\,(a_x^2 b_x^2 - 2 a_x b_y b_x a_y + b_x^2 a_y^2)\, a_x^{m-2}\, b_x^{m-2},$$

oder, weil $a_x^m \cdot b_y^2 b_x^{n-2} = b_x^m a_y^2 a_x^{m-2} = f \cdot f_{y^2}$,

$$\frac{(xy)^2}{2}\, H = f \cdot f_{y^2} - f_y^2 = 0. \tag{2}$$

Zu dieser Voraussetzung (2) tritt noch eine zweite, dass nämlich jede Form $f(x)$ mindestens einen linearen Factor α_x besitzt (vgl. Fundamentalsatz der Algebra Bd. I § 12), oder, um ganz allgemein zu sein, dass f von der Form ist:

$$f = \alpha_x^\varrho \cdot \psi_x^\sigma = \alpha_x^\varrho \cdot \psi,\text{*)} \quad (\sigma + \varrho = m). \tag{3}$$

Hier ist α_x wirklicher vielfacher Factor von f, ϱ sein Exponent und ψ das Product aller anderen Factoren. Unter diesen beiden Voraussetzungen lautet dann die Behauptung:

$$\varrho = m.$$

Wir bilden nun die erste und zweite Polare von $f = \alpha_x^\varrho . \psi$, und erhalten nach Nr. 22:

$$m \cdot f_y = \varrho \cdot \alpha_x^{\varrho-1}\, \alpha_y \cdot \psi + \sigma \cdot \alpha_x^\varrho \cdot \psi_x^{\sigma-1}\, \psi_y \tag{4}$$

$$m\,(m-1)\, f_{y^2} = \varrho\,(\varrho - 1)\, \alpha_x^{\varrho-2}\, \alpha_y^2 \cdot \psi + 2\varrho \cdot \sigma\, \alpha_x^{\varrho-1}\, \alpha_y\, \psi_x^{\sigma-1}\, \psi_y$$
$$+ \sigma\,(\sigma - 1)\, \alpha_x^\varrho \cdot \psi_x^{\sigma-2}\, \psi_y. \tag{5}$$

Quadriren wir also den Ausdruck (4) der ersten Polare und subtra-

*) Man darf annehmen $\varrho > 1$. Für $\varrho = 1$ wird der Beweis genau ebenso geführt.



hiren das $(m-1)$ fache dieses Quadrates von dem m fachen Producte der Form f in die Form (5), so erhalten wir:

$$m^2(m-1)\{f\cdot f_{y^2}-f_y^2\} = \{m\varrho(\varrho-1)-(m-1)\varrho^2\}\,\alpha_x^{2\varrho-2}\alpha_y^2\,.\,\psi^2$$
$$+\{2m\varrho\sigma-2\varrho\sigma(m-1)\}\,\alpha_x^{2\varrho-1}\alpha_y\cdot\psi_y\cdot\psi$$
$$+\{m\sigma(\sigma-1)\psi\cdot\psi_{y^2}-(m-1)\sigma^2\psi_y^2\}\,\alpha_x^{2\varrho}=0.$$

Da nun in dieser Identität die späteren Glieder rechts den Factor α_x in einer höheren Potenz enthalten als das erste, so muss dessen Zahlencoefficient für sich verschwinden, d. h. es muss sein:

$$m\varrho(\varrho-1)=(m-1)\varrho^2$$

oder

$$m=\varrho,$$

was zu beweisen war.

§ 5. Der Aronhold'sche Process.

56. *Aufgabe.* Viele Fragen der Algebra und Geometrie erheischen die Lösung folgender Aufgabe: Gegeben ist eine Form f und eine ihrer Invarianten (Covarianten) i; gegeben ist ferner eine Form φ von gleichem Grade in x wie die Form f. Dann besitzt das lineare System $f+\lambda\varphi$ eine entsprechende simultane Invariante J, welche aus i entsteht, wenn man darin die Coefficienten $\bar{a}_i$ von f durch die Coefficienten $\bar{a}_i+\lambda\bar{\alpha}_i$ von $f+\lambda\varphi$ ersetzt*). Diese Invariante J lässt sich nach Potenzen von λ anordnen, und die Coefficienten der Potenzen von λ werden alsdann selbst wieder simultane Invarianten von f und φ sein. Die Aufgabe nun, die wir uns stellen, ist: womöglich eine independente Darstellung der Coefficienten von λ^k zu geben. Es wird sich zeigen, dass sich, so lange f und φ von einander unabhängig sind, immer ein Process angeben lässt, eng verwandt mit dem Polarenprocess, vermöge welchem jeder dieser Coefficienten unmittelbar aus der Invariante i hergestellt werden kann; im anderen Falle erhält man für dieselben Recursionsformeln.

Um die Begriffe zu fixiren, nehmen wir an, es sei:

$$f=a_x^n=b_x^n=\cdots \text{ etc.}$$
$$=\bar{a}_0x_1^n+\binom{n}{1}\bar{a}_1x_1^{n-1}x_2+\binom{n}{2}\bar{a}_2x_1^{n-2}x_2^2+\cdots,$$
$$\varphi=\alpha_x^n=\beta_x^n=\cdots \text{ etc.}$$
$$=\bar{\alpha}_0x^n+\binom{n}{1}\bar{\alpha}_1x_1^{n-1}x_2+\binom{n}{2}\bar{\alpha}_2x_1^{n-2}x_2+\cdots,$$

---

*) Ist φ eine Form höheren als n^{ten} Grades, so bildet man die geeignete Polare und kann sich dann die gleiche Frage für die Form $f+\lambda\varphi_{y^k}$ vorlegen.

und die Invariante ν Grades in den Coefficienten von f

$$i = \psi(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots \bar{a}_n).$$

Dann ist:

$$f + \lambda\varphi = (\bar{a}_0 + \lambda\bar{\alpha}_0)x_1^n + \binom{n}{1}(\bar{a}_1 + \lambda\bar{\alpha}_1)x_1^{n-1}x_2 + \cdots$$

und demnach

$$J = \psi(\bar{a}_0 + \lambda\bar{\alpha}_0, \bar{a}_1 + \lambda\bar{\alpha}_1, \dots \bar{a}_n + \lambda\bar{\alpha}_n).$$

Denken wir uns diese Invariante J nach steigenden Potenzen von λ geordnet, und die Coefficienten der ersten bis ν^{ten} Potenz der Reihe nach mit δi, $\delta^2 i \dots \delta^\nu i$, so stellt sich J in der Form dar

$$J = \lambda^0 i + \lambda^1 \delta i + \lambda^2 \delta^2 i + \lambda^3 \delta^3 i + \cdots \lambda^\nu \delta^\nu i. \tag{I}$$

Dass der Coefficient von λ^0 die Invariante i ist, geht daraus hervor, dass für $\lambda = 0$ die Form $f + \lambda\varphi$ in f, also J in i übergehen muss.

57. *Definition des Aronhold'schen Processes.* Erster Fall: φ ist von f unabhängig. Um die Werthe der Grössen $\delta^k i$ zu ermitteln, bedienen wir uns einen Augenblick einer neuen Art der symbolischen Darstellung für die Invariante i. Da nämlich i als Invariante eine homogene Function ν^{ten} Grades in den Coefficienten a_k ist, so kann man sie symbolisch darstellen durch

$$i = (\bar{a}_0 p_0 + \bar{a}_1 p_1 + \bar{a}_2 p_2 + \cdots \bar{a}_n p_n)^\nu = p_a^\nu.$$

Hiebei sind die Coefficienten p_i nur als Symbole numerischer Grössen zu denken, d. h. der Zahlencoefficient — Null nicht ausgeschlossen — irgend des Gliedes $\bar{a}_{i_0}^{\mu_0}\bar{a}_{i_1}^{\mu_1}\dots\bar{a}_{i_\nu}^{\mu_\nu}$ der Invariante ist repräsentirt durch

$$\frac{\nu!}{\mu_0!\,\mu_1!\dots} p_{i_0}^{\mu_0} p_{i_1}^{\mu_1} \cdots p_{i_\nu}^{\mu_\nu}, \text{ wo } \mu_0 + \mu_1 + \cdots \mu_\nu = \nu.$$

Im allgemeinen, wenn i Covariante, können diese Grössen p_i noch Functionen von x sein.

Da nun J aus i dadurch entstanden ist, dass an Stelle von $\bar{a}_i$ die Grösse $\bar{a}_i + \lambda\bar{\alpha}_i$ trat, so ist das analoge Symbol für J

$$J = (\bar{a}_0 p_0 + \bar{a}_1 p_1 + \cdots + \lambda\bar{\alpha}_0 p_0 + \lambda\bar{\alpha}_1 p_1 + \cdots)^\nu = (p_a + \lambda p_\alpha)^\nu.$$

Diesen Ausdruck kann man aber nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln, wodurch man erhält:

$$J = p_a^\nu + \binom{\nu}{1} p_a^{\nu-1} p_\alpha \lambda + \binom{\nu}{2} p_a^{\nu-2} p_\alpha^2 \lambda^2 + \cdots \lambda^\nu p_\alpha^\nu. \tag{II}$$

Vergleicht man diese Entwicklung mit der Entwicklung (I) Nr. 56, so erhält man allgemein:

$$\delta_i^k = \binom{\nu}{k} p_a^{\nu-k} p_\alpha^k. \tag{I}$$

Der Ausdruck rechts ist aber bis auf einen numerischen Coefficienten nichts anderes als die k^{te} Polare von p_a^ν

$$p_a^{\nu-k} p_\alpha^k = (p_a^\nu)_{\alpha^k} = \frac{1}{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)} \left(\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0}\bar{a}_0 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1}\bar{a}_1 + \cdots \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_n}\bar{a}_n\right)^k.$$

Daher ist

$$\delta^k i = \binom{\nu}{k} \frac{1}{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)} \sum \frac{\partial^k i}{\partial \bar{a}_{i_1} \cdots \partial \bar{a}_{i_k}} \bar{\alpha}_{i_1} \bar{\alpha}_{i_2} \ldots \bar{\alpha}_{i_k}$$

oder

$$\delta^k i = \frac{1}{k!} \sum \frac{\partial^k i}{\partial \bar{a}_{i_1} \partial \bar{a}_{i_2} \cdots \partial \bar{a}_{i_k}} \bar{\alpha}_{i_1} \bar{\alpha}_{i_2} \cdots \bar{\alpha}_{i_k}. \tag{II}$$

Wir erhalten demnach die Lösung:

„Die Grösse $\delta^k i$ ist bis auf einen numerischen Coefficienten gleich der k^{ten} Polare von i nach den Coefficienten $\bar{a}_i$, wobei die Incremente jedesmal durch $\bar{\alpha}_i$ ersetzt werden.“

Nach den Eigenschaften der Polaren entsteht also $\delta^2 i$ ebenso aus δi wie δi aus i, oder allgemein: Man erhält $\delta^k i$, wenn man $\delta^{k-1} i$ nach jedem Coefficienten differentiirt, die Incremente durch $\bar{\alpha}_i$ ersetzt und alle so erhaltenen Ausdrücke summirt. Der Process, welcher durch

$$\delta i = \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0}\bar{\alpha}_0 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1}\bar{\alpha}_1 + \cdots + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_n}\bar{\alpha}_n$$

ausgedrückt ist, wird somit, immer vorausgesetzt, dass die Coefficienten $\bar{\alpha}_i$ unabhängig sind von den Coefficienten $\bar{a}_i$, ein Iterationsprocess. Wir nennen ihn den Aronhold'schen Process und bezeichnen die Ausführung desselben an einer In- oder Covariante mit dem Worte „deltairen“. Die Formen f und φ sind hiebei als lineare Functionen der Variabeln a_i, b_i aufgefasst, während die Potenzen $x^m, x^{m-1}, \ldots x^0$ als Constante betrachtet werden. Beide Formen haben in diesem Sinne die nämlichen Coefficienten, aber verschiedene Variable und i ist dann Covariante ν^{ten} Grades der Form f.

58. *Beispiel.* 1) Die quadratische Form

$$f = \bar{a}_0 x_1^2 + 2\bar{a}_1 x_1 x_2 + \bar{a}_2 x_2^2$$

besitzt die Invariante

$$i = \bar{a}_0 \bar{a}_2 - \bar{a}_1^2 = (f, f)^2.$$

Ist nun φ eine zweite quadratische Form

$$\varphi = \bar{\alpha}_0 x_1^2 + 2\bar{\alpha}_1 x_1 x_2 + \bar{\alpha}_2 x_2^2,$$

so ist die der Form i entsprechende Invariante von $f + \lambda\varphi$

$$J = (\bar{a}_0 + \lambda\bar{\alpha}_0)(\bar{a}_2 + \lambda\bar{\alpha}_2) - (\bar{a}_1 + \lambda\bar{\alpha}_1)^2$$
$$= (\bar{a}_0\bar{a}_2 - \bar{a}_1^2) + \lambda(\bar{a}_0\bar{\alpha}_2 - 2\bar{a}_1\bar{\alpha}_1 + \bar{a}_2\bar{\alpha}_0) + \lambda^2(\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1^2).$$

Das gleiche Resultat erhalten wir, wenn wir die erste und zweite Polare von i bilden und die Werte von

$$2 p_a p_\alpha = \delta i$$
$$p_\alpha^2 = \delta^2 i.$$

in die Entwicklung

$$J = i + \lambda \delta i + \lambda^2 \delta^2 i$$

eintragen. Denn es ist:

$$p_a p_\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0}\bar{\alpha}_0 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1}\bar{\alpha}_1 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_2}\bar{\alpha}_2\right) = \frac{1}{2}(\bar{a}_2\bar{\alpha}_0 - 2\bar{a}_1\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2\bar{a}_0)$$
$$= \frac{1}{2}(f, \varphi)^2 \text{ (vergl. Nr. 36, (1))}$$

und ebenso (vgl. Nr. 14, 8)

$$p_\alpha^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0}\bar{\alpha}_0 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1}\bar{\alpha}_1 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_2}\bar{\alpha}_2\right)^2 = (\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1^2) = (\varphi, \varphi)^2.$$

Also ist

$$J = i + \lambda (f, \varphi)^2 + \lambda^2 (\varphi, \varphi)^2.$$

59. *Beispiel* 2. Die biquadratische Form $f = a_x^4$ besitzt eine Invariante dritten Grades in den Coefficienten, welche entsteht, wenn man die Hesse'sche Form $(f, f)^2 = (ab)^2 a_x^2 b_x^2$ viermal über $f = c_x^4$ selbst schiebt, nämlich die Invariante

$$j = (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2 = ((f, f)^2, f)^4.$$

Ersetzt man hier die symbolischen Coefficienten durch die unsymbolischen, so findet man (vgl. auch Nr. 155 d. Bd.), vom Factor 6 abgesehen,

$$j = \begin{vmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 \end{vmatrix}$$

oder

$$j = \bar{a}_0\bar{a}_2\bar{a}_4 + 2\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3 - \bar{a}_2^3 - \bar{a}_0\bar{a}_3^2 - \bar{a}_1^2\bar{a}_4$$
$$= \left\{p_0\bar{a}_0 + p_1\bar{a}_1 + p_2\bar{a}_2 + p_3\bar{a}_3 + p_4\bar{a}_4\right\}^3 = p_a^3.$$

Die entsprechende Invariante J von $f + \lambda\varphi$, wobei $\varphi = \alpha_x^4$, wird

$$J = j + \lambda\delta j + \lambda^2\delta^2 j + \lambda^3\delta^3 j$$

und die Coefficienten δj, $\delta^2 j$, $\delta^3 j$ sind bezw. gleich den Polaren:

$$3(p_a^3)_\alpha, \quad 3(p_a^3)_{\alpha^2}, \quad (p_a^3)_{\alpha^3}.$$

Bezeichnen wir der Kürze halber obige Determinante durch ihr Diagonalglied $(\bar{a}_0\bar{a}_2\bar{a}_4)$, so werden entsprechend diese drei Polaren durch

$$(p_a^3)_\alpha = \frac{1}{3}\sum \frac{\partial j}{\partial \bar{a}_k}\bar{\alpha}_k = \frac{1}{3}\left\{(\bar{\alpha}_0\,\bar{a}_2\,\bar{a}_4) + (\bar{a}_0\,\bar{\alpha}_2\,\bar{a}_4) + (\bar{a}_0\,\bar{a}_2\,\bar{\alpha}_4)\right\}$$

$$(p_a^3)_{\alpha^2} = \frac{1}{3\cdot 2}\sum \frac{\partial j}{\partial \bar{a}_k\,\partial \bar{a}_\lambda}\bar{\alpha}_k\,\bar{\alpha}_\lambda = \frac{2}{6}\left\{(\bar{\alpha}_0\,\bar{\alpha}_2\,\bar{a}_4) + (\bar{\alpha}_0\,\bar{a}_2\,\bar{\alpha}_4) + (\bar{a}_0\,\bar{\alpha}_2\,\bar{\alpha}_4)\right\}$$

$$(p_a^3)_{\alpha^3} = \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1}\sum \frac{\partial j}{\partial \bar{a}_k\,\partial \bar{a}_\lambda\,\partial \bar{a}_\nu}\cdot\bar{\alpha}_k\,\bar{\alpha}_\lambda\,\bar{\alpha}_\nu = (\bar{\alpha}_0\,\bar{\alpha}_2\,\bar{\alpha}_4) = ((\varphi,\ \varphi)^2,\ \varphi)^4$$

dargestellt sein. Demnach wird

$$J = ((f,f)^2,f)^4 + \lambda\left\{(\bar{a}_0\,\bar{\alpha}_2\,\bar{a}_4) + (\bar{a}_0\,\bar{\alpha}_2\,\bar{a}_4) + (\bar{a}_0\,\bar{a}_2\,\bar{\alpha}_4)\right\}$$
$$+\lambda^2\left\{(\bar{\alpha}_0\,\bar{\alpha}_2\,\bar{a}_4) + (\bar{\alpha}_0\,\bar{a}_2\,\bar{\alpha}_4) + (\bar{a}_0\,\bar{\alpha}_2\,\bar{\alpha}_4)\right\} + \lambda^3((\varphi,\varphi)^2,\varphi)^4.$$

Hierin sind auch die beiden mittleren Coefficienten Invarianten, deren symbolische Darstellung wir sofort kennen lernen werden.

60. *Darstellung des Aronhold'schen Processes δi in seiner Wirkung auf ein symbolisches Product.* Schon das letzte Beispiel führte uns zur Frage: Wie äussert sich der Aronhold'sche Process an einem symbolischen Product? Die Antwort hierauf will ich zunächst an dem gleichen Beispiel erläutern. Die gegebene Invariante

$$j = (ab)^2(bc)^2(ac)^2 = 6\left\{\bar{a}_0\,\bar{a}_2\,\bar{a}_4 + 2\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{a}_3 - \bar{a}_2^{\,3} - \bar{a}_0\,\bar{a}_3^{\,2} - \bar{a}_1^{\,2}\,\bar{a}_4\right\} \quad (1)$$

ist vom dritten Grade in den Coefficienten. Denken wir uns dementsprechend die biquadratische Form $f = r_x^4$ einen Moment auf drei Arten unsymbolisch dargestellt:

$$\left.\begin{array}{l} f = \bar{a}_0\,x_1^{\,4} + 4\bar{a}_1\,x_1^{\,3}x_2 + \cdots \bar{a}_4\,x_2^{\,4} \\ f = \bar{b}_0\,x_1^{\,4} + 4\bar{b}_1\,x_1^{\,3}x_2 + \cdots \bar{b}_4\,x_2^{\,4} \\ f = \bar{c}_0\,x_1^{\,4} + 4\bar{c}_1\,x_1^{\,3}x_2 + \cdots \bar{c}_4\,x_2^{\,4} \end{array}\right\} \bar{r}_i = \bar{a}_i = \bar{b}_i = \bar{c}_i,$$

so können wir aus dem symbolischen Product $j = (ab)^2(bc)^2(ac)^2$ noch zu einer andern unsymbolischen Darstellung $\bar{j}$ von j gelangen, als der in (1) gegebenen, wenn wir die Symbolreihe

$$a_1^{\,4},\ a_1^{\,3}a_2,\ a_1^{\,2}a_2^{\,2}\ldots \text{ durch } \bar{a}_0\,\bar{a}_1\,\bar{a}_2\ldots$$

und ebenso:
$$b_1^{\,4},\ b_1^{\,3}b_2,\ b_1^{\,2}b_2^{\,2}\ldots \text{ durch } \bar{b}_0\,\bar{b}_1\,\bar{b}_2\ldots$$
$$c_1^{\,4},\ c_1^{\,3}c_2,\ c_1^{\,2}c_2^{\,2}\ldots \text{ durch } \bar{c}_0\,\bar{c}_1\,\bar{c}_2\ldots$$

ersetzen. Der so erhaltene Ausdruck $\bar{j}$ ist aber nun linear in den Grössen $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i$ und geht für $\bar{a}_i = \bar{b}_i = \bar{c}_i = \bar{r}_i$ in den unter (1) gegebenen über. Der partielle Differentialquotient von $\bar{j}$ nach $\bar{r}_i$ ist in Folge dessen durch

$$\frac{\partial \bar{j}}{\partial \bar{r}_i} = \frac{\partial \bar{j}}{\partial \bar{a}_i} + \frac{\partial \bar{j}}{\partial \bar{b}_i} + \frac{\partial \bar{j}}{\partial \bar{c}_i} \quad (2)$$

dargestellt, und der Aronhold'sche Process erhält den analytischen Ausdruck

$$\partial \bar{j} = \sum_0^4 \frac{\partial \bar{j}}{\partial \bar{r}_i} \bar{\alpha}_i$$

$$= \sum_0^4 \frac{\partial \bar{j}}{\partial \bar{a}_i} \bar{\alpha}_i + \sum_0 \frac{\partial \bar{j}}{\partial \bar{b}_i} \bar{\alpha}_i + \sum \frac{\partial \bar{j}}{\partial \bar{c}_i} \bar{\alpha}_i. \tag{3}$$

Durch die erste der drei Operationen rechts wird aber in den in $\bar{\alpha}_i$ linearen Ausdruck $\bar{j}$, an Stelle des Coefficienten $\bar{a}_i$ der Coefficient $\bar{\alpha}_i$ oder also in j an Stelle des Symboles $a_1^{4-i} a_2^i$ das Symbol $\alpha_1^{4-i} \alpha_2^i$ eingeführt. Wenn man daher zum symbolischen Product zurückkehrt, so erhält man an Stelle von $(ab)^2 (bc)^2 (ac)^2$ einfach $(\alpha b)^2 (bc)^2 (\alpha c)^2$. Ebenso liefert die zweite und dritte Operation rechts in (3)

$$(a\alpha)^2 (\alpha c)^2 (ac)^2, \quad (ab)^2 (b\alpha)^2 (a\alpha)^2.$$

Weil aber alle drei Resultate identisch gleich sind, so hat man:

$$\delta j = 3 (ab)^2 (b\alpha)^2 (a\alpha)^2 = ((ab)^2 a_x^2 b_x^2, \alpha_x^4)^4 = 3 ((f, f)^2, \varphi))^4.$$

61. In derselben Weise findet man:

$$\delta^2 j = 3 (a\alpha)^2 (\alpha\beta)^2 (a\beta)^2 = ((\varphi, \varphi)^2, f)^4$$

$$\delta^3 j = (\alpha\beta)^2 (\alpha\gamma)^2 (\beta\gamma)^2 = ((\varphi, \varphi)^2, \varphi)^4.$$

Denn in Gleichung (3) sind die drei Glieder rechts linear in den Grössen $\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{c}_i$; resp. $\bar{\alpha}_i, \bar{a}_i, \bar{c}_i$; $\bar{\alpha}_i, \bar{a}_i, \bar{b}_i$. Setzen wir nun der Einfachheit halber

$$\sum \frac{\partial \bar{j}}{\partial \bar{a}_i} \bar{\alpha}_i = k_a$$

$$\sum \frac{\partial \bar{j}}{\partial \bar{b}_i} \bar{\alpha}_i = k_b$$

$$\sum \frac{\partial \bar{j}}{\partial \bar{c}_i} \bar{\alpha}_i = k_c$$

und unterwerfen die Grössen k_a, k_b, k_c wiederum dem Aronhold'schen Process, so erhalten wir entsprechend der Gleichung (3)

$$\delta k_a = \sum_0^4 \frac{\partial k_a}{\partial \bar{b}_x} \bar{\beta}_x + \sum_0^4 \frac{\partial k_a}{\partial \bar{c}_x} \bar{\beta}_x$$

$$\delta k_b = \sum_0^4 \frac{\partial k_b}{\partial \bar{a}_x} \bar{\beta}_x + \sum \frac{\partial k_b}{\partial \bar{c}_x} \bar{\beta}_x$$

$$\delta k_c = \sum_0^4 \frac{\partial k_c}{\partial \bar{a}_x} \bar{\beta}_x + \sum \frac{\partial k_c}{\partial \bar{b}_x} \bar{\beta}_x.$$

Ersetzen wir in diesen drei Gleichungen k_a durch $\sum \frac{\partial \bar{j}}{\partial \bar{a}_i} \bar{\alpha}_i$ etc. und addiren, so kommt:

$$\sum_{a,\,b,\,c} \delta k_r = 2 \left\{ \sum \frac{\partial \bar{j}}{\partial \bar{a}_i\, \partial \bar{b}_\varkappa} \bar{\alpha}_i \bar{\beta}_\varkappa + \sum \frac{\partial \bar{j}}{\partial \bar{a}_i\, \partial \bar{c}_\varkappa} \bar{\alpha}_i \bar{\beta}_\varkappa + \sum \frac{\partial \bar{j}}{\partial \bar{b}_i\, \partial \bar{c}_\varkappa} \bar{\alpha}_i \bar{\beta}_\varkappa \right\}.$$

Die drei Summen rechts sind linear in $\bar{\alpha}_i \bar{\beta}_\varkappa \bar{c}_\lambda$, resp. $\bar{\alpha}_i \bar{\beta}_\varkappa \bar{b}_\lambda$, $\bar{\alpha}_i \bar{\beta}_\varkappa \bar{a}_\lambda$ und führen demnach wie vorhin eindeutig zurück auf die symbolischen Producte $(\alpha\beta)^2 (\alpha c)^2 (\beta c)^2$, resp. $(\alpha\beta)^2 (\alpha b)^2 (\beta b)^2$, $(\alpha\beta)^2 (\alpha a)^2 (\beta b)^2$, welche alle drei die nämliche Bedeutung haben. Demnach ist

$$\sum_{a,\,b,\,c} \partial k_r = 6\,(a\alpha)^2\,(a\beta)^2\,(\alpha\beta)^2.$$

Es ist aber

$$\sum_{a,\,b,\,c} \partial k_r = 2 \sum \frac{\partial j}{\partial \bar{r}_i\, \partial \bar{r}_k} \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_k$$

und also gemäss der Definition des Aronhold'schen Processes

$$\delta^2 j = \frac{1}{2} \sum \partial k_r = 3\,(a\alpha)^2\,(a\beta)^2\,(\alpha\beta)^2 = ((\alpha\beta)^2 \alpha_x^2 \beta_x^2,\ a_x^4)^4.$$

Ebenso findet man:

$$\delta^3 j = \frac{1}{3 \cdot 2} \sum \frac{\partial \bar{j}}{\partial \bar{a}_i\, \partial \bar{b}_k\, \partial \bar{c}_\lambda} \bar{\alpha}_i \bar{\beta}_k \bar{\gamma}_\lambda = (\alpha\beta)^2\,(\alpha\gamma)^2\,(\beta\gamma)^2 = ((\alpha\beta)^2 \alpha_x^2 \beta_x^2,\ \gamma_x^4).$$

Die im letzten Beispiele zu berechnende Invariante hat also die Form

$$J = ((f, f)^2, f)^4 + 3\lambda\,((f, f)^2, \varphi)^4 + 3\lambda^2\,((\varphi, \varphi)^2, f)^4 + ((\varphi, \varphi)^2, \varphi)^4.$$

Genau in derselben Weise, wie wir hier an dem einzelnen Beispiele die Wirkung des Aronhold'schen Processes auf ein symbolisches Product studirt haben, so können wir im allgemeinen Falle vorgehen. Wir finden alsdann:

$$\delta^\varrho i = \frac{1}{\varrho!} \sum \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1\, \partial \bar{b}_2\, \partial \bar{c}_3 \cdots \partial \bar{m}_\varrho} \cdot \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\gamma}_3 \cdots \bar{\mu}_\varrho,$$

wobei sich die Summe über alle Variationen von n Elementen zur ϱ^{ten} Klasse ohne Wiederholung erstreckt. In Worten ausgedrückt lautet diese Formel:

> „Ein symbolisches Product wird ϱ mal deltairt, wenn man je ϱ Symbole $a, b, c \ldots$ durch ϱ Symbole $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ so oftmal ersetzt, als sich n Elemente zur ϱ^{ten} Klasse combiniren lassen und alsdann die Summe aller so erhaltenen Producte bildet."

62. *Zweiter Fall: Die beiden Formen f und φ sind nicht von einander unabhängig.* Wir haben bisher angenommen, dass f und φ in keinerlei Weise durch ihre Coefficienten mit einander in Beziehung

stehen. Sobald nun zwischen den beiden Formen f und φ ein Abhängigkeitsverhältniss etwa der Art existirt, dass die Coefficienten von φ Functionen der Coefficienten von f sind, so ist der Aronhold'sche Process kein Iterationsprocess mehr, d. h. $\delta^2 i$ wird nicht in derselben Weise aus δi erhalten, wie δi aus i. Denn wenden wir in diesem Falle auf δi den Aronhold'schen Process an, so erhalten wir:

$$\delta\{\delta i\} = \delta\left\{\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0}\bar{\alpha}_0 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1}\bar{\alpha}_1 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_2}\bar{\alpha}_2 + \cdots + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_n}\bar{\alpha}_n\right\}$$

$$= \frac{\partial^2 i}{\partial \bar{a}_0^2}\bar{\alpha}_0^2 + \frac{\partial^2 i}{\partial \bar{a}_1^2}\bar{\alpha}_1^2 + \cdots + 2\frac{\partial^2 i}{\partial \bar{a}_0 \partial \bar{a}_1}\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1 + 2\frac{\partial^2 i}{\partial \bar{a}_0 \partial \bar{a}_2}\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0}\left\{\frac{\partial \bar{\alpha}_0}{\partial \bar{a}_0}\bar{\alpha}_0 + \frac{\partial \bar{\alpha}_0}{\partial \bar{a}_1}\bar{\alpha}_1 + \cdots + \frac{\partial \bar{\alpha}_0}{\partial \bar{a}_n}\bar{\alpha}_n\right\} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_n}\left\{\frac{\partial \bar{\alpha}_n}{\partial \bar{a}_0}\bar{\alpha}_0 + \frac{\partial \bar{\alpha}_n}{\partial \bar{a}_1}\bar{\alpha}_1 + \cdots + \frac{\partial \bar{\alpha}_n}{\partial \bar{a}_n}\bar{\alpha}_n\right\},$$

oder

$$\delta\{\delta i\} = \sum_{\substack{k=0\\ \sigma=0}}^{\substack{\sigma=n\\ k=n}} \frac{\partial^2 i}{\partial \bar{a}_k \partial \bar{a}_\sigma}\cdot \bar{\alpha}_k\bar{\alpha}_\sigma + \sum_0^n \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_k}\sum_0^n \frac{\partial \bar{\alpha}_i}{\partial \bar{a}_k}\bar{\alpha}_k.$$

Nun ist aber nach Gleichung (II) Nr. 57 das erste Glied rechts identisch mit $2!\,\delta^2 i$, und anderntheils ist nach der Definition des Aronhold'schen Processes:

$$\sum_0^n \frac{\partial \bar{\alpha}_i}{\partial \bar{a}_k}\bar{\alpha}_k = \delta\alpha_i.$$

Demnach erhält man:

$$2!\,\delta^2 i = \delta(\delta i) - \sum_0^n \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_k}\delta\bar{\alpha}_k.$$

In derselben Weise findet man weiter:

$$3!\,\delta^3 i = \delta(2!\,\delta^2 i) - 2\sum_0^n \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_k \partial \bar{a}_i}\bar{\alpha}_k\delta\alpha_i$$

$$4!\,\delta^4 i = \delta(3!\,\delta^3 i) - 3\sum_0^n \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_k \partial \bar{a}_i \partial \bar{a}_\varrho}\bar{\alpha}_k\bar{\alpha}_i\delta\bar{\alpha}_\varrho$$

. . . .

$$k!\,\delta^k i = \delta((k-1)!\,\delta^{k-1} i) - (k-1)\sum_0^n \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_{i_1}\partial \bar{a}_{i_2}\cdots \partial \bar{a}_{i_{k-1}}}\bar{\alpha}_{i_1}\bar{\alpha}_{i_2}\cdots\delta\bar{\alpha}_{i_{k-1}}.$$

Dies ist die Recursionsformel für die Coefficienten $\delta^k i$ in der Entwicklung

$$J = i + \lambda\delta i + \lambda^2\delta^2 i + \cdots \lambda^\nu\delta^\nu i,$$

sobald die beiden Formen f und φ zu einander in covariantem Verhältnisse stehen. Ich werde im nächsten Paragraphen Nr. 72 noch in ausführlicher Weise auf diese Recursionsformel zurückkommen. Hier will ich nur noch ein Beispiel zur Erläuterung anfügen, um auch für diesen Fall die Wirkung des Aronhold'schen Processes an einem symbolischen Product zu zeigen.

63. *Beispiel.* Wir hatten in Nr. 37 jene drei Covarianten einer cubischen Form $f = a_x^3$ kennen gelernt, durch welche sich in Verbindung mit f alle übrigen rational und ganz darstellen lassen. Sie waren (vergl. auch Nr. 9 und 39):

$$\begin{aligned} f &= a_x^3 \\ \varDelta &= (f, f)^2 = (ab)^2 a_x b_x \\ Q &= (f, (f, f)^2) = (c\varDelta)\, c_x^2 \varDelta_x = (ab)^2 (cb) c_x^2 a_x \\ R &= (\varDelta, \varDelta)^2 = (ab)^2 (cd)^2 (ac)(bd). \end{aligned}$$

Die Covariante Q ist wie f vom dritten Grade in den Variabeln, und man kann sich demnach wieder die Aufgabe stellen, irgend eine dieser drei Covarianten für die Form

$$F = f + \lambda Q$$

zu berechnen, etwa gerade die Form $Q_{f+\lambda Q}$ selbst. Sie wird dann dargestellt sein durch

$$Q_{f+\lambda Q} = Q + \lambda \delta Q + \lambda^2 \delta^2 Q + \lambda^3 \delta^3 Q. \tag{I}$$

Die Coefficienten δQ, $\delta^2 Q$, $\delta^3 Q$ lassen sich durch die eben aufgestellten Recursionsformeln berechnen. Zu dem Zwecke ist es nöthig, zunächst die Werthe von

$$\delta f, \ \delta \varDelta, \ \delta Q, \ \delta R$$

zu ermitteln. Man erhält nach Nr. 60 und 61

$$\delta f = \sum \frac{\partial f}{\partial \bar{a}_i} \bar{Q}_i = Q \tag{1}$$

$$\delta \varDelta = \delta \{(ab)^2 a_x b_x\} = 2(aQ)^2 a_x Q_x = (f, Q)^2 = \Psi \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \delta Q &= \delta \left\{(c\varDelta) c_x^2 \varDelta_x\right\} = (c\Psi) c_x^2 \Psi_x + (Q\varDelta) Q_x^2 \varDelta_x = (f, (f, Q)^2) + (Q, \varDelta) \\ &= (f, (f, Q)^2) + ((f, \varDelta), \varDelta), \end{aligned} \tag{3}$$

oder weil die Functionaldeterminante

$$((f, \varDelta), \varDelta) = -\frac{1}{2} (\varDelta, \varDelta)^2 \cdot f + \frac{2}{3} (f, \varDelta)^2 \cdot \varDelta,$$

[vergl. Nr. 52 (II)], so wird endlich wegen $(\varDelta, \varDelta)^2 = R$,

$$\delta Q = (f, (f, Q)^2) - \frac{1}{2} R \cdot f + \frac{2}{3} \cdot (f, \varDelta)^2 . \varDelta.$$

Ferner ist:

$$\delta R = \delta (\varDelta, \varDelta)^2 = 2(\varDelta, \Psi)^2 = 2(\varDelta, (f, Q)^2). \tag{4}$$

Nun ist aber, wie wir in der Theorie der cubischen Formen sehen werden [vergl. Nr. 145 (I) und Nr. 146 (II)], oder wie man sich auch unschwer direct unsymbolisch berechnet:

$$(f, Q)^2 = 0 \quad \text{und} \quad (f, \Delta)^2 = 0. \tag{5}$$

Daher liefert der Aronhold'sche Process:

$$\left.\begin{aligned} \delta f &= Q \\ \delta \Delta &= 0 \\ \delta Q &= -\tfrac{1}{2} R \cdot f \\ \delta R &= 0 \end{aligned}\right\} . \tag{II}$$

64. Die Coefficienten $\delta^2 Q$ und $\delta^3 Q$ in (I) erhält man nun durch die folgenden Betrachtungen. Es ist nach Nr. 62:

$$2!\,\delta^2 Q = \delta(\delta Q) - \sum \frac{\partial Q}{\partial \bar{a}_k}\, \delta \bar{Q}_k.$$

Da aber $\delta Q = -\frac{1}{2} R \,.\, f$, und demnach $\delta \bar{Q}_k = -\frac{1}{2} R \cdot \bar{a}_k$ sein muss, so geht die letzte Gleichung über in:

$$2!\,\delta^2 Q = -\frac{1}{2} R \cdot \delta f - \frac{1}{2} f \cdot \delta R + \frac{R}{2} \sum \frac{\partial Q}{\partial \bar{a}_k}\, \bar{a}_k.$$

Nach den Gleichungen (II) ist $\delta f = Q$, $\delta R = 0$, und nach dem Euler'schen Satze ist, weil Q vom dritten Grade in den Coefficienten $\bar{a}_k$:

$$\sum \frac{\partial Q}{\partial \bar{a}_k}\, \bar{a}_k = 3\,Q.$$

Daher wird:

$$\delta^2 Q = -\frac{1}{4} R \cdot Q + \frac{3}{4} R \cdot Q = \frac{1}{2} R \cdot Q. \tag{III}$$

Tragen wir endlich diese Werthe von $2!\,\delta^2 Q$ und $\delta \bar{Q}_k$ in die Gleichung

$$3!\,\delta^3 Q = \delta(2!\,\delta^2 Q) - 2 \sum \frac{\partial Q}{\partial \bar{a}_k \partial \bar{a}_i}\, \bar{Q}_k\, \delta \bar{Q}_k$$

ein, so kommt:

$$3!\,\delta^3 Q = \delta(R \cdot Q) + R \sum \frac{\partial Q}{\partial \bar{a}_k \partial \bar{a}_i}\, \bar{Q}_k \cdot \bar{a}_i$$

$$= -\frac{R^2}{2} \cdot f + R \sum \frac{\partial \left(\frac{\partial Q}{\partial \bar{a}_k}\right)}{\partial \bar{a}_i}\, \bar{a}_i \cdot \bar{Q}_k.$$

Weil aber $\frac{\partial Q}{\partial \bar{a}_k}$ vom zweiten Grade in den Coefficienten und daher nach dem Euler'schen Satze:

$$\sum \frac{\partial\left(\frac{\partial Q}{\partial \bar{a}_k}\right)}{\partial \bar{a}_i} a_i \cdot \bar{Q}_k = 2 \sum \frac{\partial Q}{\partial \bar{a}_k} \bar{Q}_k = 2\,\delta Q = -Rf,$$

so wird

$$\delta^3 Q = -\frac{1}{4} R^2 f.$$

Die cubische Covariante der Form $f + \lambda Q$ hat demnach die Form:

$$Q_{f+\lambda Q} = Q - \frac{R}{2} f \lambda + \frac{R}{2} Q \lambda^2 - \frac{R^2}{4} f \lambda^3, \qquad \text{(IV)}$$

oder

$$Q_{f+\lambda Q} = \left(1 + \frac{R}{2} \cdot \lambda^2\right)\left(Q - \frac{R}{2} f \cdot \lambda\right). \qquad \text{(V)}$$

§ 6. Die Combinanten.

65. *Definition der Combinante.* Der zuletzt betrachtete Aronhold'sche Process ist auch noch dadurch von Bedeutung geworden, dass durch ihn eine Reihe simultaner Covarianten i eines Systems von Formen $f, \varphi, \psi \ldots$ gleichen Grades in x gekennzeichnet werden kann, welche bei vielen Untersuchungen, insbesondere der Geometrie, eine hervorragende Rolle spielen. Es sind das die unter dem Namen Combinanten bekannten Formen, welche wir folgender Weise definiren können:

> „Sind $f, \varphi, \psi \ldots$ irgend welche Formen n^{ten} Grades, so ist eine simultane Covariante i derselben Combinante, sobald sie bei Anwendung des Aronhold'schen Processes identisch verschwindet."

Die Combinanten genügen also, wenn wir der Einfachheit halber nur ein System von zwei Formen $f = a_x^n$ und $\varphi = \alpha_x^n$ voraussetzen, der Differentialgleichung

$$\delta i = \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0} \bar{\alpha}_0 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1} \bar{\alpha}_1 + \cdots + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_n} \bar{\alpha}_n = 0. \qquad \text{(I)}$$

66. *Eigenschaft der Combinante, wenn das gegebene System $f, \varphi, \psi \ldots$ aus unabhängigen Formen besteht.* Sind nun die gegebenen Formen f und φ von einander völlig unabhängig, so ergiebt sich aus dieser Definition sofort eine wichtige Eigenschaft für die Combinanten. Sie kann in dem Satze ausgesprochen werden:

> „Die Combinante i von f und φ ändert sich nicht, wenn man f durch $f + \lambda\varphi$ ersetzt, d. h., wenn J die entsprechende Form von $f + \lambda\varphi$ und f ist, so besteht die Gleichung:
>
> $$i = J.\text{"}$$

Denn in diesem Falle ist J eine Function der Grössen $\bar{a}$, $\bar{\alpha}$, λ und zwar in der Verbindung $\bar{a}_k + \lambda\bar{\alpha}_k$. Wendet man also auf J den Aronhold'schen Process an, indem man J nach $\bar{a}_k + \lambda\bar{\alpha}_k$ differentiirt und die Incremente durch $\bar{\alpha}_k$ ersetzt, so muss nach Definition J der Differentialgleichung genügen:

$$\frac{\partial J}{\partial(\bar{a}_0 + \lambda\bar{\alpha}_0)}\bar{\alpha}_0 + \frac{\partial J}{\partial(\bar{a}_1 + \lambda\bar{\alpha}_1)}\bar{\alpha}_1 + \cdots = \delta J = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber nichts anderes als der Differentialquotient von J nach λ; demnach ist $\frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0$, d. h. J von λ unabhängig. Entwickelt man daher wie im vorigen Paragraphen J nach Potenzen von λ

$$J = i + \lambda\delta i + \lambda^2\delta^2 i + \cdots + \lambda^\nu \delta^\nu i, \tag{II}$$

so müssen die Coefficienten der Potenzen von λ einzeln verschwinden, was man auch bei der Unabhängigkeit von f und φ direct aus $\delta i = 0$ hätte folgern können. Gleichung (II) reducirt sich also auf $J = i$, wie behauptet war.

67. *Beispiele.* Solche Combinanten sind alle ungeraden Ueberschiebungen zweier Formen

$$f = a_x^n, \quad \varphi = \alpha_x^n,$$

also die Covarianten

$$\pi = (a\alpha)\, a_x^{n-1}\alpha_x^{n-1}, \quad (a\alpha)^3 a_x^{n-3}\alpha_x^{n-3}, \quad \cdots \quad (a\alpha)^{2\nu+1} a_x^{n-(2\nu+1)}\alpha_x^{n-(2\nu+1)}.$$

Denn durch Process $\delta\pi$ erhält man:

$$\begin{aligned}\delta\pi &= \delta\left[(a\alpha)^{2\nu+1} a_x^{n-(2\nu+1)}\alpha_x^{n-(2\nu+1)}\right] \\ &= (\beta\alpha)^{2\nu+1} \beta_x^{n-(2\nu+1)}\alpha_x^{n-(2\nu+1)}.\end{aligned}$$

Dieses symbolische Product verschwindet aber identisch, da es durch Vertauschung der gleichwerthigen Symbole α und β nur sein Zeichen ändert. Aus denselben Gründen folgt, dass die geraden Ueberschiebungen $(f, \varphi)^{2\mu}$ keine Combinanten sein können.

Die Gesammtheit aller Combinanten zweier Formen $f = a_x^n$ und $\varphi = \alpha_x^n$ ergiebt sich wie Gordan im Bd. V der Math. Annalen gezeigt hat, aus der einen Form

$$P = f(x)\varphi(y) - \varphi(x) f(y) = \begin{vmatrix} a_x^n, & \alpha_x^n \\ a_y^n, & \alpha_y^n \end{vmatrix}.$$

Er nannte sie „Fundamentalcombinante" von f und φ. Dass sie in der That eine Combinante ist, erkennen wir unmittelbar, wenn wir P in der Gestalt schreiben:

$$P = \begin{vmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_n \\ \bar{\alpha}_0 & \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 & \cdots & \bar{\alpha}_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1^n, & \binom{n}{1} x_1^{n-1} x_2, & \cdots & x_2^n \\ y_1^n, & \binom{n}{1} y_1^{n-1} y_2, & \cdots & y_2^n \end{vmatrix}$$

$$= \sum \binom{n}{1} \binom{n}{k} (\bar{a}_i \bar{\alpha}_k) \left\{ x_x^{n-k} x_2^i y_x^{n-i} y_2^k - x_1^{n-k} x_2^k y_1^{n-i} y_2^i \right\},$$

eine Darstellung, wie wir sie in Bd. 1 Nr. 151 gegeben haben. Denn der Aronhold'sche Process verwandelt die Determinanten $(\bar{a}_i \bar{\alpha}_k)$ in die verschwindenden Determinanten $(\bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_k)$. Wir werden im nächsten Paragraphen sehen, wie sich diese Form P nach Potenzen von (xy) entwickeln lässt, deren Coefficienten gerade die oben erwähnten ungeraden Ueberschiebungen $(f, \varphi)^{2\nu+1}$ sind.

In gleicher Weise hat Gordan a. a. O. gezeigt, dass die Fundamentalcombinante von p Formen $f_1, f_2, \ldots f_p$ dargestellt ist durch:

$$P = \begin{vmatrix} f_1(x), & f_2(x), & f_3(x) \cdots f_p(x) \\ f_1(y), & f_2(y), & f_3(y) \cdots f_p(y) \\ f_1(z), & f_2(z), & \ldots \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(u), & \ldots & \ldots f_p(u) \end{vmatrix}.$$

Sind z. B. $f = a_x^2$, $\varphi = b_x^2$, $\psi = c_x^2$ drei quadratische Formen, so ist ihre Fundamentalcombinante

$$P = \begin{vmatrix} a_x^2, & b_x^2, & c_x^2 \\ a_y^2, & b_y^2, & c_y^2 \\ a_z^2, & b_z^2, & c_z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^2, & a_1 a_2, & a_2^2 \\ b_1^2, & b_1 b_2, & b_2^2 \\ c_1^2, & c_1 c_2, & c_2^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1^2, & 2x_1 x_2, & x_2^2 \\ y_1^2, & 2y_1 y_2, & y_2^2 \\ z_1^2, & 2z_1 z_2, & z_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= (ab)(ac)(bc) \cdot (xy)(xy)(yz).$$

Abgesehen von den identischen Covarianten (xy), (xz), (yz) besitzen demnach drei quadratische Formen nur eine Combinante, die schon früher berechnete Form (vergl. Nr. 7)

$$R = (ab)(ac)(bc).$$

So ist a. a. O. auch gezeigt, dass für drei Formen dritten Grades $f = a_x^3$, $\varphi = b_x^3$, $\psi = c_x^3$ die Fundamentalcombinante P sich auf die eine Form

$$Q = (ab)(ac)(bc)\, a_x b_x c_x$$

reducirt. Alle Covarianten von Q sind dann selbstverständlich Combinanten von f, φ und ψ.

68. *Ueber eine formale Eigenschaft aller Combinanten.* Aus der Bedingung $\delta i = 0$, welcher eine simultane Covariante genügen muss, damit sie Combinante ist, kann man schliessen, dass diese Combinanten

auch unsymbolisch vor den übrigen Covarianten sich auszeichnen. Denn dieser Bedingung genügen beispielsweise sicher alle jene Covarianten zweier Formen $f = a_x^n$, $\varphi = \alpha_x^n$, welche die Coefficienten $\bar{a}_i$, $\bar{\alpha}_i$ derselben nur in den zweigliedrigen Determinanten $(\bar{a}_i\ \bar{\alpha}_k)$ enthalten; dieselben sind demnach stets Combinanten. Also ist auch die Resultante $R_{f,\varphi}$ dieser beiden Formen Combinante, da sie sich in der Bézout'schen Determinantenform gerade als Function dieser Grössen $(\bar{a}_i\ \bar{\alpha}_k)$ darstellt. In der That haben wir auch im ersten Bande für sie die aus $\delta i = 0$ resultirende Eigenschaft $J = i$ bewiesen, indem wir dort (vergl. § 11 Nr. 146) zeigten, dass $R_{f,\varphi} = R_{f+\lambda\varphi,\varphi}$ ist.

In derselben Weise schliessen wir, dass die simultanen Covarianten von p Formen $f_1, f_2, \cdots f_p$, welche die Coefficienten derselben nur in den p-gliedrigen Determinanten $\left(\bar{a}_{i_1}^{(1)}\ \bar{a}_{i_2}^{(2)}\ \bar{a}_{i_3}^{(3)} \cdots \bar{a}_{i_p}^{(n)}\right)$ enthalten, Combinanten sein müssen. Denn der Aronhold'sche Process bewirkt, dass jede dieser Determinanten zwei gleiche Zeilen oder Colonnen erhält; in Folge dessen verschwinden sie sämmtlich und mit ihnen die betreffende In- oder Covariante.

Verbinden wir nun aber mit diesen Schlüssen den Gordan'schen Satz, dass aus der Fundamentalcombinante

$$P = (a_{1x}^n,\ a_{2y}^n,\ a_{3z}^n, \ldots)$$

überhaupt alle Combinanten von p Formen f_i abgeleitet werden können, einen Satz, in Bezug auf dessen Beweis ich auf die mehrmals schon citirte Abhandlung in Bd. V der Math. Ann. verweisen muss, so ergiebt sich hieraus:

> „Jede Combinante von p binären Formen f_i gleichen Grades in x ist eine solche Function der wirklichen Coefficienten von f_i, welche dieselben nur in den Determinantenverbindungen $\left(\bar{a}_{i_1}^{(1)}\ \bar{a}_{i_2}^{(2)}\ \bar{a}_{i_3}^{(3)} \cdots \bar{a}_{i_p}^{(p)}\right)$ enthält."

69. *Covarianten mit Combinanteneigenschaft binärer von einander abhängiger Formen.* Sind nun die gegebenen Formen nicht, wie wir bisher annahmen, von einander unabhängig, sondern beispielsweise zu einander covariant, so sind zwar immer noch jene Co- und Invarianten i, welche der Gleichung $\delta i = 0$ genügen, Combinanten der gegebenen Formen; aber dieselben haben alsdann nicht mehr die Eigenschaft $J = i$. Wir können alsdann zur Zeit ihre Eigenschaften überhaupt nicht allgemein discutiren.

Nur ein specieller Fall ist bisher im binären wie im ternären Gebiete untersucht. Das sind die Combinanten einer Form f und ihrer Covariante gleichen Grades φ, für den Fall, dass, wenn M eine

Invariante von f, zwischen den beiden Formen die Wechselbeziehung stattfindet:

$$\left.\begin{aligned}\delta f &= \varphi \\ \delta\varphi &= M\cdot f\end{aligned}\right\}. \tag{I}$$

Ich habe bereits bei Gelegenheit der Darstellung des Aronhold-schen Processes ein diesbezügliches Beispiel gegeben. Die Form $f = a_x^3$ hat eine Covariante gleichen Grades $Q = (ab)^2(cb)a_x c_x^2$ und wir sahen damals, dass

$$\delta f = Q$$
$$\delta Q = -\frac{R}{2}\cdot f,$$

wobei R die Invariante $(\varDelta, \varDelta)^2$ der Form f ist. Ebenso werden wir später bei den Formen vierten Grades in der Form $f = a_x^4$ und ihrer Hesse'schen Covariante $H = (ab)^2 a_x^2 b_x^2$ zwei covariante Formen erhalten, welche in derselben Wechselbeziehung stehen, nämlich

$$\delta f = H$$
$$\delta H = \frac{i}{3}\cdot f,$$

wobei i die Invariante $(ab)^4$ von f bedeutet.

Besitzt nun in einem solchen Falle f eine Invariante oder Covariante i, so beschaffen, dass $\delta i = 0$, so haben wir, wenn auch nicht direct die gleichen, so doch analoge Bedingungen vor uns, wie wir sie ursprünglich zur Definition der Combinante voraussetzten. Wir stellen uns demnach auch die analoge Frage: In welcher Beziehung steht die entsprechende Invariante J von $f + \lambda\varphi$ zur ursprünglichen i von f?

In dem ersten der eben angeführten Beispiele haben wir bereits die Hesse'sche Form $\varDelta$ von $f = a_x^3$ als eine solche Form erkannt, für welche $\delta\varDelta = 0$ (vergl. Nr. 63, II). Es ist nun aber nicht mehr wie bei den eigentlichen Combinanten $\varDelta_{f+\lambda\varphi} = \varDelta$; vielmehr erhalten wir:

$$\varDelta_{f+\lambda\varphi} = \varDelta + \lambda\,\delta\varDelta + \lambda^2\delta^2\varDelta,$$

oder weil $\delta\varDelta = 0$, und demnach (vergl. Nr. 62)

$$2\,\delta^2\varDelta = \delta(\delta\varDelta) - \sum \frac{\partial\varDelta}{\partial\bar{a}_k}\,\delta\bar{\alpha}_k$$
$$= \frac{R}{2}\sum \frac{\partial\varDelta}{\partial\bar{a}_k}\,\bar{a}_k = R\cdot\varDelta,$$

so kommt:

$$\varDelta_{f+\lambda\varphi} = \left(1 + \frac{R}{2}\lambda^2\right)\cdot\varDelta. \tag{II}$$

Was sich aber hier in dem speciellen Beispiel ergeben hat, lässt sich auch allgemein beweisen, sobald die oben gegebenen Bedingungen

(I) erfüllt sind, nämlich die Gleichung:

$$J_{f+\lambda\varphi} = u \cdot i,$$

wobei u eine Function des Parameters λ und jener Invarianten ist, die sich aus M durch fortgesetztes Deltairen ergeben.

70. *Beweis der Relation* $J_{f+\lambda\varphi} = u \cdot i$. Wir können diese aus den Bedingungen (I) in Nr. 69 resultirende Eigenschaft auf zwei Arten beweisen. Ich will sie zunächst direct durch Rechnung ableiten. Es ist, wie wir schon in Nr. 56 (I) erwähnt haben:

$$J_{f+\lambda\varphi} = i + \lambda\delta i + \lambda^2\delta^2 i + \cdots + \lambda^\nu\delta^\nu i, \tag{I}$$

wobei für die Coefficienten nach Nr. 62 die Recursionsformel gilt:

$$\delta^k i = \frac{(k-1)!}{k!}\,\delta(\delta^{k-1} i) - \frac{k-1}{k!}\sum \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_{i_1}\,\partial \bar{a}_{i_2}\cdots\partial \bar{a}_{i_{k-1}}}\cdot \bar{\alpha}_{i_1}\bar{\alpha}_{i_2}\cdots\delta\bar{\alpha}_{i_{k-1}}.$$

Da aber nach Voraussetzung $\delta\varphi = M\cdot f$ und demnach

$$\delta\bar{\alpha}_{i_k} = M.\bar{a}_{i_k},$$

so wird:

$$\delta^k i = \frac{1}{k}\,\delta(\delta^{k-1} i) - \frac{(k-1)M}{k!}\sum \bar{\alpha}_{i_1}\bar{\alpha}_{i_2}\cdots\bar{\alpha}_{i_{k-2}}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial i}{\partial\bar{a}_{i_1}\partial\bar{a}_{i_2}\cdots\partial\bar{a}_{i_{k-2}}}\right)}{\partial\bar{a}_{i_{k-1}}}\cdot\bar{a}_{i_{k-1}}$$

$$= \frac{1}{k}\,\delta(\delta^{k-1} i) - \frac{(\nu-k+2)\cdot(k-1)M}{k!}\sum\frac{\partial i}{\partial\bar{a}_{i_1}\partial\bar{a}_{i_2}\cdots\partial\bar{a}_{i_{k-2}}}\cdot\bar{\alpha}_{i_1}\bar{\alpha}_{i_2}\cdots\bar{\alpha}_{i_{k-2}}$$

$$= \frac{1}{k}\,\delta(\delta^{k-1} i) - \frac{(\nu-k+2)(k-1)M\cdot(k-2)!}{k!}\,\delta^{k-2} i,$$

oder endlich:

$$\delta i^k = \frac{1}{k}\,\delta(\delta^{k-1} i) - \frac{\nu-k+2}{k}\,M\cdot\delta^{k-2} i. \tag{II}$$

Legen wir hier der Grösse k der Reihe nach alle Werthe 1, 2, 3 ... etc. bei, so erhalten wir:

$$\delta i = 0$$

$$\delta^2 i = \frac{1}{2}\,\delta(\delta i) - \frac{\nu}{2}M\delta^0 i = -\frac{\nu}{2}M\cdot i$$

$$\delta^3 i = \frac{1}{3}\,\delta(\delta^2 i) - \frac{\nu-1}{3}M\delta i = -\frac{\nu}{6}\,i\cdot\delta M$$

$$\delta^4 i = \frac{1}{4}\,\delta(\delta^3 i) - \frac{\nu-2}{4}M\delta^2 i = -\frac{\nu}{24}\,i\cdot\delta^2 M + \frac{\nu(\nu-2)}{8}M^2\cdot i, \quad \text{etc.}$$

Man erkennt, dass rechts stets wieder der Factor i auftritt, gerade weil $\delta i = 0$. Der Coefficient jeder Potenz von λ enthält sonach diesen Factor.

Die Gleichung (I) kann also in der That auf die Form gebracht werden:
$$J_{f+\lambda\varphi} = u \cdot i,$$
wo u eine Function der Grössen λ, M und jener Invarianten ist, in welche H durch den Aronhold'schen Process übergeht.

71. *Zweiter Beweis für diese Relation.* Die Eigenschaft $J_{f+\lambda\varphi} = u \cdot i$ geht auch direct aus der Differentialgleichung $\partial i = 0$ durch Integration hervor, wenn wir dieselbe nur vorher geeignet umformen. Zu dem Zwecke müssen wir uns aber zunächst die Frage vorlegen: Was wird aus der Covariante φ von f, wenn f in $f + \lambda\varphi$ übergeht, oder mit andern Worten: Was ist $\varphi_{f+\lambda\varphi}$?

Die Antwort auf die Frage giebt wiederum die Identität
$$\varphi_{f+\lambda\varphi} = \varphi + \lambda\,\delta\varphi + \lambda^2\delta^2\varphi + \cdots + \lambda^\varrho \delta^\varrho \varphi. \qquad \text{(I)}$$
Die Coefficienten $\delta^k\varphi$ gehen aus der Recursionsformel
$$\delta^k\varphi = \frac{1}{k}\,\delta(\delta^{k-1}\varphi) - \frac{\varrho - k + 2}{k}\,M\delta^{k-2}\varphi$$
hervor, die ich in Nr. 70 entwickelt habe. Ersetzen wir hierin k durch $2, 3, \ldots \varrho$, so erhalten wir, da
$$\delta\varphi = M.f,$$
der Reihe nach:
$$\delta^2\varphi = \frac{1}{2}\,f \cdot \delta M + \frac{1-\varrho}{2}\,M \cdot \varphi$$
$$\delta^3\varphi = \frac{1}{6}\,f \cdot \{\delta^2 M + 3(1-\varrho)M^2\} + \frac{2-\varrho}{6}\,\delta M \cdot \varphi., \text{ etc.}$$

Es ergiebt sich, dass jeder Coefficient $\delta^k\varphi$ eine lineare Function der beiden Formen f und φ ist, was a priori einzusehen war, da durch den Aronhold'schen Process f in φ und φ in f verwandelt wird. Die obige Identität (I) lässt sich demnach in der Gestalt [vergl. Nr. 64 (IV)]
$$\varphi_{f+\lambda\varphi} = A \cdot f + B \cdot \varphi$$
schreiben, worin A und B Functionen der Grössen λ, der Invariante M und der daraus durch Deltairen entstehenden Formen sind. Wenn also f durch $f + \lambda\varphi$ ersetzt wird, so geht unter den Voraussetzungen $\delta f = \varphi$, $\delta\varphi = M \cdot f$, die Covariante φ von f in eine Form desselben Büschels $f + \lambda\varphi$ über, und die nämliche Stellung, welche eine Covariante oder Invariante i von f zu den Formen f und φ einnimmt, behauptet auch J in Bezug auf $f + \lambda\varphi$ und $\varphi_{f+\lambda\varphi} = Af + B\varphi$.

Schreiben wir der Homogenität halber statt $f + \lambda\varphi$ in der Folge $\lambda_1 f + \lambda_2\varphi$, so besitzt diese Form die Coefficienten
$$\bar{a}_k\lambda_1 + \bar{\alpha}_k\lambda_2;$$
entsprechend besitzt $\varphi_{\lambda_1 f+\lambda_2\varphi}$ die Coefficienten:
$$\bar{a}_k A + \bar{\alpha}_k B.$$

72. *Umformung der Differentialgleichung* $\delta i = 0$. Ist nun i entweder direct eine rationale Combinante von f und φ, oder auch nur schlechthin eine Covariante, rational in den Coefficienten von f von der Eigenschaft, dass $\delta i = 0$ (wie in dem Beispiel Nr. 69 die Form Δ), so genügt auch die entsprechende Form J von $\lambda_1 f + \lambda_2 \varphi$ der Differentialgleichung

$$\bar{\partial} J = 0,$$

wenn nur der Process $\bar{\partial} J$ auch in der entsprechenden Form:

$$\bar{\partial} J = \frac{\partial J}{\partial(\lambda_1 \bar{a}_0 + \lambda_2 \bar{\alpha}_0)} \cdot (A \bar{a}_0 + B \bar{\alpha}_0) + \frac{\partial J}{\partial(\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{\alpha}_1)} \cdot (A \bar{a}_1 + B \bar{\alpha}_1) + \cdots$$

ausgeführt wird. Schreibt man die rechte Seite dieser Gleichung in der Gestalt:

$$A \left\{ \frac{\partial J}{\partial(\lambda_1 \bar{a}_0 + \lambda_2 \bar{\alpha}_0)} \cdot \bar{a}_0 + \frac{\partial J}{\partial(\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{\alpha}_1)} \cdot \bar{a}_1 + \cdots \right\} +$$
$$B \left\{ \frac{\partial J}{\partial(\lambda_1 \bar{a}_0 + \lambda_2 \bar{\alpha}_0)} \cdot \bar{\alpha}_0 + \frac{\partial J}{\partial(\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{\alpha}_1)} \cdot \bar{\alpha}_1 + \cdots \right\},$$

so erkennt man die Factoren von A und B als die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial J}{\partial \lambda_1}$, $\frac{\partial J}{\partial \lambda_2}$. Die Differentialgleichung $\bar{\partial} J = 0$ lässt sich also auch durch

$$A \frac{\partial J}{\partial \lambda_1} + B \frac{\partial J}{\partial \lambda_2} = 0 \qquad \text{(II)}$$

darstellen. Diese Differentialgleichung hatte bereits Aronhold als jene Gleichung erkannt, welcher die Combinanten zweier Formen f und φ genügen, wenn φ Covariante von f. Das war der Grund, weshalb Gordan den Process des Deltairens als Aronhold'schen Process bezeichnet. Aus ihr können wir nun direct die Combinanteneigenschaft

$$J = u \cdot i$$

herleiten.

73. Denn ist g irgend eine particuläre Lösung dieser Gleichung

$$A \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_1} + B \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_2} = 0,$$

so muss gemäss der Theorie der Differentialgleichungen die allgemeine Lösung J eine ganze Function

$$J = F(g)$$

dieser speciellen Lösung g sein.

Um nun eine solche Lösung g zu finden, gehen wir von irgend einer Combinante von f und φ aus, etwa von der Functionaldeterminante $\vartheta = (f, \varphi)$. Es ist dann

$$\vartheta_{\lambda_1 f + \lambda_2 \varphi} = (\lambda_1 f + \lambda_2 \varphi,\ Af + B\varphi)$$
$$= (f, \varphi) \cdot \{\lambda_1 B - \lambda_2 A\}.$$

Die Form $\vartheta_{\lambda_1 f + \lambda_2 \varphi}$ ist homogen in λ_1 und λ_2. Demnach auch die Form $\lambda_1 B - \lambda_2 A$, während (f, φ) von diesen Parametern völlig unabhängig ist; da $\vartheta_{\lambda_1 f + \lambda_2 \varphi}$ als Combinante der obigen Differentialgleichung genügt, so genügt ihr daher auch die specielle Form

$$g = \lambda_1 B - \lambda_2 A.$$

Dem Euler'schen Satz gemäss ist hierin:

$$A = -g_2 = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial g}{\partial \lambda_2},$$
$$B = \quad g_1 = \quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial g}{\partial \lambda_1}.$$

Nun ist J stets homogen in λ_1 und λ_2; es muss daher auch in der Gleichung

$$J = F(g)$$

die rechte Seite homogen sein, d. h. F muss sich auf eine Potenz der particulären Lösung g reduciren. Es ist also

$$J = g^\mu \cdot \text{Const.}$$

Um die Constante zu bestimmen, setzen wir $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$; dann geht J in i über, und weil $\vartheta_{\lambda_1 f + \lambda_2 \varphi}$ in ϑ sich verwandelt, auch g in 1. Es ist demnach

$$i = 1^\mu \cdot \text{Const.}$$

und folglich:

$$J = g^\mu \cdot i,$$

was zu zeigen war. [Vergl. das Beispiel in Nr. 69 (II).]

§ 7. Binäre Formen mit zwei und mehr Reihen cogredienter Variabler. (Process der Reihenentwicklung.)

74. *Symbolische Darstellung dieser Formen.* Wir haben uns bisher im Allgemeinen beschränkt auf die Untersuchung von Formen mit einer einzigen Reihe Variabler x_1 und x_2. Schon die einfachen Polaren derselben führten uns indess auf Formen mit zwei Reihen Variabler $x_1 x_2$, $y_1 y_2$, während durch die gemischten Polaren sogar Formen mit mehr als zwei Reihen cogredienter Variabler in den Kreis unserer Betrachtungen hereingezogen wurden. Bei der Wichtigkeit, welche diese Formen für die ganze Invariantentheorie haben, wird es nunmehr nothwendig, dieselben einer eingehenden Betrachtung zu unterstellen und insbesondere die Haupteigenschaft derselben zu constatiren, dass alle Co- und Invarianten von Formen mit mehreren Reihen cogredienter Variabler sich durch die Co- und Invarianten von Formen mit nur einer Reihe Veränderlicher darstellen lassen. Dies gilt auch noch, wenn die Veränderlichen x und y nicht direct cogredient sind, sondern beliebig zusammenhängen; es existiren eben dann lineare

Functionen z der y, welche cogredient zu den Variabeln x sind. Hier beschränken wir uns jedoch auf cogrediente Variable x und y.

Es sei die Form $F = F(x; y)$ eine rationale ganze und homogene Function der beiden cogredienten Variabeln x und y und zwar sei dieselbe in x homogen von der Dimension m, in y homogen von der Dimension n. Jedes Glied dieser Function hat, von einem Coefficienten abgesehen, die Form

$$x_1^{m-k} x_2^k \cdot y_1^{n-\lambda} y_2^\lambda. \tag{1}$$

Die Zahl der Glieder ist $(n+1)(m+1)$, da jedes der $(n+1)$ Glieder einer allgemeinen Function m^{ten} Grades in x mit immer andern und andern Functionen n^{ten} Grades in y multiplicirt sein kann.

Um eine solche Form symbolisch darstellen zu können, braucht man auch zwei Reihen von Coefficienten, die eine um ein Glied hinsichtlich der Factoren x, die andere um es hinsichtlich der Factoren y zu charakterisiren. Wir werden demnach als symbolischen Coefficienten des Gliedes (1) den Ausdruck wählen

$$r_1^{m-k} r_2^k \cdot s_1^{n-\lambda} s_2^\lambda. \tag{2}$$

Die Symbole r und s gehören unzertrennlich zusammen und der ganze Coefficient hat nur dann unsymbolische Bedeutung, wenn die Summe der Exponenten von r_1 und r_2 gleich m, die von s_1 und s_2 gleich n ist. Die Potenz eines solchen Coefficienten werden wir durch ein Product von Ausdrücken (2) charakterisiren, in welchem die einzelnen zusammengehörigen Factoren durch obere Indices von den übrigen unterschieden sind. So ist die dritte Potenz des Coefficienten (2) dargestellt durch:

$$r_1^{(1)^{m-k}} r_2^{(1)^k} s_1^{(1)^{n-\lambda}} s_2^{(1)^\lambda} \cdot r_1^{(2)^{m-k}} r_2^{(2)^k} s_1^{(2)^{n-\lambda}} s_2^{(2)^\lambda} \cdot r_1^{(3)^{m-k}} r_2^{(3)^k} s_1^{(3)^{n-\lambda}} s_2^{(3)^\lambda}.$$

Multipliciren wir die Ausdrücke (1) und (2) mit einander, versehen sie sodann mit dem Product der Binomialcoefficienten

$$\binom{m}{k}\binom{n}{\lambda} \tag{3}$$

und summiren alle Glieder, die aus diesem einen hervorgehen, indem man den Grössen k und λ alle zulässigen Werthe beilegt, so entsteht die symbolische Darstellung

$$F = (r_1 x_1 + r_2 x_2)^m (s_1 y_1 + s_2 y_2)^n = r_x^m s_y^n$$

einer Form F mit zwei Reihen cogredienter Variabler. In ihr kommt also erst der Verbindung von r und s eine reale Bedeutung zu, obwohl auch der Fall nicht ausgeschlossen zu werden braucht, dass F in die beiden wirklichen Factoren r_x^m und s_y^n zerfällt.



75. *Die Elementarcovarianten von F.* Unsere Aufgabe ist nun, die Covarianten einer solchen Function mit zwei Reihen Variabler zu untersuchen. Unter dieselben gehören jedenfalls wieder die symbolischen Producte, welche sich zusammensetzen:

α) aus den Factoren erster Art:

$$r_x, r_x^{(1)}, \ldots, s_x, s_x^{(1)}, \ldots; \quad r_y, r_y^{(1)}, \ldots, s_y, s_y^{(1)}, \ .$$

β) aus den Klammerfactoren:

$$(rs), (r^{(1)}r), (rs^{(1)}), (ss^{(1)}), \ldots$$

Soll das symbolische Product unsymbolische Bedeutung haben, dann müssen die Symbole $r^{(i)}$ in m und die Symbole $s^{(i)}$ in n Factoren vorhanden sein.

Die einfachsten unter diesen Covarianten sind durch jene symbolischen Producte dargestellt, die nur ein einziges Symbolenpaar enthalten, d. h. also deren Coefficienten lineare Functionen der Coefficienten der Stammform sind. Dieser Fall trat bei den Formen mit nur einer Reihe von Variabeln nicht auf, da ja die einfachsten Covarianten dort die Ueberschiebungen $(ab)^k a_x^{m-k} b_x^{n-k}$ waren, die bereits vom Grade 2 in den Coefficienten sind.

Eine solche Covariante von F ist dargestellt durch das Product:

$$(rs)^\lambda r_x^g r_y^h s_x^k s_y^l, \tag{4}$$

wobei

$$\lambda + g + h = m$$
$$\lambda + k + l = n$$

ist. Unter diesen Covarianten sind wieder die einfachsten jene, in welchen $k = l = 0$ ist, also jene, die nur eine einzige Variabelnreihe enthalten. Ihr Symbol ist:

$$E = (rs)^\lambda r_x^{m-\lambda} s_x^{n-\lambda} = (\overline{rs})^\lambda .$$

Wir nennen sie in der Folge: Elementarcovarianten der Form F. Jede Form F besitzt $n + 1$ solcher Elementarcovarianten, wenn n der kleinere der beiden Exponenten m und n ist, nämlich die n Formen:

$$(\overline{rs})^0 = r_x^m s_x^n$$
$$(\overline{rs})^1 = (rs) r_x^{m-1} s_x^{n-1}$$
$$(\overline{rs})^2 = (rs)^2 r_x^{m-2} s_x^{n-2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(\overline{rs})^n = (rs)^n r_x^{m-n} .$$

Sie gehen durch Faltung aus den beiden Factoren r_x^m und s_x^n hervor.

76. *Zusammenhang der ursprünglichen Form mit ihren Elementarcovarianten.* Diese letzterwähnten Formen tragen ihren Namen deshalb, weil ihnen die wichtigste Rolle aller Covarianten von F zugetheilt ist. Es gilt nämlich der Satz:

„Die Form F ist eine simultane Covariante ihrer Elementarcovarianten."

Damit ist aber die Gesammtheit aller invarianten Formen von F auf die simultanen Formen dieser Elementarcovarianten zurückgeführt, und da dieselben nur eine Reihe von Variabeln enthalten, so ist die Theorie einer Form mit mehr Reihen cogredienter Variabler übereinstimmend mit der von simultanen Formen einer einzigen Reihe Variabler.

Wir beweisen den Satz in einer allgemeineren Fassung, indem wir zeigen, dass jedes Product

$$P = (rs)^\lambda r_x^{m-\lambda} s_y^{n-\lambda}, \quad \lambda = 0, 1, 2, \cdots n,$$

das aus Nr. 75 (4) für $r = k = 0$ entsteht, eine lineare Function der mit Potenzen von (xy) multiplicirten Polaren der Elementarcovarianten E ist. Die Form $F = r_x^m s_y^n$ ist dann das erste dieser Producte P für $\lambda = 0$. Der Grad einer jeden solchen mit $(xy)^\nu$ multiplicirten Polare der Elementarcovariante E

$$E_{y^\mu}(xy)^\nu = (\overline{rs})^\lambda_{y^\mu}(xy)^\nu$$

muss in x und y mit dem von F übereinstimmen, wenn F sich in der angegebenen Weise darstellen lässt, d. h. es muss sein:

$$m + n - 2\lambda - \mu + \nu = m$$

und ferner

$$\mu + \nu = n.$$

Ist alsdann die Form P eine lineare Function dieser Formen $(xy)^\nu E_{y^\mu}$, so ist sie damit auch simultane Covariante derselben.

77. *Beweis, dass F eine lineare Function der Polaren E_{y^μ} ist.* Wir werden den Beweis des im vorhergehenden Absatze aufgestellten fundamentalen Satzes zunächst ohne rechnerische Operationen führen, indem wir in den einzelnen Schlüssen genau wie in der Polarentheorie vorgehen.

Wir können die Form

$$P = (rs)^\lambda r_x^{m-\lambda} s_y^{n-\lambda}$$

betrachten als ein Glied der $(n-\lambda)^{\text{ten}}$ Polare von der Elementarcovariante

$$E = (\overline{rs})^\lambda = (rs)^\lambda r_x^{m-\lambda} s_x^{n-\lambda}.$$

Nach den Sätzen der Polarentheorie lässt sich P alsdann durch

die Polare der Elementarcovariante E plus einer Summe von Gliedern darstellen von der Form

$$G = (xy)(rs)^{\lambda+1} r_x^g r_y^h s_x^k s_y^l.$$

Diese Glieder enthalten ausser dem Factor (xy) auch noch einen Klammerfactor (rs) mehr als die Covariante $E = (rs)^\lambda$. Sie können demnach als Glieder einer Polare von

$$E_1 = (rs)^{\lambda+1} r_x^{m-\lambda-1} s_x^{n-\lambda-1}$$

aufgefasst werden, und zwar einer Polare niedrigeren Grades als die eben betrachtete. Alle diese Glieder lassen sich wieder durch die Polare der Elementarcovariante E_1 darstellen plus einer Summe von abermals einfacheren Producten, die wieder einen Factor (xy) und einen Factor (rs) mehr besitzen. Dieses Verfahren kann fortgesetzt werden, bis man auf die nullte Polare der $(n+1)^{\text{ten}}$ Elementarcovariante gelangt, womit das gewünschte Ziel erreicht ist. Die Form P ist alsdann durch eine lineare Function der Polaren ihrer Elementarcovarianten dargestellt, die nach steigenden Potenzen von (xy) fortschreitet.

Manche Untersuchungen lassen es wünschenswerth erscheinen, in dieser Reihe wiederum eine der Polaren E_{y^μ} durch eines ihrer Glieder und niedrigere Polaren zu ersetzen. Die äussere Form der Reihe bleibt hierbei unverändert, da sich die niedrigeren Polaren mit den bereits vorhandenen zusammenziehen lassen, so dass sich nur die numerischen Coefficienten der Reihe in anderer Weise darstellen.

Diese Entwicklung war unabhängig von dem Werthe λ; sie gilt also auch für $\lambda = 0$, d. h. für die Form

$$F = r_x^m s_y^n.$$

Es bleibt nur noch die Aufgabe zu erledigen, für diese einfachste Form mit zwei Reihen Veränderlicher die Coefficienten der einzelnen Glieder in independenter Weise aufzustellen.

78. *Die Reihenentwicklung von F ist eindeutig.* Ehe wir jedoch zur Berechnung der Coefficienten schreiten, wollen wir noch zeigen, dass sich F nur auf eine einzige Art in eine solche Reihe entwickeln lässt. Gäbe es nämlich zwei Entwicklungen für F, die nicht übereinstimmen:

$$F = \sum C'_\mu \cdot E_{y^\mu} \cdot (xy)^\nu$$

und

$$F = \sum C''_\mu \cdot E_{y^\mu} \cdot (xy)^\nu,$$

dann würde die Differenz beider eine Entwicklung für den Werth Null geben:

$$0 = \sum (C'_\mu - C''_\mu) E_{y^\mu} . (xy)^\nu.$$

Nehmen wir nun an $C'_{\mu_i} - C''_{\mu_i}$ sei die erste nicht verschwindende Differenz in dieser Entwicklung, so können wir, nachdem wir dieselbe mit der niedrigsten Potenz von (xy) dividirt haben, in ihr $x = y$ setzen. Dann verschwinden eben wegen des Factors (xy) alle Glieder bis auf das erste. Man hätte also

$$0 = C'_{\mu_i} - C''_{\mu_i}, \text{ oder } C'_{\mu_i} = C''_{\mu_i}.$$

Also können die beiden Entwicklungen nicht von einander verschieden sein.

79. *Wirkung des Ω-Processes auf ein Product $\varphi \cdot \psi$ zweier Formen.* Um nun die Coefficienten C_μ der Entwicklung zu bestimmen, müssen wir vorher noch eine Hilfsformel aufstellen, die uns lehrt, wie sich das Product $\varphi \cdot \psi$ zweier Formen mit zwei Reihen cogredienter Variabler unter dem Einfluss des Omegaprocesses verändert.

Es ist:

$$\frac{\partial(\varphi \cdot \psi)}{\partial x_1} = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial(\varphi \cdot \psi)}{\partial x_2} = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2},$$

und demnach:

$$\frac{\partial^2(\varphi \cdot \psi)}{\partial x_1 \partial y_2} = \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial y_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial y_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2(\varphi \cdot \psi)}{\partial x_2 \partial y_1} = \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial y_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1}. \tag{2}$$

Setzt man nun der Kürze halber

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = (\varphi, \overset{\vee}{\ } \psi), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = (\psi, \overset{\vee}{\ } \varphi),$$

so erhält man, wenn ϱ und μ die Grade von x in φ resp. ψ bedeuten, σ und ν die von y in φ resp. ψ, aus (1) und (2) durch Subtraction:

$$(\varrho + \mu)(\sigma + \nu)\Omega(\varphi \cdot \psi) = \mu \cdot \nu \cdot \varphi \Omega(\psi) + (\varphi, \overset{\vee}{\ } \psi) + \varrho \cdot \sigma \cdot \psi \Omega(\varphi) + (\psi, \overset{\vee}{\ } \varphi). \tag{I}$$

Ist speciell $\psi = (xy)^\lambda$, so ist

$$\lambda^2 \Omega (xy)^\lambda = 2\lambda (xy)^{\lambda-1} + \lambda(\lambda - 1)(xy)^{\lambda-1} = \lambda(\lambda+1)(xy)^{\lambda-1},$$

ferner wird

$$(\varphi, \overset{\vee}{\ } (xy)^\lambda) = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \lambda (xy)^{\lambda-1} y_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \lambda (xy)^{\lambda-1} y_1$$

$$((xy)^\lambda, \overset{\vee}{\ } \varphi) = \lambda (xy)^{\lambda-1} x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \lambda (xy)^{\lambda-1} x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2},$$

folglich nach dem Euler'schen Satze:

$$(\varphi, \overset{\vee}{\ } \psi) + (\psi, \overset{\vee}{\ } \varphi) = \lambda(\varrho + \sigma)(xy)^{\lambda-1}\varphi.$$

Daher erhalten wir aus Gleichung (I) für $\psi = (xy)^\lambda$:

$$(\varrho+\lambda)(\sigma+\lambda)\Omega(\varphi \cdot (xy)^\lambda) = \varrho \cdot \sigma \cdot (xy)^\lambda \Omega(\varphi) + \lambda(\varrho+\sigma+\lambda+1)(xy)^{\lambda-1} \cdot \varphi. \tag{II}$$

80. *Berechnung der Coefficienten* C_μ. Die zuletzt erhaltene Formel benutzen wir nun, um die Coefficienten der Reihe

$$(rs)^\lambda r_x^{m-\lambda} s_y^{n-\lambda} = \sum C_{\lambda,k} \overline{(rs)}^k_{y^{n-k}} (xy)^{k-\lambda}, \quad k \geqq \lambda \qquad \text{(III)}$$

zu bestimmen. Dass die einzelnen Glieder rechts die hier gegebene Form besitzen müssen, haben wir bereits in Nr. 76 und 77 entwickelt. Ihr Grad in y ist

$$n - k + k - \lambda = n - \lambda,$$

ihr Grad in x ist

$$m + n - 2k - (n - k) + k - \lambda = m - \lambda,$$

wie es die linke Seite der Relation (III) auch erheischt.

Zunächst erhält man für $\lambda = k$ den ersten Coefficienten $C_{k,k}$, indem man $x = y$ setzt. Dabei geht die linke Seite in die Elementarcovariante

$$E = \overline{(rs)}^\lambda = (rs)^\lambda r_x^{m-\lambda} s_x^{n-\lambda} \qquad (1)$$

über, während die rechte Seite sich auf ihr erstes Glied

$$C_{k,k} \left[\overline{(rs)}^\lambda_{y^{n-\lambda}}\right]_{y=x} = C_{k,k} \overline{(rs)}^\lambda \qquad (2)$$

reducirt. Durch Comparation von (1) mit (2) erhält man

$$C_{k,k} = 1.$$

Um nun die weiteren Coefficienten zu finden, wenden wir auf beiden Seiten der Relation (III) den Ω-Process an, was immer erlaubt ist, da dieselbe eine Identität darstellt. Die Rechnung erleichtert uns Formel (II), Nr. 79. In ihr tritt nur an Stelle von φ die Polare $\overline{(rs)}^k_{y^{n-k}}$, an Stelle von λ der Exponent $k - \lambda$; ebenso haben wir ihren Grad ϱ in x durch $m - \lambda$, ihren Grad σ in y durch $n - \lambda$ zu ersetzen.

Der Ω-Process auf eine Polare angewendet liefert aber null (vgl. Nr. 19). Es bleiben daher rechts nur die vom zweiten Terme der Formel (II) herrührenden Glieder unter dem Summenzeichen übrig, nämlich die Glieder:

$$(k - \lambda)(m + n - k - \lambda + 1)(xy)^{k-\lambda-1} \cdot \overline{(rs)}^k_{y^{n-k}}.$$

Berücksichtigen wir nun, dass nach Nr. 20 (I)

$$(m-\lambda)(n-\lambda)\Omega\left((rs)^\lambda r_x^{m-\lambda} s_y^{n-\lambda}\right) = (m-\lambda)(n-\lambda)(rs)^{\lambda+1} r_x^{m-\lambda-1} s_y^{n-\lambda-1},$$

so liefert der Ω-Process, angewendet auf die Reihe (III)

$$(m - \lambda)(n - \lambda)(rs)^{\lambda+1} r_x^{m-\lambda-1} s_y^{n-\lambda-1}$$
$$= \sum C_{\lambda,k} (k - \lambda)(m + n - k - \lambda + 1)(xy)^{k-\lambda-1} \overline{(rs)}^k_{y^{n-k}}. \qquad \text{(IV)}$$

Ersetzen wir nun aber anderntheils in der Relation (III)

$$\lambda \text{ durch } \lambda + 1,$$

so erhalten wir für die linke Seite der Relation (IV) eine zweite Entwicklung

$$(r s)^{\lambda+1} r_x^{m-\lambda-1} s_y^{n-\lambda-1} = \sum_{\lambda+1, k} (\overline{r s})_{y^{n-k}}^{k} (x y)^{k-\lambda-1}. \tag{V}$$

Multipliciren wir diese Entwicklung mit $(m-\lambda)(n-\lambda)$ und compariren wir (IV) und (V), so erhalten wir die recurrente Coefficienten-Relation

$$(m-\lambda)(n-\lambda) C_{\lambda+1, k} = C_{\lambda, k}(k-\lambda)(m+n-k-\lambda+1), \tag{VI}$$

wobei

$$C_{k,k} = 1.$$

81. Damit ist das Mittel gegeben, die Coefficienten einzeln zu berechnen. Setzen wir $k - \lambda = \varrho$, und somit $\lambda = k - \varrho$, so liefern die Substitutionen

$$\varrho = 1, \ \varrho = 2, \ldots \varrho = \varrho$$

in die Formel

$$(m-k+\varrho)(n-k+\varrho) C_{k+1-\varrho, k} = C_{k-\varrho, k}(m+n-2k+\varrho+1)\varrho$$

der Reihe nach folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(m-k+1)(n-k+1)\cdot 1 \quad &= C_{k-1,k}(m+n-2k+2) \\
(m-k+2)(n-k+2) C_{k-1,k} &= C_{k-2,k}(m+n-2k+3)\cdot 2 \\
(m-k+3)(n-k+3) C_{k-2,k} &= C_{\lambda-3,k}(m+n-2k+4)\cdot 3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
(m-k+\varrho)(n-k+\varrho) C_{k-\varrho+1,k} &= C_{k-\varrho,k}(m+n-2k+\varrho+1)\varrho.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man die untereinander stehenden Gleichungen, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&(m-k+1)(m-k+2)\cdots(m-k+\varrho)(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-k+\varrho) \\
&= C_{k-\varrho,k}\cdot \varrho!(m+n-2k+2)(m+n-2k+3)\cdots(m+n-2k+\varrho+1),
\end{aligned}$$

oder:

$$\frac{(m-k+\varrho)!}{(m-k)!}\cdot\frac{(n-k+\varrho)!}{(n-k)!} = C_{k-\varrho,k}\cdot\varrho!\frac{(m+n-2k+\varrho+1)!}{(m+n-2k+1)!}. \tag{1}$$

Nun ist aber:

$$\frac{(m-k+\varrho)!}{(m-k)!} = \binom{m-k+\varrho}{\varrho}\cdot\varrho!$$

und analoge Beziehungen gelten für die beiden andern Quotienten. Führt man also in (1) diese Werthe für die betreffenden Quotienten ein, so erhält man nach Division mit $(\varrho!)^2$:

$$\binom{m-k+\varrho}{\varrho}\binom{n-k+\varrho}{\varrho} = C_{k-\varrho,k}\binom{m+n-2k+\varrho+1}{\varrho}. \tag{VII}$$

Wir haben die Formel (VII) nicht in dieser Allgemeinheit nöthig, sondern nur für die Reihenentwicklung von

$$F = r_x^m s_y^n,$$

also für den Fall

$$\lambda = 0, \text{ d. h. } k = \varrho.$$

Man erhält alsdann:

$$\binom{m}{k}\binom{n}{k} = C_{0,k}\binom{m+n-k+1}{k},$$

und demnach:

$$F = r_x^m s_y^n = \sum C_{0,k} (\overline{rs})^k_{y^{n-k}} (xy)^k,$$

oder

$$r_y^m s_y^n = \sum \frac{\binom{m}{k}\binom{n}{k}}{\binom{m+n-k+1}{k}} (\overline{rs})^k_{y^{n-k}} (xy)^k. \qquad \text{(VIII)}$$

Diese Entwicklung wurde von Clebsch und Gordan gleichzeitig entdeckt, und wir haben hier dieselbe auf dem von Clebsch eingeschlagenen Wege gegeben. Durch sie ist also der Beweis geliefert:

„Jede Form mit zwei Reihen cogredienter Variabeln ist eine simultane Covariante ihrer Elementarcovarianten, also von Formen mit nur einer Variabelnreihe.“

82. *Beispiel für die Clebsch-Gordan'sche Reihenentwicklung.*

Wir wollen die Form

$$F = r_x^2 s_y$$

in eine Reihe entwickeln, und durch einfache Rechnung die Identität der Entwicklung mit der ursprünglichen Form nachweisen.

Es ist:

$$F = r_x^2 s_y = \sum \frac{\binom{2}{k}\binom{1}{k}}{\binom{4-k}{k}} (\overline{rs})^k_{y^{n-k}} (xy)^k,$$

oder

$$r_x^2 s_y = (\overline{rs})^0_y + \frac{2}{3} (\overline{rs})^1 (xy).$$

Also:

$$F = \frac{1}{3}\left\{r_x^2 s_y + 2 r_x s_x r_y\right\} + \frac{2}{3}(rs) r_x (xy)$$

$$= \frac{1}{3} F + \frac{2}{3} r_x \left\{s_x r_y + (rs)(xy)\right\}.$$

Nun ist aber:

$$(rs)(xy) = r_x s_y - s_x r_y.$$

Demnach wird:

$$F = \frac{1}{3} F + \frac{2}{3} r_x \left\{s_x r_y + r_x s_y - s_x r_y\right\}$$

$$= \frac{1}{3} F + \frac{2}{3} r_x^2 s_y = F.$$

Weitere Beispiele. Es ist für die in y linearen Formen F

$$r_x s_y = (\overline{rs})_y^0 + \frac{1}{2} (\overline{rs})^1 (xy)$$

$$r_x^2 s_y = (\overline{rs})_y^0 + \frac{2}{3} (\overline{rs})^1 (xy)$$

$$r_x^m s_y = (\overline{rs})_y^0 + \frac{m}{m+1} (\overline{rs})^1 (xy) \cdot$$

Ebenso erhalten wir für die in y quadratischen Formen F

$$r_x^2 s_y^2 = (\overline{rs})_{y^2}^0 + (\overline{rs})_y^1 (xy) + \frac{1}{3} (\overline{rs})^2 (xy)^2$$

$$r_x^4 s_y^2 = (\overline{rs})_{y^2}^0 + \frac{4}{3} (\overline{rs})_y^1 (xy) + \frac{3}{5} (\overline{rs})^2 (xy)^2$$

$$r_x^m s_y^2 = (\overline{rs})_{y^2}^0 + \frac{2m}{m+2} (\overline{rs})_y^1 (xy) + \frac{m-1}{m+1} (\overline{rs})^2 (xy)^2 .$$

Entwickeln wir endlich noch eine in y biquadratische Form in ihre Reihe, etwa $r_x^4 s_y^4$, so erhalten wir:

$$r_x^4 s_y^4 = (\overline{rs})_{y^4}^0 + 2(\overline{rs})_{y^3}^1 (xy) + \frac{12}{7} (\overline{rs})_{y^2}^2 (xy)^2 + \frac{4}{5} (\overline{rs})_y^3 (xy)^3 + \frac{1}{5} (\overline{rs})^4 (xy)^4 .$$

83. *Verallgemeinerung der Reihenentwicklung.* Wir können die eben gewonnene Reihenentwicklung noch auf etwas complicirtere Formen ausdehnen. Die zunächst liegenden Formen F sind durch das symbolische Product dargestellt:

$$r_x^\lambda s_y^m r_y^\varrho = F.$$

Um die Reihen für diese Form zu erhalten, brauchen wir nur die Formel (VIII) ϱ mal nach x zu differentiiren und die Incremente durch y zu ersetzen; dann erhalten wir:

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-\varrho+1)\, r_x^{m-\varrho} s_y^n r_y^\varrho$$

$$= \sum \frac{\binom{m}{k}\binom{n}{k}}{\binom{m+n-k+1}{k}} (m-k)(m-k+1)\ldots(m-k-\varrho+1)(xy)^k (\overline{rs})_{y^{n-k+\varrho}}^k .$$

Hierbei muss ϱ kleiner als $(m-k)$ sein. Nach Division der Gleichung mit dem Coefficienten der linken Seite erhält man

$$r_x^{m-\varrho} s_y^n r_y^\varrho = \sum \frac{\binom{m}{k}\binom{n}{k}}{\binom{m+n-k+1}{k}} \cdot \frac{(m-k)\ldots(m-k-\varrho+1)}{m(m-1)\ldots(m-\varrho+1)} \cdot (xy)^k (\overline{rs})_{y^{n-k+\varrho}}^k . \quad (1)$$

Nun ist aber

$$\binom{m}{k} \cdot \frac{(m-k)\ldots(m-k-\varrho+1)}{m(m-1)\ldots(m-\varrho+1)} = \frac{m(m-1)\ldots(m-\varrho+1)(m-\varrho)\ldots(m-\varrho-k+1)}{m(m-1)\ldots(m-\varrho+1) . 1 . 2 . 3 \ldots k}$$

$$= \binom{m-\varrho}{k} .$$

Setzen wir also $m - \varrho = \lambda$, so geht (1) über in:

$$r_x^\lambda s_y^n r_y^\varrho = \sum \frac{\binom{\lambda}{k}\binom{n}{k}}{\binom{\lambda+\varrho+n-k+1}{k}} \cdot \overline{(rs)}^k_{y^{n-k+\varrho}} (xy)^k. \qquad \text{(IX)}$$

84. *F ist ein Product von vier und mehr Factoren.* Während also für die Reihenentwicklung einer binären Form F mit zwei Reihen Variabeln die Coefficienten noch allgemein angegeben werden können, wenn F durch drei Factoren repräsentirt wird, ist uns das nicht mehr möglich, wenn die Zahl der Factoren die Anzahl drei überschreitet. Die figurirten Zahlen reichen alsdann nicht mehr aus, das Coefficientengesetz allgemein festzustellen. Die Reihe muss dann für jeden einzelnen Fall berechnet werden. Für den Fall von vier Factoren kann man sich etwa in folgender Weise behelfen. Es sei

$$F = r_x^\lambda r_y^\varrho s_y^\sigma s_x^\mu$$

und μ der kleinste der Exponenten. Erheben wir die Identität

$$r_y s_x = \{ r_x s_y - (rs)(xy) \}$$

auf die μ^{te} Potenz, entwickeln rechts nach dem binomischen Lehrsatz und multipliciren alsdann mit $r_y^{\varrho-\mu} r_x^\lambda s_y^\sigma$, so erhalten wir eine Reihe, in welcher nur mehr Factoren wie $r_x^k s_y^\lambda$ neben den Potenzen von $(xy)^k$ und den Polaren der Elementarcovarianten auftreten. Diese beiden Factoren der einzelnen Glieder entwickelt man nun nach Reihe (VIII) und erhält so die allgemeine Darstellung.

Eine andere Methode ist die folgende. Man setzt

$$r_x^\lambda s_x^\mu \cdot r_y^\varrho s_y^\sigma = R_x^{\lambda+\mu} \cdot S_y^{\varrho+\sigma}.$$

Nun entwickelt man $R_x^{\lambda+\mu} \cdot S_y^{\varrho+\sigma}$ nach Reihe (VIII), ersetzt in ihr hierauf R und S in geeigneter Weise durch $r_x^\lambda s_x^\mu$ und $r_y^\varrho s_y^\sigma$ und wendet sodann auf die erhaltenen neuen Glieder wiederum die Entwicklung (VIII) an.

85. *Symmetrische und alternirende Formen.* Diese Reihenentwicklungen werden durchgehends einfacher, sobald F eine symmetrische oder eine alternirende Form ist, was natürlich von vornherein voraussetzt, dass $m = n$ sei. Im ersten Falle ändert sich nämlich $F = r_x^m s_y^m$ nicht, wenn x mit y, oder was das nämliche ist, wenn r mit s vertauscht wird. Durch Vertauschung von r mit s verändern aber alle ungeraden Elementarcovarianten, also die Formen:

$$E = \overline{(rs)}^{2\lambda+1},$$

ihr Zeichen. Sie müssen demnach, da die Function F selbst unverändert

bleibt, identisch null sein. Die Reihe reducirt sich sonach auf die Hälfte der Glieder.

Im zweiten Falle verschwinden aus dem gleichen Grunde die geraden Elementarcovarianten, also die Formen

$$E = (rs)^{2\lambda},$$

die ja bei Vertauschung von r mit s sich nicht ändern, während F als alternirende Function ihr Zeichen ändert. Zu diesen Formen gehört unter andern die in Nr. 67 aufgestellte Fundamentalcombinante $f(x)\varphi(y) - \varphi(x)f(y) = P$.

86. *Umkehrung der Reihe* (VIII). Ersetzt man in der Reihe (VIII) die Grössen m und n bezw. durch $m-\nu$, $n-\nu$ und multiplicirt auf beiden Seiten mit $(rs)^\nu \cdot (xy)^\nu$, so kommt:

$$(rs)^\nu r_x^{m-\nu} s_y^{n-\nu} (xy)^\nu = \sum \frac{\binom{m-\nu}{k}\binom{n-\nu}{k}}{\binom{m+n-2\nu-k+1}{k}} \overline{(rs)}^{\nu+k}_{y^{n-(\nu+k)}} (xy)^{k+\nu}.$$

Legt man hier dem ν alle möglichen Werte bei von $\nu = 0$ bis $\nu = n$, so erhält man $(n+1)$ Gleichungen, in denen rechts nur die $(n+1)$ Polaren der $(n+1)$ Elementarcovarianten $(rs)^k$ in linearer Verbindung auftreten. Dabei beginnt mit wachsendem ν die Entwicklung rechts mit einer immer höheren Elementarcovariante, so dass also, wenn man diese $(n+1)$ Gleichungen nach der Determinantenmethode auflöst, die Nennerdeterminante den Werth Eins besitzt, da ihr Diagonalglied nur Elemente vom Werthe 1 und links derselben nur Elemente vom Werthe 0 enthält. Bei Auflösung der Gleichungen nach diesen Polaren tritt also kein Nenner auf, und es wird sich somit der Werth einer Polare in der Form darstellen:

$$\overline{(rs)}^k_{y^{n-k}} (xy)^k = \sum C_{k,\nu} (rs)^\nu r_x^{m-\nu} s_y^{n-\nu} (xy)^\nu. \tag{1}$$

Die Glieder unter dem Summenzeichen rechts gehen, vom Factor $C_{k,\nu}(xy)^\nu$ abgesehen, aus $F = r_x^m s_y^n$ durch den Ω-Process hervor (vgl. Nr. 20).

Auch diese Reihenentwicklung ist eindeutig, wie sich durch die gleichen Schlüsse ergiebt, womit wir die Eindeutigkeit der Reihe (VIII) nachgewiesen haben. Wir dürfen also behufs Coefficientenbestimmung wiederum den Ω-Process anwenden. Dabei beschränken wir uns indess auf den Fall $k = 0$; der andere ergiebt sich aus diesem, wenn man nur für m und n entsprechend andere Werthe einführt.

87. *Berechnung der Coefficienten.* Für $k = 0$, $\nu = k$ wird die Relation (1)

$$(rs)^0_{y^n} = (r_x^m s_x^n)_{y^n} = \sum C_k (rs)^k r_x^{m-k} s_y^{n-k} (xy)^k. \tag{2}$$

Da links eine Polare steht, so liefert der Ω-Process auf dieser Seite Null. Auf der rechten Seite erhalten wir nach Formel (II) Nr. 79 zwei Summen, von denen wir die eine nach links transponiren. Es entsteht dann, da $\varrho = (m - k)$ und $\sigma = (n - k)$, die Beziehung:

$$\left.\begin{aligned} -\sum_0^n C_k (m-k)(n-k)(rs)^{k+1} r_x^{m-k-1} s_y^{n-k-1} (xy)^k \\ = \sum_0^n C_k k (m+n-k+1)(rs)^k r_x^{m-k} s_y^{n-k} (xy)^{k-1} \end{aligned}\right\} \cdot \quad (X)$$

Da das erste Glied der Summe rechts verschwindet, so können wir auf dieser Seite k durch $k+1$ ersetzen und erhalten:

$$\begin{aligned} -\sum C_k (m-k)(n-k)(rs)^{k+1} r_x^{m-k-1} s_y^{n-k-1} (xy)^k \\ = \sum C_{k+1} (k+1)(m+n-k)(rs)^{k+1} r_x^{m-k-1} s_y^{n-k-1} (xy)^k . \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich durch Comparation gleich hoher Potenzen

$$-C_k (m-k)(n-k) = C_{k+1} (k+1)(m+n-k). \qquad (3)$$

Nun folgt aber aus Reihe (2) für $k = 0$, $C_0 = 1$. Demnach erhalten wir aus (2), indem wir der Grösse k alle Werthe von 0 bis k beilegen:

$$\begin{aligned} m \cdot n &= C_1 (m+n) \\ -C_1 (m-1)(n-1) &= C_2 (m+n-1) \cdot 2 \\ -C_2 (m-2)(n-2) &= C_3 (m+n-2) \cdot 3 \\ \cdots\cdots &\quad \cdots\cdots \\ \cdots\cdots &\quad \cdots\cdots \\ -C_{k-1} (m-k+1)(n-k+1) &= C_k (m+n-k+1) k . \end{aligned}$$

Durch Multiplication dieser Gleichungen mit einander erhält man:

$$(-1)^k \cdot \binom{m}{k} k! \binom{n}{k} k! = C_k \cdot k! \, k! \binom{m+n}{k}$$

oder

$$C_k = (-1)^k \frac{\binom{m}{k}\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{k}} .$$

Trägt man diesen Werth von C_k in die Relation (2) ein, so erhält man:

$$(r_x^m s_x^n)_{y^n} = \sum (-1)^k \frac{\binom{m}{k}\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{k}} (rs)^k r_x^{m-k} s_y^{n-k} (xy)^k . \qquad (XI)$$

§ 8. Anwendungen des Processes der Reihenentwicklung.

88. *Zweck der Reihenentwicklungen.* Die Reihenentwicklungen dienen in erster Linie dazu, complicirte symbolische Producte in einfache überzuführen, oder unbekannte Formen durch bekannte darzu-

stellen. Sie werden so das wichtigste Hilfsmittel für die symbolische Rechnung, insbesondere bei Aufstellung der von einander linear unabhängigen Co- und Invarianten einer Form n^{ten} Grades. Wesentliche Vortheile bieten die hier entwickelten Formeln auch, wenn es sich darum handelt, lineare Relationen zwischen Ueberschiebungen herzustellen. In seinem Programme „Ueber das Formensystem binärer Formen" (Teubner, 1875) hat Gordan aus der Hauptformel (VIII) noch mehrere andere durch Differentiation und einfache Substitutionen abgeleitet, welche ganz allgemein solche Relationen zwischen Ueberschiebungen mit drei Reihen von Symbolen bieten.

Im Folgenden wollen wir nun in einer Reihe von Anwendungen zeigen, inwiefern die Reihenentwicklungen zu einem so wirksamen Hilfsmittel der symbolischen Rechnung werden; zahlreiche specielle Beispiele werden wir im zweiten und dritten Teile dieses Bandes kennen lernen.

89. *Die Ueberschiebungen der Form $f = a_x^4$ über ihre Hesse'sche Covariante $\varDelta = (ab)^2 a_x^2 b_x^2$.* Als erste Anwendung will ich hier die Berechnung der vier Ueberschiebungen $(f, \varDelta)^k$, $k = 4, 3, 2, 1$, so weit dies vortheilhaft, mit Reihenentwicklung geben.

Am einfachsten berechnet sich $(f, \varDelta)^4$; man bedarf hierbei keiner Reihenentwicklung; vielmehr ergiebt sich unmittelbar aus der vierten Polare

$$\varDelta_{y^4} = (ab)^2 a_y^2 b_y^2,$$

indem wir nach der in Nr. 35 gegebenen Theorie y_1 durch c_2, y_2 durch $-c_1$ ersetzen, der Werth:

$$(\varDelta, f)^4 = (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2 = j. \tag{1}$$

Zur Berechnung von $(f, \varDelta)^3$ entwickeln wir ein Glied der dritten Polare von $\varDelta$ nach der Reihe (IX) Nr. 83. Wir erhalten, da k nur die Werthe 0, 1 annehmen kann:

$$(ab)^2 b_x a_y^2 b_y = (ab)^2 \sum \frac{\binom{1}{k}\binom{2}{k}}{\binom{1+1+2-k+1}{k}} \cdot (ab)^k_{y^{2-k+1}} (xy)^k$$

$$= [(ab)^2 a_x^2 b_x^2]_{y^3} + \frac{2}{4} [(ab)^3 a_x b_x] (xy).$$

Weil aber $(ab)^3 a_x b_x$ identisch null, und $(ab)^2 a_x^2 b_x^2 = \varDelta$, so hat man

$$(ab)^2 b_x a_y^2 b_y = \varDelta_{y^3} = \varDelta_x \varDelta_y^3. \tag{I}$$

Ersetzen wir wiederum y_1 durch c_2, y_2 durch $-c_1$ und multipliciren mit c_x, so kommt:

$$(ab)^2 (ac)^2 (bc) b_x c_x = (\varDelta, f)^3 = 0, \tag{2}$$

weil die linke Seite durch Vertauschung von b mit c nur ihr Zeichen ändert. Vertauscht man in (1) y mit x, so ergiebt sich aus dieser dritten Polare von $\varDelta$ die erste, und damit durch die gleiche Substitution statt der dritten Ueberschiebung $(\varDelta, f)^3$ die erste:

$$(ab)^2 (bc)\, a_x^2 b_x c_x^3 = (\varDelta, f) = t. \tag{3}$$

Sie verschwindet nicht, und liefert somit eine Covariante sechsten Grades von $f = a_x^4$.

Es erübrigt nur noch die zweite Ueberschiebung von f über $\varDelta$ zu berechnen. Wir könnten zu dem Zwecke wiederum ein Glied der zweiten Polare von $\varDelta$ in eine Reihe entwickeln. Vortheilhafter ist es aber, diesen Process für ein Glied der dritten Polare von (f, f) vorzunehmen, nämlich für das Glied $(ab)\, a_x^3 b_y^3$. Da diese Form (f, f) sowohl, als auch $(f, f)^3$ identisch verschwinden, so ist in der durch Formel (VIII) dictirten Entwicklung

$$(ab)\, a_x^3 b_y^3 = (ab) \sum \frac{\binom{3}{k}\binom{3}{k}}{\binom{7-k}{k}} \overline{(ab)}_{y^{3-k}} (xy)^k$$

die erste und dritte Elementarcovariante null, und sie reducirt sich demnach auf die für $k = 1$ und $k = 3$ sich ergebenden Glieder:

$$\begin{aligned}(ab)\, a_x^3 b_y^3 &= \frac{3}{2} \left\{ (ab)^2 a_x^2 b_x^2 \right\}_{y^2} (xy) + \frac{1}{4} (ab)^4 (xy)^3 \\ &= \frac{3}{2} \varDelta_{y^2} \cdot (xy) + \frac{1}{4} (ab)^4 (xy)^3.\end{aligned}$$

Ersetzen wir hierin y_1 durch $-c_2$, y_2 durch $+c_1$ und multipliciren mit c_x, so kommt:

$$-(ab)(bc)^3 a_x^3 c_x = \frac{3}{2} (\varDelta, f)^2 + \frac{i}{4} \cdot f,$$

wenn wir die Invariante $(ab)^4$ von f wie schon früher mit i bezeichnen. Vertauscht man links b mit c, nimmt die halbe Summe der so entstehenden symbolischen Producte und berücksichtigt, dass

$$(ab)c_x - (ac)b_x = -(bc)a_x,$$

so kommt endlich

$$\frac{i}{2} f = \frac{3}{2} (\varDelta, f)^2 + \frac{i}{4} f,$$

oder:

$$(\varDelta, f)^2 = \frac{i}{6} \cdot f. \tag{4}$$

Wir erhalten somit das Resultat:

$$(\varDelta, f) = t, \quad (\varDelta, f)^2 = \frac{i}{6} \cdot f, \quad (\varDelta, f)^3 = 0, \quad (\varDelta, f)^4 = j.$$

Es möge hier bemerkt sein, dass die fünf Formen

$$f,\ t,\ \varDelta,\ i,\ j$$

überhaupt die einzigen selbstständigen Covarianten der Form f sind (wie wir später noch beweisen werden), durch welche sich alle andern rational und ganz darstellen lassen.

90. *Die aszygetischen Covarianten dritten Grades in den Coefficienten von* $f = a_x^5$. Wir stellen uns weiter die Aufgabe, alle aszygetischen, d. i. linear von einander unabhängigen Covarianten dritten Grades in den Coefficienten einer Form fünfter Ordnung zu berechnen. Sie müssen jedenfalls durch symbolische Producte von der Form:

$$P = (ab)^\mu (bc)^\varkappa (ca)^\lambda a_x^{\varkappa_1} b_x^{\lambda_1} c_x^{\mu_1} \tag{I}$$

repräsentirt werden können, wobei die Exponenten den Gleichungen

$$5 = \lambda + \mu + \varkappa_1 = \mu + \varkappa + \lambda_1 = \varkappa + \lambda + \mu_1$$

genügen müssen.

Jedes solche Product P lässt sich aber durch Ueberschiebungen von Formen zweiten Grades in den Coefficienten mit solchen ersten Grades darstellen, wie aus unsern allgemeinen Betrachtungen Nr. 45 und Nr. 46 erhellt. Die einzige Form ersten Grades ist aber die Originalform $f = a_x^5$ selbst, und die Formen zweiten Grades sind die aus $(f, f)^\varrho$ für $\varrho = 2$ und 4 sich ergebenden nicht verschwindenden Covarianten:

$$\varphi = (ab)^2 a_x^3 b_x^3, \quad i = (ab)^4 a_x b_x.$$

Jede Form P muss sich demnach, von $P = f^3 = a_x^5 b_x^5 c_x^5$ abgesehen, durch eine Summe von der Gestalt

$$P = \sum m_i \cdot (f, \varphi)^\varrho + \sum n_i (f, i)^\sigma, \tag{II}$$

wo m_i, n_i noch zu bestimmende Constante sind, darstellen lassen, und zu solchen Summen gelangen wir, wenn wir nach bereits früher gegebenen Methoden das Symbol c in P zunächst durch y ersetzen, und nun die so entstehende Form P_y in eine Reihe entwickeln. Die Coefficienten der Potenzen von (xy) sind dann Polaren von φ oder i. Da nun in (I) kein Exponent die Zahl 4 aus bekannten Gründen überschreiten kann, so giebt es eine endliche Zahl von linearen Relationen (II). Aus ihnen eliminiren wir so viele Formen dritten Grades P, $(f, \varphi)^\varrho$, $(f, i)^\sigma$, als nur möglich, und gelangen so zu den linear unabhängigen Formen dritten Grades in den Coefficienten.

91. In unserem Falle können wir indess die aszygetischen Formen dritten Grades a priori erkennen, so dass die Reihenentwicklungen, welche in allgemeineren Fällen zur Bildung der Relationen (II) nöthig

werden, sich hier auf ein Minimum beschränken. Denn da die sechs Formen:

$$f^3, f\cdot\varphi, (f, \varphi), f\cdot i, (f, i), (f, i)^2$$

von immer andern und andern Grade 15, 11, 9, 7, 5, 3 in den Variabeln sind, so können zwischen ihnen keine linearen Relationen bestehen. Unsere Aufgabe besteht also nur darin, zu zeigen, dass in der That keine weiteren Formen von der erwähnten Eigenschaft existiren.

Zum Zwecke dieses Beweises schreiten wir von den einfachsten Producten P allmälig zu der Berechnung complicirterer vor, indem wir den Exponenten μ, $\varkappa$, λ der Klammerfactoren von P immer grössere und grössere Zahlenwerthe beilegen. Dabei können wir schon von vorn herein eine Grenze angeben, über welche hinaus diese Grössen μ, $\varkappa$, λ nicht wachsen können. Nehmen wir nämlich an — was bei der Symmetrie in den Symbolen a, b, c stets erlaubt ist —

$$P = (ab)^\mu (bc)^\varkappa (ca)^\lambda a_x^{\varkappa_1} b_x^{\lambda_1} c_x^{\mu_1}$$

sei so geordnet, dass

$$\mu \geq \varkappa \geq \lambda,$$

dann muss, wenn

$$\mu + \varkappa + \lambda > 6$$

ist, μ mindestens den Werth 3 besitzen. Jedes symbolische Product P mit dem Factor $(ab)^3$ kann aber (vgl. Nr. 11) stets auf eines mit dem Factor $(ab)^4$ reducirt werden. Nach unsern allgemeinen Ueberschiebungssätzen lässt sich aber alsdann eine solche Form P dritten Grades linear durch Ueberschiebungen darstellen mit $i = (ab)^4 a_x b_x$, und einer Form ersten Grades, also der Form f, d. h. P lässt sich linear durch $i\cdot f$, (i, f), $(i, f)^2$ ausdrücken, und ist somit keine aszygetische Form zu diesen dreien.

Die Summe $\mu + \varkappa + \lambda$ der drei Exponenten kann also im günstigsten Falle den Werth 6 erreichen, und dabei kann μ oder $\varkappa$ oder λ den Werth 4 nicht überschreiten.

92. Wir wollen im Folgenden die nach diesen Beschränkungen übrig bleibenden Möglichkeiten untersuchen.

1) Es sei: $\mu + \varkappa + \lambda = 0$, d. h. $\mu = \varkappa = \lambda = 0$, dann ist:

$$P_0 = a_x^5 b_x^5 c_x^5 = f^3.$$

2) Ist $\mu + \varkappa + \lambda = 1$, so lässt sich ein hiezu gehöriges symbolisches Product P_1 immer reduciren (vgl. Nr. 11) auf ein Product P_2, für welches

3) $$\mu + \varkappa + \lambda = 2,$$

und zwar $\mu = 2$, $\varkappa = \lambda = 0$ ist. In diesem Falle wird

$$P_2 = (ab)^2 a_x^3 b_x^3 c_x^5 = \varphi \cdot f.$$

4) Wenn $\mu + \varkappa + \lambda = 3$, so kann entweder

$$\mu = k = \lambda = 1$$

oder $$\mu = 2, \quad \varkappa = 1, \quad \lambda = 0$$

oder $$\mu = 3, \quad \varkappa = \lambda = 0.$$

Die nach dem letzten der drei Fälle zu bildende Form ist identisch null. Die Form des ersten Falles dagegen lässt sich auf die des zweiten Falles reduciren, für welchen

$$P_3 = (ab)^2 (bc) a_x^3 b_x^2 c_x^4.$$

Ersetzt man hierin nach der allgemein gegebenen Methode c durch y, und entwickelt nun P_{3y} in eine Reihe, so kommt:

$$(ab)^2 a_x^3 b_x^2 b_y = [(ab)^2 a_x^3 b_x^3]_y + \text{Const.} \times [(ab)^3 a_x^2 b_x^2] (xy) \cdot$$

Die zweite Elementarcovariante rechts ist identisch Null, die erste ist φ; also wird, wenn man wieder y durch c ersetzt:

$$P_3 = (\varphi, f).$$

5) Ist ferner: $\mu + \varkappa + \lambda = 4$, so ist entweder

$$\mu > 2, \quad \text{oder} \quad \mu = 2, \quad \varkappa = \lambda = 1$$
$$\mu = 2, \quad \varkappa = 2.$$

Im ersten Falle ist entweder P direct gleich $f \cdot i$, wenn $\mu = 4$, $k = \lambda = 0$ oder, wenn $\mu = 3$, $k = 1$, $\lambda = 0$:

$$P_4 = (ab)^3 (ac) a_x b_x^2 c_x^4.$$

Vertauscht man a mit b und nimmt die halbe Summe, so kommt:

$$P_4 = \frac{1}{2} (ab)^3 a_x b_x c_x^4 \{(ac) b_x - c_x (ab)\}$$
$$= \frac{1}{2} f \cdot i.$$

Im zweiten Falle ist:

$$P_5 = (ab)^2 (ac) (bc) a_x^2 b_x^2 c_x^3$$
$$= \frac{1}{3} a_x^2 b_x^2 c_x^2 (ab) (ac) (bc) \{c_x (ab) + a_x (bc) + b_x (ca)\} = 0.$$

Im dritten Falle ist

$$P_6 = (ab)^2 (ac)^2 a_x b_x^3 c_x^3.$$

Um diese Form durch Ueberschiebungen auszudrücken, entwickeln wir $(ac) a_y^3 a_x c_x^4$ in eine Reihe und erhalten:

$$(ac) a_y^3 a_x c_x^4 = [(ac) a_x^4 c_x^4]_{y^3} + c_1 [(ac)^2 a_x^3 c_x^3]_{y^2} (yx) + c_2 [(ac)^3 a_x^2 c_x^2]_y (yx)^2$$
$$+ c_3 [(ac)^4 a_x c_x] (yx)^3.$$

Hierin verschwindet der erste und dritte Term rechts identisch. Ersetzen wir also in dieser Reihe y durch b, so kommt

$$(ab)^3 (ac) a_x b_x^2 c_x^4 = c_1 (\varphi, f)^2 + c_3 \cdot i \cdot f.$$

Die linke Seite ist $P_4 = \frac{1}{2} f \cdot i$; der erste Term rechts ist aber bis auf einen Zahlenfactor $P_6 = (ab)^2 (ac)^2 a_x b_x^3 c_x^3$. Denn die Polare

$$[(ac)^2 a_x^3 c_x^3]_{y^2} = \varphi_{y^2} = \frac{3}{\binom{6}{2}} \left\{ 2 (ac)^2 c_x^3 a_x a_y^2 + 3 (ac)^2 a_x^2 c_x^2 a_y c_y \right\}$$

geht durch die Substitution $y_1 = b_2$, $y_2 = - b_1$ in die Ueberschiebung über:

$$(\varphi, f)^2 = \frac{1}{5} \left\{ 2 (ac)^2 c_x^3 a_x (ab)^2 b_x^3 + 3 (ac)^2 a_x^2 c_x^2 (ab) (cb) b_x^3 \right\}$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ 2 P_6 + 3 P_5 \right\}, \quad \text{oder weil } P_5 = 0,$$

$$= \frac{2}{5} P_6 .$$

Demnach ist:

$$P_6 = \varrho \cdot (f, \varphi)^2 = k \cdot i \cdot f,$$

wo ϱ und k numerische Coefficienten. Zwischen den beiden Ueberschiebungen $(f, \varphi)^2$ und $i \cdot f$ besteht also eine lineare Relation.

6) Nehmen wir ferner an:

$$\mu + \varkappa + \lambda = 5,$$

so ist entweder:

$\mu = 5$, $\varkappa = 0$, $\lambda = 0$, also $P_7 = (ab)^5 c_x^5 = 0$

oder $\mu = 4$, $\varkappa = 1$, $\lambda = 0$, also $P_8 = (ab)^4 (ac) b_x c_x^4 = (i, f)$

oder $\mu = 3$, $\varkappa = 1$, $\lambda = 1$, also $P_9 = (ab)^3 (ac) (bc) a_x b_x c_x^3 = 0$,

da P_9 durch Vertauschung von a mit b sein Zeichen ändert,

oder $\mu = 3$, $\varkappa = 2$, $\lambda = 0$, also $P_{10} = (ab)^3 (ac)^2 b_x^2 c_x^3$.

Dieses Product geht, wenn man b mit c vertauscht und die halbe Summe nimmt, in das Product

$$P_{11} = (ab)^2 (ac)^2 (bc) b_x^2 c_x^2 a_x$$

über, welches dem Werthsystem $\mu = 2$, $\varkappa = 2$, $\lambda = 1$ entspricht. Die Form P_{11} verschwindet aber identisch, da sie nur ihr Zeichen ändert, bei Vertauschung von b mit c.

7) Ist endlich:

$$\mu + \varkappa + \lambda = 6,$$

so sind die einzig möglichen Fälle:

$\mu = 4$, $\varkappa = 1$, $\lambda = 1$, also $P_{12} = (ab)^4 (ac) (bc) c_x^3 = (i, f)^2$

$\mu = 3$, $\varkappa = 2$, $\lambda = 1$, also $P_{13} = (ab)^3 (ac)^2 (bc) b_x c_x^2$

$\mu = 2$, $\varkappa = 2$, $\lambda = 2$, also $P_{14} = (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2 a_x b_x c_x$.

Die beiden Formen P_{13} und P_{14} führen auf dieselbe Ueberschiebung $(i, f)^2$ wie P_{12}. Denn vertauscht man in P_{13} a mit b und nimmt die halbe Summe, so kommt:

$$P_{13} = \frac{1}{2}(ab)^3(ac)(bc)c_x^2\{(ac)b_x - (bc)a_x\} = \frac{1}{2}(ab)^4(ac)(bc)c_x^3 = \frac{1}{2}(i, f).$$

Vertauscht man aber in P_{13} b mit c, so kommt durch Addition beider Producte:

$$P_{13} = \frac{1}{2}(ab)^2(ac)^2(bc)b_x c_x\{(ab)c_x - (ac)b_x\} = \frac{1}{2}(ab)^2(ac)^2(bc)^2 a_x b_x c_x,$$

oder $$P_{14} = 2P_{13} = (i, f) = (ab)^2(ac)^2(bc)^2 a_x b_x c_x.$$

Wir sind am Schlusse angelangt. Die sechs Formen f^3, $i \cdot f$, (i, f), $(i, f)^2$, $\varphi \cdot f$, (φ, f) sind in der That die einzigen aszygetischen Covarianten von f, die in den Coefficienten vom dritten Grade sind.

93. *Reciprocitätsgesetz von Hermite.* Es ist nun sehr bemerkenswerth, das jedem aszygetischen System von Covarianten P_i einer Form f stets ein gleichfalls aszygetisches System von Covarianten Q_i einer andern gewissen Form φ entspricht, und zwar ist das Entsprechen nach Hermite durch folgendes Gesetz definirt:

> „Besitzt die Form n^{ten} Grades $f = a_x^n$ eine Covariante P_i vom Grade m in den Coefficienten, so besitzt die Form m^{ten} Grades $\varphi = A_x^m$ eine entsprechende Covariante Q_i vom Grade n in den Coefficienten und beide Covarianten sind von gleichem Grade λ in x.

So entsprechen den vorhin ermittelten sechs aszygetischen Formen P_i dritten Grades in den Coefficienten

$$f^3,\ f \cdot \varphi,\ (f, \varphi),\ f \cdot i.\ (f, i),\ (f, i)^2$$

der Form $f = a_x^5$ ebenfalls sechs aszygetische Formen Q_i fünften Grades in den Coefficienten:

$$\varphi^5,\ \varphi^3 \cdot \Delta,\ \varphi^2 \cdot Q,\ \varphi \cdot \Delta^2,\ Q \cdot \Delta,\ \varphi \cdot R$$

der Form $\varphi = A_x^3$, wobei, wie wir früher gesehen haben (vgl. Nr. 37)

$$\Delta = (AB)^2 A_x B_x,\quad Q = (A\Delta) A_x^2 \Delta_x,\quad R = (\Delta, \Delta)^2.$$

Der Beweis dieses Reciprocitätsgesetzes kann auf folgende Weise geführt werden.

Es sei P eine Covariante vom Grade m in den Coefficienten von $f = a_x^n = b_x^n =$ etc. und vom Grade λ in den Variabeln x. Es sei ferner $\varphi = A_x^m$ eine Form m^{ten} Grades in x, welche die m Wurzeln $\alpha^{(k)} = \frac{\alpha_1^{(k)}}{\alpha_2^{(k)}}$ besitzen möge, und demgemäss sich auch in der Gestalt schreiben lässt (von einem constanten Factor abgesehen):

$$\varphi = (\alpha_2^{(1)} x_1 - \alpha_1^{(1)} x_2)(\alpha_2^{(2)} x_1 - \alpha_1^{(2)} x_2) \cdots (\alpha_2^{(m)} x_1 - \alpha_1^{(m)} x_2),$$

oder

$$\varphi = \alpha_{1x} \cdot \alpha_{2x} \cdot \alpha_{3x} \cdots \alpha_{mx} = A_x^m.$$

Ersetzen wir alsdann in dem symbolischen Producte P das Symbol a durch α_1, b durch α_2, ..., m durch α_m, so geht dadurch P zunächst in eine simultane Covariante $\overline{Q}$ der m linearen Factoren α_{kx} über. Nun wird P nicht geändert, wenn wir in ihm irgend welche zwei gleichberechtigte Symbole a und b vertauschen. Permutiren wir entsprechend in $\overline{Q}$ alle Wurzeln $\bar{\alpha}_k$, so gehört immer noch jedes $\overline{Q}$ zur nämlichen Form P. Aber die Summe aller dieser $\mu!$ Formen $\overline{Q}$ ist nun eine symmetrische Function der Wurzeln $\bar{\alpha}_k$ und lässt sich demnach rational in den Coefficienten von φ darstellen. Da anderntheils jedes Glied $\overline{Q}$ gemäss seiner Ableitung Covarianteneigenschaft besass, so muss sie auch die Summe besitzen, d. h.

$$Q = \sum \overline{Q}$$

ist rationale Covariante von $\varphi = A_x^m$, und zwar vom Grade λ in x, weil die Zahl der Factoren erster Art bei diesen Operationen unberührt blieb und vom Grade n in den Coefficienten von φ, weil jede Wurzel $\bar{\alpha}_k$ in jedem $\overline{Q}$ gleich oft und zwar n mal auftritt. (Vergl. Salmon, Lineare Transformationen, Art. 57 und 58, über Grad und Gewicht symmetr. Functionen der Wurzeln.) Es entspricht also in der That jeder Form P von f eine Form Q von φ, und insbesondere einem aszygetischen System P_i wieder ein aszygetisches System Q_i. So entspricht z. B. der Invariante

$$j = (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2$$

dritten Grades in den Coefficienten der Form $f = a_x^4$ die Invariante

$$R = (\alpha_1 \alpha_2)^2 (\alpha_1 \alpha_3)^2 (\alpha_2 \alpha_3)^2,$$

welche vierten Grades in den Coefficienten der Form

$$\varphi = \alpha_{1x} \alpha_{2x} \alpha_{3x} = A_x^3$$

ist, deren drei Wurzeln die Werthe $\alpha^{(1)} = \frac{\alpha_1^{(1)}}{\alpha_2^{(1)}}$, $\alpha^{(2)} = \frac{\alpha_1^{(2)}}{\alpha_2^{(2)}}$, $\alpha^{(3)} - \frac{\alpha_1^{(3)}}{\alpha_2^{(3)}}$ besitzen.

94. *Darstellung einer in den Wurzeln von $\varphi = A_x^m$ ausgedrückten Covariante durch ein symbolisches Product; Beispiel.* Wir haben schon in § 1 Nr. 8 darauf hingewiesen, dass jede symmetrische simultane Covariante der m linearen Factoren α_{ix} von φ auch eine rationale Covariante der Form φ ist, und haben den einfachen Beweis dieser Thatsache eben gegeben. Die Reihenentwicklungen für Formen mit

mehreren Reihen cogredienter Variablen setzen uns in den Stand, eine solche in den Wurzeln dargestellte Covariante direct in ein symbolisches Product umzuformen, was man allerdings auch gemäss der Theorie der symmetrischen Functionen auf einem Umwege über die unsymbolische Darstellung der Covariante erreichen könnte. Ehe wir die Methode allgemein entwickeln, will ich sie an einem Beispiele vorbereiten, und benutze hierzu die bereits vorhin angeführte simultane symmetrische Invariante

$$R = (\alpha_1 \alpha_2)^2 (\alpha_1 \alpha_3)^2 (\alpha_2 \alpha_3)^2$$

der drei linearen Factoren α_{kx} von

$$\varphi = \alpha_{1x} \alpha_{2x} \alpha_{3x} = A_x^3 = B_x^3 = \text{etc.}$$

Wir wissen: φ besitzt nur eine Invariante vierten Grades, nämlich die Discriminante (vergl. Nr. 37 und 39)

$$R_1 = (\Delta, \Delta)^2 = (AB)^2 (DC)^2 (BC)(AD),$$

und wir wollen nun zeigen, wie sich successive R in R_1 überführen lässt. Zu dem Zwecke setzen wir zunächst:

$$\alpha_{2x} \alpha_{3x} = p_x^2 = p \tag{1}$$

und erhalten so eine quadratische Hilfsform, deren Invariante durch

$$(p p_1)^2 = (\alpha_{2x} \alpha_{3x}, \alpha_{2x} \alpha_{3x})^2 = -\frac{1}{2} (\alpha_2 \alpha_3)^2 \tag{2}$$

dargestellt ist. Unter Benutzung dieser Werthe (1) und (2) wird:

$$\varphi = p_x^2 \alpha_{1x} = A_x^3, \tag{3}$$

$$R = -2 (p p_1)^2 (\alpha_1 \alpha_2)^2 (\alpha_1 \alpha_3)^2. \tag{4}$$

Ueberschieben wir p auch zweimal über α_{1x}, so kommt:

$$(p \alpha_1)^2 = (\alpha_1 \alpha_2)(\alpha_1 \alpha_3) \tag{5}$$

und demnach lässt sich Gleichung (4) auch schreiben:

$$R = -2 (p p_1)^2 (p_2 \alpha_1)^2 (p_3 \alpha_1)^2. \tag{6}$$

In diesem Ausdrucke können wir nun successive die Symbole A, B, etc. der Form φ einführen. Denn überschieben wir Gleichung (3) zweimal über α_{1x}, so kommt:

$$(p_2 \alpha_1)^2 \alpha_{1x} = 3 (A \alpha_1)^2 A_x, \tag{7}$$

und wenn wir hierin x durch p_3 ersetzen:

$$(p_2 \alpha_1)^2 (\alpha_1 p_3) = 3 (A \alpha_1)^2 (A p_3); \tag{8}$$

also:

$$R = 6 (p p_1)^2 (p_3 \alpha_1)(A \alpha_1)^2 (A p_3). \tag{9}$$

Damit ist eine erste Reduction von R erzielt. Wir wollen nun weiter das Symbol p_3 eliminiren, und bilden dementsprechend die erste

Ueberschiebung von $p_x^2 \alpha_{1x}$ über α_{1x}:

$$2p_x(p\alpha_1)\alpha_{1x} = 3A_x^2(A\alpha_1) = 3B_x^2(B\alpha_1). \tag{10}$$

Ersetzen wir hierin x durch A, so kommt:

$$2(Ap)(p\alpha_1)(A\alpha_1) = 3(AB)^2(B\alpha_1),$$

und demnach:

$$R = 9(pp_1)^2(A\alpha_1)(AB)^2(B\alpha_1),$$

oder, weil $\varDelta_x^2 = (AB)^2 A_x B_x$, und demnach $(\varDelta\alpha_1)^2 = (AB)^2(A\alpha_1)(B\alpha_1)$, so wird:

$$R = 9(pp_1)^2(\varDelta\alpha_1)^2.$$

Da aber nach dem Identitätssatze:

$$\{(pp_1)(\varDelta\alpha_1)\}^2 = \{(p\varDelta)(p_1\alpha_1) - (p_1\varDelta)(p\alpha_1)\}^2$$
$$= 2(p\varDelta)^2(p_1\alpha_1)^2 - 2(p\varDelta)(p_1\varDelta)(p\alpha_1)(p_1\alpha_1),$$

so wird endlich:

$$R = 18(p\varDelta)^2(p_1\alpha_1)^2 - 18(p\varDelta)(p_1\varDelta)(p\alpha_1)(p_1\alpha_1). \tag{11}$$

Für die beiden Terme rechts können wir nun aber zwei Relationen aufstellen, mit Hilfe deren wir das gewünschte Ziel erreichen. Der erste Term geht nämlich aus $p_y^2\alpha_{1x}$ hervor, wenn wir darin y durch $\varDelta$, x durch p_1 ersetzen und mit $(\alpha_1 p_1)$ multipliciren. Es ist aber

$$p_y^2\alpha_{1x} = \left\{p_x^2\alpha_{1x}\right\}_{y^2} + \frac{2}{3}\left\{(p\alpha_1)p_x\right\}_y (yx)$$

nach Formel (VIII) Nr. 81, wobei nur x mit y vertauscht ist; und da nach Voraussetzung $p_x^2\alpha_x = B_x^3$, so wird, wenn wir die angegebene Substitution ausführen:

$$(p\varDelta)^2(p_1\alpha_1)^2 = (B\varDelta)^2(Bp_1)(\alpha_1 p_1) + \frac{2}{3}(p\alpha_1)(p_1\alpha_1)(p\varDelta)(p_1\varDelta).$$

Hierin ist der erste Term rechts identisch Null, da nach der Theorie der cubischen Formen jedes symbolische Product mit dem Klammerfactor $(B\varDelta)^2$ verschwindet. [Vergl. Nr. 63, (5) u. Nr. 145, (I).] Demnach wird:

$$(p\varDelta)^2(p_1\alpha_1)^2 = \frac{2}{3}(p\alpha_1)(p_1\alpha_1)(p\varDelta)(p_1\varDelta) \tag{12}$$

und dies ist die erste der gesuchten Relationen. Um noch eine zweite zu erhalten, berücksichtigen wir, dass der zweite Term in Gleichung (11) aus $p_y(p\alpha_1)\alpha_{1x}$ hervorgeht, wenn wir darin y durch $\varDelta$, x durch p_1 ersetzen und mit $(p_1\varDelta)$ multipliciren. Es ist aber

$$(p\alpha_1)p_y\alpha_{1x} = \left\{(p\alpha_1)p_x\alpha_{1x}\right\}_y + \frac{1}{2}\left\{(p\alpha_1)^2(yx)\right\}$$

nach Formel (VIII) Nr. 81, und weil nach Gleichung (10) die Form $(p\alpha_1)p_x\alpha_{1x}$ gleich $\frac{3}{2}(B\alpha_1)B_x^2$ ist, so wird nach Ausführung der Substitution

$$-(p_1\varDelta)(p\alpha_1)(p\varDelta)(p_1\alpha_1)=\frac{3}{2}(B\alpha_1)(B\varDelta)(Bp_1)(p_1\varDelta)-\frac{1}{2}(p\alpha_1)^2(p_1\varDelta)^2,$$

oder, wenn wir für den zweiten Term rechts seinen Werth aus (12) substituiren:

$$(p\alpha_1)(p_1\alpha_1)(p\varDelta)(p_1\varDelta)=-\frac{9}{4}(B\alpha_1)(B\varDelta)(Bp_1)(p_1\varDelta). \quad (13)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung erhält man aus der Reihenentwicklung

$$\alpha_{1x}p_{1x}p_{1y}=\left\{\alpha_{1x}p_{1x}^2\right\}_y+\frac{1}{2}\left\{(\alpha_1p_1)p_{1x}\right\}(xy),$$

wenn man darin x durch B, y durch $\varDelta$ ersetzt und mit $(B\varDelta)$ multiplicirt. Berücksichtigt man noch, dass $p_{1x}^2\alpha_{1x}=C_x^3=\varphi$, so ergiebt sich:

$$(B\alpha_1)(Bp_1)(p_1\varDelta)(B\varDelta)=(BC)^2(B\varDelta)(C\varDelta)-\frac{1}{2}(B\varDelta)^2(\alpha_1p_1)(p_1B).$$

Hierbei verschwindet wieder der zweite Term rechts wegen $(B\varDelta)^2$; substituirt man den sich so für die linke Seite ergebenden Werth $(BC)^2(B\varDelta)(C\varDelta)$, der nichts anderes ist als $(\varDelta,\varDelta)^2$, in (13), so kommt als zweite Relation:

$$(p\alpha_1)(p_1\alpha_1)(p\varDelta)(p_1\varDelta)=-\frac{9}{4}(\varDelta,\varDelta)^2, \quad (14)$$

also wegen (12):

$$(p\varDelta)^2(p_1\alpha_1)^2=-\frac{3}{2}(\varDelta,\varDelta)^2,$$

und demnach wegen (11):

$$R=+\frac{27}{2}(\varDelta,\varDelta)^2=(\alpha_1\alpha_2)^2(\alpha_1\alpha_3)^2(\alpha_2\alpha_3)^2, \quad (15)$$

womit unsere Aufgabe erledigt ist.

95. *Allgemeiner Fall.* Schon dieses einfache Beispiel zeigt, dass die Aufgabe, eine in symmetrischen Functionen der Wurzeldifferenzen gegebene Covariante direct in ein symbolisches Product umzuformen, complicirter Natur ist. Noch ungleich schwieriger gestalten sich die Verhältnisse in allgemeineren Fällen. Indess wollen wir doch — theoretisch wenigstens — diese Frage erledigen, die auch anderweitig von Interesse ist. Es sei:

$$Q=\sum\overline{Q}$$

die gegebene Covariante der Form $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades in x

$$\varphi=\alpha_{1x}\cdot\alpha_{2x}\cdot\alpha_{3x}\cdots\alpha_{n+1,x}=A_x^{n+1}=B_x^{n+1}=\text{etc.}$$

Dabei ist jedes Glied $\overline{Q}$ der Summe rechts ein Product von der Gestalt

$$\overline{Q}=(\alpha_i\alpha_k)^{\lambda_1}(\alpha_i\alpha_\mu)^{\lambda_2}\cdots\alpha_{ix}^{\lambda_1}\alpha_{kx}^{\lambda_2}\cdot\alpha_{\mu x}^{\lambda_3}\cdots,$$

wo jede Wurzel α_i in demselben Grad auftritt. Irgend eines der Glieder

$\overline{Q}$ wollen wir als Repräsentant herausgreifen, an dem die Umformung gezeigt werden soll. Die Aufgabe ist alsdann, in $\overline{Q}$ successive durch Einführung von immer mehr und mehr Symbolen $A, B, C \ldots$ die Grössen α_i zu verdrängen. Hiezu benutzen wir wie im Beispiel die Hilfsform n^{ten} Grades

$$p = \alpha_{2x}\alpha_{3x}\alpha_{4x}\cdots\alpha_{n+1,x} = a_x^n = b_x^n = \text{etc.},$$

welche sich von φ nur um den Factor α_{1x} unterscheidet. Denken wir uns nun einen Augenblick in $Q = \sum \overline{Q}$ die Wurzel α_1 durch y ersetzt, so ist die entstehende Form jedenfalls Covariante von p, und wir können annehmen, dass wir die Aufgabe, die wir für Formen $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades lösen wollen, für Formen n^{ten} Grades bereits erledigt haben, dass es uns also möglich ist, alle in symmetrischen Functionen der Wurzeln gegebenen Covarianten der Form niedrigeren Grades $p = p_x^n$ durch die Symbole $a, b, c \cdots$ von p darzustellen. Ersetzen wir alsdann wiederum y durch α_1, so ist nunmehr $Q = \sum \overline{Q}$ ausgedrückt in α_1 und Symbolen a, b, c, d. h. Q ist dargestellt als simultane Covariante der Formen α_{1x} und p_x^n. Die eben gemachte Annahme ist erlaubt, denn für Formen ersten Grades können wir sie jederzeit sofort realisiren.

96. Es handelt sich nun darum, vermöge der Identität

$$A_x^{n+1} = a_x^n \cdot \alpha_{1x} \tag{1}$$

die Symbole a, b, c durch Symbole A zu ersetzen und damit die Grösse α_1 von selbst successive zu eliminiren. Zu dem Zwecke stellen wir zunächst nach dem in Nr. 46 gegebenen Satze den Repräsentanten $\overline{Q}$ durch eine Summe von Ueberschiebungen dar

$$\overline{Q} = \sum (L, M)^\nu, \tag{2}$$

wobei die Formen L nur α_1 und das Symbol a enthalten, also die Gestalt

$$L = (a\alpha_1)^k a_x^{n-k} \alpha_{1x}^\varrho \tag{3}$$

besitzen, während die Formen M irgend welche Covarianten von p mit den Symbolen $b, c, d, \ldots$ bedeuten. Besitzt nun L wirklich Factoren erster Art α_{1x}, ist also $\varrho > 0$, so ergiebt sich durch $k$malige successive Ueberschiebung von (1) über α_{1x}:

$$(n-k+1)(a\alpha_1)^k a_x^{n-k}\alpha_{1x} = (n+1)(A\alpha_1)^k A_x^{n-k+1}, \tag{4}$$

oder, wenn wir mit $\alpha_{1x}^{\varrho-1}$ multipliciren und mit (3) compariren:

$$L = \frac{n+1}{n-k+1}(A\alpha_1)^k A_x^{n-k+1}\alpha_{1x}^{\varrho-1}.$$

Dies ist eine **erste** Reductionsformel für alle jene Glieder der Gleichung (2), welche durch Ueberschiebung von Formen L entstehen, die Factoren erster Art α_{1x} besitzen. Durch sie wird der Exponent von α_{1x}^{ϱ} um 1 vermindert und gleichzeitig das Symbol A an Stelle von a eingeführt. Besitzt dagegen eine solche Form L keine Factoren erster Art α_{1x}, in welchem Falle wir sie einstweilen **normirte** Formen L nennen wollen, so kann für sie die Formel (4) nicht Reductionsformel sein; wir werden diese normirten Formen L später reduciren. Alle Glieder G_i der Summe (2) dagegen, welche durch Formel (4) reducirbar waren, können wir nun wieder nach dem schon einmal citirten Satze in Nr. 46 darstellen in der Gestalt:

$$G_i = \sum (\overline{Q}_1, A_x^{n+1}),$$

wobei nun mit $\overline{Q}_1$ wieder simultane Covarianten vom Typus $\overline{Q}$ bezeichnet sind, deren L jedoch einen Factor α_{1x} weniger enthalten und auch niedrigeren Grades in den Coefficienten von p sind. Diese Formen $\overline{Q}_1$ reduciren wir alsdann in der gleichen Weise wie die $\overline{Q}$ und indem wir diesen Process immer von Neuem wiederholen, werden dabei in die bezeichneten Glieder immer und mehr Symbole $A, B, C, \ldots$ eingeführt, während gleichzeitig ihr Grad sich successive reducirt, bis schliesslich überhaupt keine Factoren erster Art α_{1x} in den sich immer neuerdings ergebenden Formen L auftreten.

97. Die weitere Reduction fällt alsdann zusammen mit der Reduction jener Glieder in (2), die aus normirten Formen L durch Ueberschiebung gebildet werden können. Für diese ergiebt sich die Reduction auf folgende Weise. Wir stellen zunächst den Repräsentanten $\overline{Q}$, wenn in ihm bereits Symbole $A, B, C \ldots$ auftreten sollten, als Summe von Ueberschiebungen dar, gebildet von Formen $\overline{Q}_1$, welche nur α_1 und Symbole $a, b, c \ldots$ enthalten, über Covarianten von $\varphi = A_x^{n+1}$. In den Formen $\overline{Q}_1$ trennen wir alsdann wieder α_1 und die Symbole $a, b, c, \ldots$ in zwei Gruppen: eine erste, welche α_1 und die Symbole a **und** b umfasst, eine zweite für die noch übrigen Symbole $c, d, e, \ldots$ Dann lässt sich $\overline{Q}_1$ in der Gestalt darstellen:

$$\overline{Q}_1 = \sum (N, R)^{\nu},$$

wo nun die Formen N vom Typus

$$N = (a\,b)^{\mu}\,(a\,\alpha_1)^k\,a_x^{n-k-\mu}\,b^{n-\mu}, \quad k > 1$$

sind, während die Formen R irgend welche Covarianten von p bedeuten. Wie wir nun oben eine Reductionsformel für die Formen L gegeben haben, so entwickeln wir jetzt eine solche für N. Die Form N

geht nämlich bis auf den Factor $(-1)^{\mu+1}$ aus $b_y \alpha_{1y} b_x^{n-\mu}$ hervor, wenn wir darin y durch a ersetzen und mit $(a\alpha_1)^{k-1} a_x^{n-k-\mu}$ multipliciren. Nun ist aber nach (VIII) Nr. 81

$$b_y^\mu \alpha_{1y} b_x^{n-\mu} = \left\{b_x^n \alpha_{1x}\right\}_{y^{\mu+1}} + \frac{n-\mu}{n+1}(b\alpha_1)(xy)\, b_x^{n-\mu-1} b_y^\mu.$$

Ersetzen wir darin die erste Elementarcovariante durch ihr Symbol A_x^{n+1} nach (1) Nr. 96 und führen die Substitution aus, so kommt:

$$(-1)^{\mu+1} N = (Aa)^{\mu+1} (a\alpha_1)^{k-1} A_x^{n-\mu} a_x^{n-k-\mu}$$
$$- \frac{n-\mu}{n+1} (b\alpha_1)(a\alpha_1)^{k-1} (ba)^\mu b_x^{n-\mu-1} a_x^{n-k-\mu+1}.$$

Das erste Glied rechts besitzt einen Factor $(a\alpha_1)$ weniger als N und statt des Symboles b das Symbol A, ist also reducirt gegenüber der Form N. Nicht aber das zweite Glied rechts, das eher complicirter genannt werden muss. Indess geht dieses zweite Glied, das wir, vom Factor $-\frac{n-\mu}{n+1}$ abgesehen, mit N_1 bezeichnen wollen, aus $(a\alpha)^{k-1} a_y^\mu a_x^{n-k-\mu+1} \alpha_y$ hervor, wenn wir darin y durch b ersetzen und mit $b_x^{n-\mu-1}$ multipliciren. Es ist aber nach (VIII) Nr. 81

$$(a\alpha_1)^{k-1} a_y^\mu \alpha_{1y} a_x^{n-k-\mu+1} = \left\{(a\alpha_1)^{k-1} a_x^{n-k+1} a_{1x}\right\}_{y^{\mu+1}}$$
$$+ \frac{n-k-\mu+1}{n-k+3} (a\alpha_1)^k a_y^\mu a_x^{n-k-\mu} (xy).$$

Ersetzen wir darin die erste Elementarcovariante vermöge der Gleichung (4) durch $\frac{n+1}{n-k}(A\alpha_1)^{k-1} A_x^{n-k}$ und führen alsdann die Substitution aus, so geht die linke Seite über in N_1 und das zweite Glied rechts in N. Schaffen wir dieses Glied auf die linke Seite, so kommt:

$$(-1)^{\mu+1} N_1 - \frac{n-k-\mu+1}{n-k+3} N = \frac{n+1}{n-k}(A\alpha_1)^{k-1}(Ab)^{\mu+1} b_x^{n-\mu-1} A_x^{n-k-\mu}. \quad (1)$$

Hiezu hatten wir:

$$(-1)^{\mu+1} N - \frac{n-\mu}{n+1} N_1 = (Ab)^{\mu+1} (b\alpha_1)^{k-1} A_x^{n-\mu} b_x^{n-k-\mu}, \quad (2)$$

und diese beiden Gleichungen zusammen liefern in der That eine Reduction für die Formen N und N_1. Durch fortgesetzte Wiederholung dieses Verfahrens wird hierdurch successive nicht nur die Anzahl der Klammerfactoren, welche α_1 enthalten, vermindert, sondern auch die Anzahl der Symbole $a, b, c, \ldots$

Diese beiden Reductionsformeln (1) und (2) führen so endlich neben Gliedern, die bereits völlig in den Symbolen $A, B, C, \ldots$ dargestellt sind, auf Glieder, die ausser den Symbolen $A, B, C, \ldots$

nur mehr ein Symbol a und einmal die Wurzel α_1 enthalten, die also entstanden gedacht werden können durch Ueberschiebung von Formen

$$L = (a\alpha_1)\, a_x^{n-1} \tag{3}$$

mit symbolischen Producten in den Symbolen $A, B, C, \ldots$ Auf sie lassen sich Gleichungen (1) und (2) nicht mehr anwenden, da dieselben die gleichzeitige Anwesenheit von mindestens zwei Symbolen a und b voraussetzen. Allein diese Glieder verschwinden (vergl. auch das Beispiel) identisch. Um dies theoretisch einzusehen, denke man sich nur auch die übrigen Glieder $\bar{Q}$ in derselben Weise wie den Repräsentanten $\bar{Q}$ behandelt. Dann scheidet sich schliesslich die Covariante

$$Q = \sum \bar{Q}$$

in zwei Theile, deren erster nur mehr symbolische Producte in A, B, C enthält und also für sich symmetrisch in den Wurzeln α_i, und deren zweiter Theil alle Ueberschiebungen mit den Formen L vom Typus (3) enthält. Da aber Q selbst symmetrisch ist, so muss dieser Theil ebenfalls für sich symmetrisch in den Wurzeln α_i sein, und kann also seinen Werth nicht ändern bei Vertauschungen zweier Wurzeln. Ersetzen wir nun in diesem Theile

$$\sum (L, M)^\nu = \sum ((a\alpha_1)\, a_x^{n-1}, M)^\nu$$

a_x^n durch seinen Wert $\alpha_{2x}\alpha_{3x}\alpha_{4x} \cdots \alpha_{n+1x}$, so kommt:

$$\sum (L, M)^\nu = \sum \Big(\sum (\alpha_2\alpha_1)\, \alpha_{3x}\alpha_{4x} \cdots, M \Big)^\nu .$$

Die rechte Seite ändert aber ihren Werth, wenn man α_2 mit α_1 vertauscht, d. h. sie kann nur eine verschwindende symmetrische Function sein. Wir werden im dritten Bande eine Erweiterung der hier gegebenen Entwicklungen auf ternäre Formen kennen lernen.

98. *Ueber Covarianten dritten Grades in den Coefficienten einer Form $f = a_x^n$.* Schon in dem ersten Paragraphen dieser Vorlesungen haben wir gezeigt, dass ein symbolisches Product, dessen zumeist auftretender Klammerfactor $(ab)^{2\mu-1}$ ist, sich stets durch eine Summe anderer Producte darstellen lässt, die den Factor $(ab)^{2\mu}$ besitzen. Es ist nun aber sehr bemerkenswerth, dass es auch eine Reihe symbolischer Producte mit dem Factor $(ab)^{2\mu}$ giebt, welche in eine Summe von andern Producten entwickelt werden können, die durchwegs mindestens $(ab)^{2\mu+2}$ als Factor enthalten. Zu diesen gehören unter andern alle geraden Ueberschiebungen:

$$U = ((f, f)^{2\mu}, f)^{2\mu+\varrho} = ((ab)^{2\mu}\, a_x^{n-2\mu}\, b_x^{n-2\mu},\ c_x^n)^{2\mu+\varrho},$$



wenn $\varrho \geqq 0$, $\mu \leqq \frac{n}{4}$ ist. Nur in einem besondern Falle, wenn nämlich $n = 4\mu$ und $\varrho = 2\mu$ ist, wird diese Entwicklung unmöglich. Die Ueberschiebung U ist dann eine Invariante $j = (ab)^{2\mu}(ac)^{2\mu}(bc)^{2\mu}$. Indem wir nun die Möglichkeit der erwähnten Entwicklungen von U im allgemeinen Falle darthun, ergiebt sich alsdann der etwas allgemeinere Satz:

„Symbolische Producte mit dem Factor $(ab)^{2\mu}(ac)^{2\mu}$ lassen sich stets — von etwaigen Gliedern mit dem Factor

$$j = (ab)^{2\mu}(ac)^{2\mu}(bc)^{2\mu}$$

abgesehen — in eine Summe anderer Producte entwickeln, welche mindestens den Factor $(ab)^{2\mu+2}$ besitzen."

Der Beweis lässt sich folgendermassen durch Reihenentwicklung führen. Das erste Glied der Ueberschiebung U ist

$$G_0 = (ab)^{2\mu}(ac)^{2\mu+\varrho}a_x^{n-4\mu-\varrho}b_x^{n-2\mu}c_x^{n-2\mu-\varrho}.$$

Es entsteht aus dem Polarengliede: $(ab)^{2\mu}a_y^{2\mu+\varrho}a_x^{n-4\mu-\varrho}b_x^{n-2\mu}$ durch die Substitution $y_1 = c_2$, $y_2 = -c_1$; entwickeln wir aber dasselbe in Reihe (VIII), so kommt:

$$\begin{aligned}\overline{G}_0 &= (ab)^{2\mu}a_y^{2\mu+\varrho}a_x^{n-4\mu-\varrho}b_x^{n-2\mu}\\ &= (f,f)^{2\mu}_{y^{2\mu+\varrho}} + \text{Const.} \times (f,f)^{2\mu+1}_{y^{2\mu+\varrho-1}}(yx) + \cdots,\end{aligned}$$

oder, weil rechts alle ungeraden Elementarcovarianten verschwinden:

$$\overline{G}_0 = (f,f)^{2\mu}_{y^{2\mu+\varrho}} + \text{Const.} \times (f,f)^{2\mu+2}_{y^{2\mu+\varrho-2}}(yx)^2 + \cdots$$

Jedes Glied rechts, vom ersten abgesehen, enthält den Factor $(ab)^{2\mu+2}$, der auch erhalten bleibt, wenn wir nun y_1 durch $+c_2$ und y_2 durch $-c_1$ ersetzen und mit $c_x^{n-2\mu-\varrho}$ multipliciren. Mit Rücksicht auf den in Nr. 43 erläuterten Modulbegriff können wir daher nach ausgeführter Substitution diese letzte Gleichung schreiben:

$$\begin{aligned}&(ab)^{2\mu}(ac)^{2\mu+\varrho}a_x^{n-4\mu-\varrho}b_x^{n-2\mu}c_x^{n-2\mu-\varrho}\\ &\equiv \text{Const.} \times ((f,f)^{2\mu},f)^{2\mu+\varrho} \text{ mod. } (ab)^{2\mu+2}.\end{aligned}$$

Ist nun $\varrho > 0$, also mindestens gleich 1, so enthält nach dem in Nr. 11 gegebenen Satze auch das Glied links den Factor $(ab)^{2\mu+2}$, und wir haben demnach als erstes Resultat:

$$((f,f)^{2\mu},f)^{2\mu+\varrho} \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{2\mu+2}, \quad \mu < \frac{n}{4}, \quad \varrho > 0. \tag{I}$$

Diese Gleichung gilt aber auch noch, wenn $\varrho = 0$, so lange nur $n > 4\mu$, etwa $n = 4\mu + \lambda$. Zum Beweise gehen wir alsdann vom symbolischen Producte $(ab)^{2\mu-1}a_y^{n-2\mu+1}b_x^{n-2\mu+1} = (ab)^{2\mu-1}a_y^{2\mu+\lambda+1}b_x^{2\mu+\lambda+1}$

aus, und entwickeln dasselbe in Reihe (VIII). Dabei verschwinden rechts wiederum alle ungeraden Ueberschiebungen, während die Elementarcovarianten $(f, f)^{2\mu+2k}$, $k > 0$, von 0 verschieden sind. Ersetzen wir alsdann wiederum y_1 durch c_2, y_2 durch $-c_1$ und multipliciren mit $c_x^{n-2\mu-1}$, so kommt:

$$(ab)^{2\mu-1}(ac)^{2\mu+\lambda+1}b_x^{2\mu+\lambda+1}c_x^{n-2\mu-1} \equiv \text{Const.} \times ((f, f)^{2\mu}, f)^{2\mu} \bmod. (ab)^{2\mu+2},$$

oder, weil das Glied links wegen $(ac)^{2\mu+1}$ selbst $\equiv \bmod. (ab)^{2\mu+2}$, so ist:

$$((f, f)^{2\mu}, f)^{2\mu} \equiv 0 \bmod. (ab)^{2\mu+2}, \quad \mu < \frac{n}{4}\cdot \tag{II}$$

Diese Gleichung gilt auch, wenn $n = 4\mu$, also $\lambda = 0$ ist. Es fragt sich jetzt nur noch, besteht auch Gleichung (I) für $n = 4\mu$. In diesem Falle tritt alsdann kein Factor $(ac)^{2\mu+\varrho}$ neben $(ab)^{2\mu}$ auf, und wir können, um dies zu entscheiden, nicht mehr von dem dort benutzten Gliede $\overline{G}_0$ ausgehen. Wir benutzen vielmehr nun das symbolische Product:

$$P = (ab)^{2\mu-1}(ac)^{2\mu+1}(bc)^{\varrho}b_x^{2\mu-1-\varrho}c_x^{2\mu-1-\varrho},$$

welches aus dem Polarengliede $\overline{\overline{G}}_0 = (ab)^{2\mu-1}a_y^{2\mu+1}b_y^{\varrho}b_x^{2\mu+1-\varrho}$ für $y_1 = c_2$, $y_2 = -c_1$ hervorgeht. Die Reihenentwicklung liefert:

$$\overline{\overline{G}}_0 = (f, f)^{2\mu-1}_{y^{2\mu+\varrho+1}} + \text{Const.}(f, f)^{2\mu}_{y^{2\mu+\varrho}}(yx)$$
$$+ \text{Const.} \times (f, f)^{2\mu+1}_{y^{2\mu+\varrho-1}}(yx)^2 + \cdots$$

Hieraus entsteht nach ausgeführter Substitution:

$$(ab)^{2\mu-1}(ac)^{2\mu+1}(bc)^{\varrho}b_x^{2\mu-1-\varrho}c_x^{2\mu-1-\varrho} \equiv \text{C.}((f, f)^{2\mu}, f)^{2\mu+\varrho} \bmod. (ab)^{2\mu+2}.$$

Diese Gleichung besteht, so lange $\varrho \leqq 2\mu - 1$ und demnach hat man unter dieser Bedingung immer:

$$((f, f)^{2\mu}, f)^{2\mu+\varrho} \equiv 0 \bmod. (ab)^{2\mu+2}, \quad n = 4\mu. \tag{III}$$

Ist aber $\varrho = 2\mu$, so existirt kein symbolisches Product P, in diesem Falle ist aber $((f, f)^{2\mu}, f)^{4\mu}$ die Invariante j, die sich somit in kein anderes symbolisches Product umformen lässt. Nehmen wir nun diese Invariante aber mit unter die Moduln auf, so können wir die drei Gleichungen (I), (II), (III) in eine zusammenfassen:

$$U = ((f, f)^{2\mu}, f)^{2\mu+\varrho} \equiv 0 \bmod. (ab)^{2\mu+2}, \; j, \tag{IV}$$

wobei nun $n \geqq 4\mu$, und $\varrho \leqq 2\mu$ sein kann.

Nun besitzt jede Ueberschiebung U ein Glied

$$G = (ab)^{2\mu}(ac)^{2\mu}\cdot Q,$$

wo Q die übrigen symbolischen Factoren enthält. Anderntheils ist nach Nr. 44 jedes Glied von U durch U selbst und Ueberschiebungen

von Formen darstellbar, die aus $(f, f)^{2\mu} = (ab)^{2\mu} a_x^{n-2\mu} b_x^{n-2\mu}$, oder $f = c_x^n$ durch Faltung entstehen. Die Faltung von c_x^n liefert aber 0, die von $(f, f)^{2\mu}$ einen weitern Klammerfactor (ab). Demnach ist:

$$G - U \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{2\mu+2},$$

oder, weil U selbst $\equiv 0$ mod. $(ab)^{2\mu+2}, j$,

$$G \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{2\mu+2}, j.$$

Alle symbolischen Producte aber mit dem Factor $(ab)^{2\mu}(ac)^{2\mu}$ kann man sich aus G durch Faltung mit anderen Formen entstanden denken. Daher können wir schliesslich behaupten:

$$(ab)^{2\mu}(ac)^{2\mu} \cdot R \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{2\mu+2}, j,$$

wo nun R ein Product von irgend welchen symbolischen Factoren ist. Der Eingangs aufgestellte Satz ist sonach bewiesen. Symbolische Producte G dieser Art liefern insbesondere die Ueberschiebungen $((f,f)^{2\mu}, (f, f)^{2\mu})^{2\mu}$; und demnach ist:

$$U_1 = ((f, f)^{2\mu}, (f, f)^{2\mu})^{2\mu} \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{2\mu+2}, j,$$

da wie vorhin so auch hier $G - U_1 \equiv 0$ mod. $(ab)^{2\mu+2}$ ist.

99. *Ueber die Cayley'sche respective Bézout'sche Methode der Discriminantenbildung.* Die Discriminante einer Form n^{ten} Grades ist bekanntlich (vergl. auch Bd. I Nr. 173) bis auf einen Zahlenfactor gleich der Resultante der beiden ersten Differentialquotienten der Form. Anstatt aber die Resultante aus diesen beiden Formen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades direct zu bilden, wie dies Sylvester gethan hat, reducirten Bézout und Cayley die zwei Gleichungen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades auf $(n-1)$ Gleichungen $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades und erniedrigten so wesentlich den Grad der Eliminationsdeterminante. (Vergl. Bd. I Nr. 150—152.) Wir wollen nun auch auf symbolischem Wege diese Reduction vornehmen, um später bei der Discriminantenbildung von Formen vierten, fünften und sechsten Grades davon Gebrauch zu machen.

Angenommen die gegebene Form $f = a_x^n$ habe die Doppelwurzel α, dann verschwindet sowohl f, als auch f_1 und f_2 für $x = \alpha$, d. h. es ist:

$$(a\alpha)^n = 0 \tag{1}$$

$$(a\alpha)^{n-1} a_x = 0. \tag{2}$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt noch die dritte:

$$(a\alpha)^{n-2} a_x^2 = \lambda \alpha^2. \tag{3}$$

Denn bildet man die Functionaldeterminante dieser quadratischen Form $(a\alpha)^{n-1} a_x^2 = c_x^2$ mit der linearen Form α_x, so kommt:

$$(c_x^2, \alpha_x) = ((a\alpha)^{n-2} a_x^2, \alpha_x) = (a\alpha)^{n-1} \alpha_x = 0,$$

d. h. diese Functionaldeterminante verschwindet identisch. Aus dieser Identität $(c\alpha)c_x = 0$ ergiebt sich unmittelbar durch Coefficientenvergleichung:

$$\bar{c}_0\alpha_2 - \bar{c}_1\alpha_1 = 0 \quad \text{und} \quad \bar{c}_1\alpha_2 - \bar{c}_2\alpha_1 = 0,$$

oder:

$$\frac{c_1}{c_0} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \frac{c_2}{c_0} = \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2},$$

und damit die in (3) ausgesprochene Thatsache, dass die quadratische Form c_x^2 proportional ist dem Quadrat der linearen Form α_x.

Irgend zwei der drei Gleichungen (1), (2), (3) liefern also die Bedingungen, dass α eine Doppelwurzel von f ist; insbesondere gehen aus der Identität (2) zwei Gleichungen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in α hervor, die wir nunmehr nach dem Vorgange von Cayley und Bézout auf $(n-1)$ Gleichungen $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades reduciren wollen. Zu dem Zwecke ersetzen wir in (2) x durch b, α durch y, multipliciren alsdann mit b_x^{n-1} und entwickeln die so entstehende Form in die Reihe (VIII). Da in ihr alle ungeraden Ueberschiebungen verschwinden, so kommt:

$$(ab)\,a_y^{n-1}\,b_x^{n-1} = \frac{n-1}{2}\,(f,f)^2_{y^{n-2}}(yx) + \frac{\binom{n-1}{3}^2}{\binom{2n-4}{3}}\,(f,f)^4_{y^{n-4}}\,(yx)^3 + \cdots$$

Ersetzen wir hierin wiederum y durch α, so verschwindet wegen (2) die linke Seite dieser Gleichung. Wir dividiren alsdann dieselbe durch α_x und ersetzen die erste der rechts auftretenden Ueberschiebungen durch ihr erstes Glied, indem wir uns die Ueberschiebung nach diesem Glied und niedrigeren Ueberschiebungen entwickelt denken. Die letzteren vereinigen wir mit den nämlichen ohnehin bereits auf der rechten Seite vorhandenen entsprechenden Ueberschiebungen, während wir das erste Glied von $((f,f)^2, \alpha_x^{n-2})^{n-2}$ auf die linke Seite schaffen; so erhalten wir:

$$(ab)^2(a\alpha)^{n-2}b_x^{n-2} = c_0\,((f,f)^4, \alpha_x^{n-4})^{n-4}\,\alpha_x^2 + c_1\,((f,f)^6, \alpha_x^{n-6})^{n-6}\cdot\alpha_x^4 + \cdots,$$

wo nun $c_0, c_1, \ldots$ von den obigen Constanten verschieden sind. Diese letzte Identität repräsentirt aber $(n-1)$ Gleichungen $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades in α, und damit ist die gewünschte Reduction bewerkstelligt. Die Determinante dieser $(n-1)$ homogenen Gleichungen für die $(n-1)$ Unbekannten $\alpha^{n-2}, \alpha^{n-3}, \ldots \alpha^2, \alpha, 1$ verschwindet identisch, und da sie vom Grade $2(n-1)$ in den Coefficienten ist, so kann sie von der Discriminante nur um einen numerischen Factor verschieden sein.

§ 9. Beweis, dass jede In- und Covariante durch ein symbolisches Product darstellbar ist.

100. *Formulirung der Aufgabe für eine binäre Form.* Dass jedes symbolische Product, sobald es nur die Symbole in geeigneter Zahl enthält, eine simultane Invariante respective Covariante mehrerer gegebener Formen darstellt, haben wir bereits in § 1 dieses Bandes erkannt. Dies genügte für die bisherigen Untersuchungen. Die nun folgenden Untersuchungen erheischen aber die Existenz des umgekehrten Satzes: Jede Invariante und Covariante einer Form oder eines simultanen Systemes von Formen ist durch ein symbolisches Product darstellbar; diesen Satz wollen wir nunmehr auf zwei verschiedenen Wegen beweisen und nicht nur für binäre Formen, sondern auch für Formen mit beliebig vielen Veränderlichen. Dabei können wir uns im Beweise auf Invarianten einer einzigen Form beschränken. Denn es wird sich einestheils zeigen, dass die Voraussetzung einer simultanen Invariante mehrerer Formen den Beweis nur quantitativ und nicht qualitativ ändern würde, und was anderntheils den entsprechenden Beweis für Covarianten betrifft, so geht derselbe wegen der Cogredienz der Symbolreihen $a_2, -a_1$; $b_2, -b_1$; etc., mit der Variabelnreihe x_1, x_2 (vergl. Nr. 4) unmittelbar aus dem für Invarianten hervor. Ist nämlich Φ eine simultane Covariante m^{ten} Grades in x der Formen $f, \varphi, \psi, \chi \dots$, und $g = g_1 x_1 + g_2 x_2$ irgend eine lineare Form, so ist die Ueberschiebung $(\Phi, g^m)^m$ eine Invariante. Lässt sich nun diese Invariante durch ein symbolisches Product darstellen, so hat auch die Covariante, die ja aus ihr durch die Substitution $x_1 = -g_2$, $x_2 = g_1$ wiederum hervorgeht, das analoge symbolische Product zum Repräsentanten.

Es sei nun i eine Invariante μ^{ten} Grades in den Coefficienten der Form

$$f = \bar{a}_0 x_1^n + \binom{n}{1} \bar{a}_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} \bar{a}_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + \bar{a}_n x_2^n$$
$$= a_x^n = b_x^n = c_x^n = \dots \text{ etc.}$$

Durch die Transformation

$$x_1 = \xi_1 y_1 + \eta_1 y_2, \quad x_2 = \xi_2 y_1 + \eta_2 y_2$$

vom Modul

$$\Delta = (\xi \eta)$$

geht diese Form f über in die Form

$$F = \bar{A}_0 y_1^n + \binom{n}{1} \bar{A}_1 y_1^{n-1} y_2 + \binom{n}{2} \bar{A}_2 y_1^{n-2} y_2 + \cdots + \bar{A}_n y_2^n$$
$$= (a_\xi y_1 + a_\eta y_2)^n = (b_\xi y_1 + b_\eta y_2)^n = \dots \text{ etc.},$$

und wir wissen (vergl. Nr. 3), dass zwischen den transformirten wirklichen und symbolischen Coefficienten die analoge Beziehung:

$$\bar{A}_k = a_\xi^{n-k} a_\eta^k$$

besteht, wie zwischen den Coefficienten der ursprünglichen Form:

$$\bar{a}_k = a_1^{n-k} a_2^k .$$

Besitzt nun die Invariante der ursprünglichen Form f den Ausdruck:

$$i = \chi(\bar{a}) ,$$

so muss gemäss der Definition einer Invariante der aus den Coefficienten $\bar{A}$ von F gebildete Ausdruck

$$J = \chi(\bar{A})$$

bis auf eine Potenz des Transformationsmoduls dem ursprünglichen gleich sein, d. h. die Bedingung, dass i Invariante, stellt sich dar durch die Gleichung

$$J = i \cdot \Delta^\varrho = i \cdot (\xi\eta)^\varrho . \tag{I}$$

Wir stellen nun die Behauptung auf: „Die so definirte Function

$$i = \chi(a)$$

ist durch ein symbolisches Product oder eine Summe solcher Producte darstellbar.“

101. *Umformung der Definitionsgleichung* (I) *einer Invariante.* Zunächst folgt aus der Identität (I), dass i in den Coefficienten $\bar{a}$ homogen und isobar vom Gewichte ϱ sein muss. (Vergl. Nr. 8.) Führt man daher in diese ganze homogene Function i der Coefficienten $\bar{a}$ die symbolischen Coefficienten

$$\bar{a}_k = a_1^{n-k} a_2^k = b_1^{n-k} b_2^k = c_1^{n-k} c_2^k \dots$$

ein, so setzt sich i aus einer Summe von Gliedern G_k zusammen, deren jedes die Form besitzt:

$$G_k = \lambda_k \cdot a_1^{n-k} a_2^k \cdot b_1^{n-k} b_2^k \cdots r_1^{n-\pi} r_2^\pi \cdot t_1^{n-\pi} t_2^\pi \cdots s_1^{n-\nu} s_2^\nu \cdots \text{ etc.}$$

Hierbei ist λ_k ein bestimmter Zahlencoefficient. Ersetzen wir hierin nun $a_1, b_1, r_1, t_1 \dots$ etc. durch $a_\xi, b_\xi, r_\xi\ t_\xi \dots$ etc. und ebenso a_2, $b_2, r_2, t_2 \dots$ etc. durch $a_\eta, b_\eta, r_\eta, t_\eta \dots$ etc., so erhalten wir das entsprechende Glied

$$\bar{G}_k = \lambda_k a_\xi^{n-k} a_\eta^k \cdot b_\xi^{n-k} b_\eta^k \cdots r_\xi^{n-\pi} r_\eta^\pi \cdot t_\xi^{n-\pi} t_\eta^\pi \cdots s_\xi^{n-\nu} s_\nu \cdots \text{ etc.} \tag{1}$$

der Invariante J. Es enthält ϱ Factoren, die linear in ξ und ebenso viele, die linear in η sind; daher können wir dasselbe kürzer bezeichnen mit

$$\bar{G}_k = m_{k,\xi}^\varrho \ n_{k,\eta}^\varrho .$$

Die Invariante J selbst ist dann dargestellt durch

$$J = \sum_1^s \lambda_k m^\varrho_{k,\xi} \cdot n^\varrho_{k,\eta}. \tag{2}$$

Die Summe rechts ist eine homogene Function mit zwei Reihen variabler Parameter ξ und η, und wir können sie stets symbolisch durch

$$p^\varrho_\xi q^\varrho_\eta = (\mu_1 m^{(1)}_\xi + \mu_2 m^{(2)}_\xi + \cdots + \mu_s m^{(s)}_\xi)^\varrho (\nu_1 n^{(1)}_\eta + \nu_2 n^{(2)}_\eta \cdots \nu_s n^{(s)}_\eta)^\varrho \tag{2a}$$

repräsentiren, wenn wir nur die rechts auftretenden numerischen Grössen μ_i und ν_i in Verbindung mit den sich ergebenden Polynomialcoefficienten so bestimmen, dass ihre jeweiligen Producte mit den in (2) vorhandenen numerischen Grössen λ_k übereinstimmen.

Führt man diesen Ausdruck $p^\varrho_\xi q^\varrho_\eta$ für J in die Identität (I) Nr. 100 ein, so erhält man:

$$p^\varrho_\xi q^\varrho_\eta = i \cdot (\xi \eta)^\varrho. \tag{II}$$

An der so umgeformten Identität können wir nun in zweierlei Weise den gewünschten Beweis erbringen. Einmal indem wir auf die linke Seite (II) die Reihenentwicklung anwenden, das andere Mal durch Anwendung des Ω-Processes. Der erste Beweis lässt sich nicht weiter verallgemeinern, ist aber insofern lehrreicher, als er zeigt, wie sich direct durch die Reihenentwicklung die symbolische Darstellung einer Invariante ergiebt. Der zweite Beweis ist dagegen der Erweiterung auf ein Gebiet mit beliebig vielen Variabeln fähig.

102. *Erster Beweis.* Wir hatten in Nr. 81 für eine Form F mit zwei Reihen cogredienter Variabeln die Reihenentwicklung

$$F = r^m_x s^n_y = \sum C_{0k} (\overline{rs})^k_{y^{n-k}} (xy)^k$$

erhalten. Wenden wir dieselbe auf die linke Seite der Identität (II) an, so kommt:

$$p^\varrho_\xi q^\varrho_\eta = \sum_{k=0}^{k=\varrho} \frac{\binom{\varrho}{k}\binom{\varrho}{k}}{\binom{2\varrho-k+1}{k}} (\overline{pq})^k_{\eta^{\varrho-k}} (\xi\eta)^k. \tag{III}$$

Diese Reihe ist eindeutig; wenn wir daher den Werth von $p^\varrho_\xi q^\varrho_\eta$ aus (III) in (II) eintragen, so müssen beide Seiten Glied um Glied übereinstimmen. Da aber rechts alle $\varrho - 1$ ersten Glieder verschwinden, so folgt aus

$$\sum \frac{\binom{\varrho}{k}\binom{\varrho}{k}}{\binom{2\varrho-k+1}{k}} \cdot (\overline{pq})^k_{\eta^{\varrho-k}} (\xi\eta)^k = i \cdot (\xi\eta)^\varrho$$

direct:

$$\frac{\binom{\varrho}{\varrho}\binom{\varrho}{\varrho}}{\binom{\varrho+1}{\varrho}}(pq)^\varrho(\xi\eta)^\varrho = i(\xi\eta)^\varrho,$$

oder

$$\frac{1}{\varrho+1}(pq)^\varrho = i.$$

Die Invariante i stellt sich also zunächst als das symbolische Product $(pq)^\varrho$ dar. Nun ist aber gemäss der Gleichung (2a) Nr. 101:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \mu_1 m_1^{(1)} + \mu_2 m_1^{(2)} + \cdots + \mu_s m_1^{(s)} \\
p_2 &= \mu_1 m_2^{(1)} + \mu_2 m_2^{(2)} + \cdots + \mu_s m_2^{(s)} \\
q_1 &= \nu_1 n_1^{(1)} + \nu_2 n_1^{(2)} + \cdots + \nu_s n_1^{(s)} \\
q_2 &= \nu_1 n_2^{(1)} + \nu_2 n_2^{(2)} + \cdots + \nu_s n_2^{(s)}.
\end{aligned}$$

Ersetzt man daher in (pq) die Grössen $p_1\, p_2\, q_1\, q_2$ durch diese ihre Werthe in $m^{(k)}$ und $n^{(k)}$, so geht (pq) über in $\sum \mu_k \nu_\lambda (mn)$ und demnach wird:

$$(pq)^\varrho = \left\{\sum \mu_k \nu_\lambda (mn)\right\}^\varrho = \sum c_i \cdot (m_{k_1} n_{\lambda_1})^{\varrho_1} (m_{k_2} n_{\lambda_2})^{\varrho_2} \ldots -,$$

wobei $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots = \varrho$.

Jedes Product in der Summe rechts repräsentirt eine ϱ^{te} Ueberschiebung je eines Productes von ϱ linearen Factoren a_ξ, $b_\xi \ldots$, mit einem Product von ϱ linearen Factoren a_η, $b_\eta \ldots$ Eine solche Ueberschiebung ist aber nach Nr. 38 (I) durch Aggregate von symbolischen Producten darstellbar, und damit auch die Form $(pq)^\varrho = (\varrho+1)\cdot i$.

Anmerkung. Wir haben diesen Beweis geführt für den Fall, dass i eine Invariante von f allein ist. Man erkennt aber, dass die Annahme, i sei simultane Invariante von f, φ, ψ etc., die ganze Beweisführung keineswegs ändern kann, da dieselbe lediglich eine Vermehrung in der Anzahl der Symbole bewirkt, von der der gegebene Beweis aber unabhängig ist. Daher ist auch jede simultane Invariante durch ein symbolisches Product darstellbar.

103. *Zweiter Beweis.* Die Form $p_\xi^\varrho q_\eta^\varrho$ ist ebenso wie die Determinante $(\xi\eta)$ eine Form mit zwei Reihen binärer variabler Parameter. Wenden wir nun auf die Identität (II) Nr. 101 den Process

$$\Omega(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1\, \partial \eta_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta_1\, \partial \xi_2}$$

an, so erhalten wir gemäss der in Nr. 79 entwickelten Gleichung (II), insofern wir die rechte Seite differentiiren:

$$\varrho^2 i\Omega(\xi\eta)^\varrho = i\varrho(\varrho+1)(\xi\eta)^{\varrho-1},$$

und insofern wir die linke Seite dem gleichen Processe unterwerfen:

$$\varrho^2 \cdot \Omega(p_\xi^\varrho q_\eta^\varrho) = \varrho^2 p_1 q_2 \cdot p_\xi^{\varrho-1} q_\eta^{\varrho-1} - \varrho^2 p_2 q_1 \cdot p_\xi^{\varrho-1} q_\eta^{\varrho-1}$$
$$= \varrho^2 (pq) p_\xi^{\varrho-1} q_\eta^{\varrho-1}.$$

Die Identität (II) geht also über in:

$$(\varrho + 1)\varrho \cdot (\xi\eta)^{\varrho-1} i = \varrho^2 (pq) p_\xi^{\varrho-1} q_\eta^{\varrho-1}.$$

Unterwirft man diese neue Identität wiederholt dem gleichen Processe, so kommt:

$$(\varrho+1)\varrho \cdot \varrho(\varrho-1) \cdot (\xi\eta)^{\varrho-2} \cdot i = \varrho^2 \cdot (\varrho-1)^2 (pq)^2 p_\xi^{\varrho-2} q_\eta^{\varrho-2}$$
$$(\varrho+1)\varrho(\varrho-1) \cdot \varrho(\varrho-1)(\varrho-2) \cdot (\xi\eta)^{\varrho-3} \cdot i = \varrho^2 (\varrho-1)^2 (\varrho-2)^2 (pq)^3 p_\xi^{\varrho-3} q_\eta^{\varrho-3}$$

. . . .

und schliesslich nach ϱ maliger Ausführung des Ω-Processes

$$(\varrho + 1)!\ \varrho!\ i = (\varrho!)^2 \cdot (pq)^2,$$

oder
$$i = \frac{1}{\varrho + 1} (p\varrho)^\varrho,$$

ein Resultat, das mit dem im vorausgehenden Beweise gewonnenen übereinstimmt.

104. *Verallgemeinerung des zweiten Beweises; vorbereitende Untersuchungen.* Wie schon erwähnt, lässt sich der zweite Beweis auf ein Gebiet von beliebig vielen Variabeln ausdehnen. Es wird genügen, denselben auf quinäres Gebiet zu erweitern, da Gedankengang und Rechnung, die sich in engster Weise an den ebengeführten Beweis für binäre Formen anschliessen, ganz ebenso im allgemeinen Falle sich gestalten. Sei also

$$f = a_x^n = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5)^n = b_x^n = \text{etc.}$$

der symbolische Ausdruck einer ganzen homogenen Form mit fünf Variabeln, und $i = \chi(\bar{a})$ sei irgend eine Invariante derselben, dargestellt in den unsymbolischen Coefficienten $\bar{a}$ von f.

Wenden wir auf f die Substitutionen an

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 y_1 + \eta_1 y_2 + \zeta_1 y_3 + \lambda_1 y_4 + \tau_1 y_5 \\ x_2 &= \xi_2 y_1 + \eta_2 y_2 + \zeta_2 y_3 + \lambda_2 y_4 + \tau_2 y_5 \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_5 &= \xi_5 y_1 + \eta_5 y_2 + \zeta_5 y_3 + \lambda_5 y_4 + \tau_5 y_5 \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(I)}$$

so geht die ursprüngliche Function f über in die Form

$$F = (y_1 a_\xi + y_2 a_\eta + y_3 a_\zeta + y_4 a_\lambda + y_5 a_\tau) = A_y^n$$
$$= B_y^n = C_y^n = \text{etc.}$$

Waren demnach in f die nicht symbolischen Coefficienten $\bar{a}$ dargestellt durch

$$a_{k\varrho\mu\nu\sigma} = a_1^{n-k} a_2^{\varrho} a_3^{\mu} a_4^{\nu} a_5^{\sigma}, \quad k = \varrho + \mu + \nu + \sigma,$$

so ist in der transformirten Form F der entsprechende Coefficient

$$A_{k\varrho\mu\nu\sigma} = a_{\xi}^{n-k} a_{\eta}^{\varrho} a_{\zeta}^{\mu} a_{\lambda}^{\nu} a_{\tau}^{\sigma}.$$

Da ferner der Transformationsmodul durch die fünfreihige Determinante

$$(\xi\,\eta\,\zeta\,\lambda\,\tau) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdot & \cdot \\ \zeta_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \cdot & \tau_5 \end{vmatrix} = \Delta$$

dargestellt ist, so wird im quinären Gebiete der analytische Ausdruck für die Definition einer Invariante:

$$J = i\,(\xi\,\eta\,\zeta\,\lambda\,\tau)^{\varrho}. \tag{I}$$

Dabei ist also i genau dieselbe homogene Function in den Symbolreihen $a_1 a_2 \ldots a_5$; $b_1 b_2 \ldots b_5$; ... etc., welche J in den Symbolreihen $a_{\xi} a_{\eta} a_{\zeta} a_{\lambda} a_{\tau}$; $b_{\xi} b_{\eta} b_{\zeta} b_{\lambda} b_{\tau}$; ... etc. ist. Jedes einzelne Glied $\overline{G}_k$ von J ist homogen von der ϱ^{ten} Dimension jeder der fünf Variabeln $\xi\,\eta\,\zeta\,\lambda\,\tau$, und wir können es daher wie früher symbolisch darstellen durch

$$\overline{G}_k = \lambda_k\, r_{\xi}^{\varrho}\, s_{\eta}^{\varrho}\, t_{\zeta}^{\varrho}\, u_{\lambda}^{\varrho}\, v_{\tau}^{\varrho},$$

wo λ_k ein Zahlencoefficient.

Daher lässt sich auch die Summe aller dieser Glieder, d. h. die Invariante zunächst durch den symbolischen Ausdruck

$$J = p_{\xi}^{\varrho}\, q_{\eta}^{\varrho}\, m_{\zeta}^{\varrho}\, n_{\lambda}^{\varrho}\, k_{\tau}^{\varrho}$$

wiedergeben. Die Identität (I) kann also auch in der Form geschrieben werden:

$$p_{\xi}^{\varrho}\, q_{\eta}^{\varrho}\, m_{\zeta}^{\varrho}\, n_{\lambda}^{\varrho}\, k_{\tau}^{\varrho} = i\,(\xi\,\eta\,\zeta\,\lambda\,\tau)^{\varrho}. \tag{II}$$

105. *Der Ω-Process für eine Form mit beliebig vielen Variabeln.* Auf die zuletzt erhaltene Identität wenden wir nunmehr den Ω-Process an. Derselbe lässt sich, von einem Zahlenfactor abgesehen, für fünf Reihen quinärer Variabler symbolisch durch die Determinante

$$\Omega(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f}{\partial \xi_3} & \frac{\partial f}{\partial \xi_4} & \frac{\partial f}{\partial \xi_5} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta_1} & \frac{\partial f}{\partial \eta_2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial \tau_1} & \frac{\partial f}{\partial \tau_2} & \frac{\partial f}{\partial \tau_3} & \cdot & \frac{\partial f}{\partial \tau_5} \end{vmatrix}$$

darstellen, analog wie wir ihn für Formen mit zwei Reihen binärer Variabler durch

$$\Omega(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta_1} & \frac{\partial f}{\partial \eta_2} \end{vmatrix}$$

charakterisiren konnten. Dabei ist wie hier ein Determinantenglied nicht als Product von fünf ersten Differentialquotienten aufzufassen, sondern als ein einziger fünfter partieller Differentialquotient. Es fragt sich nun, in welcher Weise verändert sich die Identität (II), wenn wir die beiden Seiten derselben dem so definirten Processe Ω unterwerfen. Wir erledigen die Frage schrittweise. Zu dem Zwecke unterwerfen wir die Identität (II) zunächst den Operationen $\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \eta_2}$ und $\frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \eta_1}$, indem wir uns alle übrigen Variabeln constant denken.

Aus der linken Seite erhalten wir durch die erste Operation:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \eta_2} (J_{\xi\eta}) = \varrho^2 \cdot p_\xi^{\varrho-1} q_\eta^{\varrho-1} m_\zeta^\varrho n_\lambda^\varrho k_\tau^\varrho \cdot p_1 q_2; \tag{1}$$

die rechte Seite aber geht, abgesehen vom Factor i, über in

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \eta_2} (\xi \eta \zeta \lambda \tau)^\varrho = \frac{\partial \left[\varrho \cdot \varDelta^{\varrho-1} \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial \xi_1}\right]}{\partial \eta_2},$$

also

$$\frac{\partial^2(\varDelta^\varrho)}{\partial \xi_1 \partial \eta_2} = \varrho \cdot (\varrho - 1) \cdot \varDelta^{\varrho-2} \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial \eta_2} + \varphi \cdot \varDelta^{\varrho-1} \cdot \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial \xi_1 \partial \eta_2}. \tag{2}$$

Ganz ebenso liefert die Differentiation

$$\frac{\partial^2(\varDelta^\varrho)}{\partial \xi_2 \partial \eta_1} = \varrho (\varrho - 1) \varDelta^{\varrho-2} \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial \eta_1} + \varrho \cdot \varDelta^{\varrho-1} \cdot \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial \xi_2 \partial \eta_1}, \tag{3}$$

während die gleiche Operation auf der linken Seite ausgeführt, das Resultat:

$$\frac{\partial^2(J_{\xi\eta})}{\partial \xi_2 \partial \eta_1} = \varrho^2 \cdot p_\xi^{\varrho-1} \cdot q_\eta^{\varrho-1} m_\zeta^\varrho n_\lambda^\varrho k_\tau^\varrho \cdot p_2 q_1 \tag{4}$$

ergiebt. Subtrahirt man nun die vierte von der ersten Gleichung, so erhält man:

$$\Omega (J_{\xi\eta}) = \varrho^2 p_\xi^{\varrho-1} q_\eta^{\varrho-1} m_\zeta^\varrho n_\lambda^\varrho k_\tau^\varrho (p_1 q_2 - q_1 p_2). \tag{5}$$

Subtrahirt man ebenso die dritte Gleichung von der zweiten, so kommt

$$\Omega (\varDelta^\varrho) = \varrho (\varrho - 1) \varDelta^{\varrho-2} \cdot \left\{\frac{\partial \varDelta}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial \eta_2} - \frac{\partial \varDelta}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial \eta_1}\right\} \tag{6}$$

$$+ \varrho \cdot \varDelta^{\varrho-1} \left\{\frac{\partial^2 \varDelta}{\partial \xi_1 \partial \eta_2} - \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial \xi_2 \partial \eta_1}\right\}.$$

Nun sind aber $\frac{\partial \Delta}{\partial \xi_i}, \frac{\partial \Delta}{\partial \eta_i}, \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \xi_i \partial \eta_k}$ nichts anderes als Minoren erster, bezw. zweiter Ordnung von Δ, welche zum Elemente ξ_i, η_i, bezw. zum Producte $\xi_i \eta_k$ gehören, und man weiss aus der Lehre von den Determinanten einmal, dass

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \xi_2 \partial \eta_1} = - \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \xi_1 \partial \eta_2}$$

und ebenso, dass $\frac{\partial \Delta}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \eta_2} - \frac{\partial \Delta}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \eta_1}$ nichts anderes ist als der Minor $n - 2 = 3^{\text{ter}}$ Ordnung der zu Δ adjungirten Determinante, dass also der Werth dieses Ausdruckes dargestellt ist durch (vgl. Nr. 88, Bd. I)

$$\Delta \cdot \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \xi_1 \partial \eta_2}.$$

Trägt man also die so erhaltenen Werthe in (6), so reducirt sich der Ausdruck auf:

$$\Omega(\Delta^\varrho) = \varrho(\varrho - 1) \cdot \Delta^{\varrho-1} \cdot \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \xi_1 \partial \eta_2} + 2\varrho \cdot \Delta^{\varrho-1} \cdot \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \xi_1 \partial \eta_2},$$

oder:

$$\Omega(\Delta^\varrho) = \varrho(\varrho + 1) \cdot \Delta^{\varrho-1} \cdot \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \xi_1 \partial \eta_2}. \tag{7}$$

Durch Comparation der mit i multiplicirten Gleichung (7) mit der Gleichung (5) erhält man sonach

$$\varrho^2 p_\xi^{\varrho-1} \cdot q_\eta^{\varrho-1} m_\zeta^\varrho n_\lambda^\varrho k_\tau^\varrho \cdot (pq) = i \cdot \varrho(\varrho + 1) \Delta^{\varrho-1} \cdot \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \xi_1 \partial \eta_2}. \tag{I}$$

106. *Wir untersuchen nun weiter die Wirkung des Ω-Processes, wenn auch noch die Variable ζ mit hereingezogen wird,* so dass nur mehr η und τ als constant betrachtet werden. Zu dem Zwecke differentiiren wir die Gleichungen (I) von Nr. 105 partiell nach ζ_3 und erhalten auf der linken Seite:

$$\varrho^3 \cdot p_\xi^{\varrho-1} q_\eta^{\varrho-1} m_\zeta^{\varrho-1} n_\lambda^\varrho k_\tau^\varrho (p_1 q_2 - q_1 p_2) \cdot m_3, \tag{8}$$

auf der rechten Seite dagegen:

$$i \cdot \varrho \cdot (\varrho + 1)(\varrho - 1) \cdot \Delta^{\varrho-2} \cdot \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \xi_1 \partial \eta_2} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \zeta_3} + i \cdot \varrho \cdot (\varrho + 1) \cdot \Delta^{\varrho-1} \cdot \frac{\partial^3 \Delta}{\partial \xi_1 \partial \eta_2 \partial \zeta_3}. \tag{9}$$

Hieraus entsteht durch cyklische Vertauschung der Zahlen 1, 2, 3 zunächst aus dem Producte (8)

$$\varrho^3 \cdot p_\xi^{\varrho-1} q_\eta^{\varrho-1} m_\zeta^{\varrho-1} n_\lambda^\varrho k_\tau^\varrho (p_2 q_3 - q_2 p_3) m_1, \tag{10}$$

und

$$\varrho^3 \cdot p_\xi^{\varrho-1} q_\eta^{\varrho-1} m_\zeta^{\varrho-1} n_\lambda^\varrho k_\tau^\varrho (p_3 q_1 - q_3 p_1) m_2. \tag{11}$$

Im Ausdrucke (9) bleibt bei dieser Vertauschung der zweite Term seinem Werte nach unverändert, da $\frac{\partial^3 \Delta}{\partial \xi_1 \partial \eta_2 \partial \zeta_3}, \frac{\partial^3 \Delta}{\partial \xi_2 \partial \eta_3 \partial \zeta_1}, \frac{\partial^3 \Delta}{\partial \xi_3 \partial \eta_1 \partial \zeta_2}$ die nämlichen Unterdeterminanten inclusive Vorzeichen repräsentiren.

In dem ersten Term ersetze ich vor der cyklischen Vertauschung das Product

$$\Delta \cdot \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \xi_1 \, \partial \eta_2} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \zeta_3}$$

gemäss den Gesetzen über die Minoren adjungirter Determinanten (vgl. Bd. I, § 7 Nr. 87 und 88) durch:

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \eta_2} - \frac{\partial \Delta}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \eta_1}\right) \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \zeta_3}, \tag{12}$$

woraus durch cyklische Vertauschung die Ausdrücke entstehen:

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \eta_3} - \frac{\partial \Delta}{\partial \xi_3} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \eta_2}\right) \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \zeta_1} \tag{13}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \xi_3} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \eta_1} - \frac{\partial \Delta}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \eta_3}\right) \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \zeta_2}. \tag{14}$$

Addirt man nun die durch cyklische Vertauschung für die linke Seite erhaltenen Resultate (8), (10), (11), so erhält man:

$$\Omega(J_{\xi\eta\zeta}) = \varrho^3 \cdot p_\xi^{\varrho-1} q_\eta^{\varrho-1} m_\zeta^{\varrho-1} n_\lambda^\varrho k_\tau^\varrho \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix}.$$

Auf der rechten Seite findet sich nach vollzogener Addition einmal das dreifache des zweiten Terms von (9), sodann aber als Factor von $i \cdot \varrho \cdot (\varrho + 1)(\varrho - 1) \Delta^{\varrho-3}$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Delta}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \Delta}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \Delta}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \eta_1} & \frac{\partial \Delta}{\partial \eta_2} & \frac{\partial \Delta}{\partial \eta_3} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \Delta}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \Delta}{\partial \zeta_3} \end{vmatrix},$$

welche als Minor zweiter Ordnung der zu Δ adjungirten Determinante den Werth besitzt

$$\Delta^2 \cdot \frac{\partial^3 \Delta}{\partial \xi_1 \, \partial \eta_2 \, \partial \zeta_3}.$$

Substituirt man also diesen Werth und setzt die beiden Seiten einander gleich, so erhält man endlich:

$$\begin{aligned} \Omega(J_{\xi\eta\zeta}) &= \varrho^3 \cdot p_\xi^{\varrho-1} q_\eta^{\varrho-1} m_\zeta^{\varrho-1} n_\lambda^\varrho k_\tau^\varrho \cdot (p\,q\,m) \\ &= i \cdot \varrho \cdot (\varrho + 1)(\varrho - 1) \Delta^{\varrho-1} \cdot \frac{\partial^3 \Delta}{\partial \xi_1 \, \partial \eta_2 \, \partial \zeta_3} \\ &\quad + i \cdot \varrho \cdot (\varrho + 1) \cdot 3 \Delta^{\varrho-1} \cdot \frac{\partial^3 \Delta}{\partial \xi_1 \, \partial \eta_2 \, \partial \zeta_3} \end{aligned}$$

oder:

$$\varrho^3 \cdot p_\xi^{\varrho-1} q_\eta^{\varrho-1} m_\zeta^{\varrho-1} n_\lambda^\varrho k_\tau^\varrho (pqm) = i \cdot \varrho \cdot (\varrho + 1)(\varrho + 2) \cdot \Delta^{\varrho-1} \cdot \frac{\partial^3 \Delta}{\partial \xi_1 \, \partial \eta_2 \, \partial \zeta_3} \tag{II}$$

Aus dem Resultate (I) Nr. 105 und dem soeben erhaltenen (II) geht nun das Gesetz der Wirkung des Ω-Processes auf eine Form mit beliebig vielen Variabeln hinreichend klar hervor. Man erkennt, dass dasselbe, ausgedehnt auf alle fünf Variablen, durch den Ausdruck gegeben ist:

$$\begin{aligned} &\varrho^5 \cdot p_\xi^{\varrho-1} q_\eta^{\varrho-1} m_\zeta^{\varrho-1} n_\lambda^{\varrho-1} k_\tau^{\varrho-1} (pqmnk) \\ &= i \cdot \varrho (\varrho + 1)(\varrho + 2)(\varrho + 3)(\varrho + 4)(\xi\eta\zeta\lambda\tau)^{\varrho-1}. \end{aligned} \tag{III}$$

Unterwirft man nun (III) abermals dem Ω-Process, so kommt:

$$\begin{aligned} &\varrho^5 \cdot (\varrho - 1)^5 \cdot p_\xi^{\varrho-2} q_\eta^{\varrho-2} m_\zeta^{\varrho-2} n_\lambda^{\varrho-2} k_\tau^{\varrho-2} (pqmnk)^2 \\ &= i \cdot \varrho \cdot (\varrho - 1) \cdot (\varrho + 1) \cdot \varrho \cdot (\varrho + 2)(\varrho + 1) \ldots (\xi\eta\zeta\lambda\tau)^{\varrho-2}. \end{aligned}$$

Wiederholt man daher den Process ϱ mal, so ergiebt sich endlich die Identität:

$$(\varrho!)^5 \cdot (pqmnk)^\varrho = \varrho! \frac{(\varrho+1)!}{1!} \frac{(\varrho+2)!}{2!} \frac{(\varrho+3)!}{3!} \frac{(\varrho+4)!}{4!} i$$

oder ganz allgemein für m beliebige Variable

$$(\varrho!)^m (pqmnk\ldots)^\varrho = \varrho! \frac{(\varrho+1)!}{1!} \frac{(\varrho+2)!}{2!} \cdots \frac{(\varrho+m-1)!}{(m-1)!} i. \tag{IV}$$

Dadurch ist der Beweis erbracht, dass die Invariante i einer Function von beliebig vielen Variabeln sich symbolisch durch ein Product von Klammerfactoren oder eine Summe solcher Producte darstellen lässt. Der Beweis gilt auch noch, wenn i simultane Invariante mehrerer Formen mit beliebig vielen Variabeln ist.

§ 10. Partielle Differentialgleichungen für Co- und Invarianten.

107. *Aufstellung der Differentialgleichungen, denen eine Invariante i einer einzigen Form $f = a_x^n$* genügt. Wir hatten im § 1 als Definitionsgleichung einer Invariante die Gleichung aufgestellt:

$$J = (\xi\eta)^\varrho \cdot i. \tag{I}$$

Hiebei war ϱ das Gewicht der Form i, und J genau dieselbe ganze und homogene Function in den Coefficienten

$$\bar{A}_k = a_\xi^{n-k} a_\eta^k$$

der linear transformirten Form $F = A_y^n$, welche i in den Coefficienten

$$\bar{a}_k = a_1^{n-k} a_2^k$$

der ursprünglichen Form $f = a_x^n$ war. Diese Definitionsgleichung (I)



muss demnach die Quelle für die zu ermittelnden Differentialgleichungen bilden. Ihre rechte Seite giebt auch zugleich den Weg an, den wir hiebei einzuschlagen haben. Denn während i von den vier willkürlichen Transformationsparametern $\xi_1\ \xi_2\ \eta_1\ \eta_2$ völlig unabhängig ist, ist der andere Factor $\Delta^\varrho = (\xi\eta)^\varrho$ eine vollständig bekannte Function derselben, für welche wir sehr leicht Differentialgleichungen aufstellen können. Man hat nämlich, wie man unmittelbar erkennt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Delta}{\partial\xi_1}\xi_1 + \frac{\partial\Delta}{\partial\xi_2}\xi_2 &= \Delta \\ \frac{\partial\Delta}{\partial\xi_1}\eta_1 + \frac{\partial\Delta}{\partial\xi_2}\eta_2 &= 0 \\ \frac{\partial\Delta}{\partial\eta_1}\xi_1 + \frac{\partial\Delta}{\partial\eta_2}\xi_2 &= 0 \\ \frac{\partial\Delta}{\partial\eta_1}\eta_1 + \frac{\partial\Delta}{\partial\eta_2}\eta_2 &= \Delta \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(A)}$$

Und diese vier Gleichungen zeigen uns nun, wie erwähnt, die Richtung an, nach welcher wir behufs Aufstellung unserer Differentialgleichung zu gehen haben. Denn indem wir nun die Definitionsgleichung (I) den durch diese vier Gleichungen definirten Processen unterwerfen, erhalten wir unter Benutzung der unter (A) gewonnenen Resultate:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial\xi_1}\xi_1 + \frac{\partial J}{\partial\xi_2}\xi_2 &= \varrho\cdot J \\ \frac{\partial J}{\partial\xi_1}\eta_1 + \frac{\partial J}{\partial\xi_2}\eta_2 &= 0 \\ \frac{\partial J}{\partial\eta_1}\xi_1 + \frac{\partial J}{\partial\eta_2}\xi_2 &= 0 \\ \frac{\partial J}{\partial\eta_1}\eta_1 + \frac{\partial J}{\partial\eta_2}\eta_2 &= \varrho\cdot J \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(I)}$$

Nun enthält aber J die Grössen ξ und η nur in den festen Verbindungen:

$$\left.\begin{aligned} \bar{A}_0 &= a_\xi^n \\ \bar{A}_1 &= a_\xi^{n-1}\,a_\eta \\ \bar{A}_2 &= a_\xi^{n-2}\,a_\eta^2 \\ &\cdots\cdots \\ \bar{A}_k &= a_\xi^{n-k}\,a_\eta^k \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B)}$$

und demnach sind in dem Gleichungssystem (I) die Differentiationen zunächst nach den Grössen A_k auszuführen, so dass dieses System auch in der Form geschrieben werden kann:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{k=n} \frac{\partial J}{\partial \bar{A}_k}\left(\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \xi_1}\xi_1 + \frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \xi_2}\xi_2\right) = \varrho J \\
&\sum \frac{\partial J}{\partial \bar{A}_k}\left(\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \xi_1}\eta_1 + \frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \xi_2}\eta_2\right) = 0 \\
&\sum \frac{\partial J}{\partial \bar{A}_k}\left(\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \eta_1}\xi_1 + \frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \eta_2}\xi_2\right) = 0 \\
&\sum \frac{\partial J}{\partial \bar{A}_k}\left(\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \eta_1}\eta_1 + \frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \eta_2}\eta_2\right) = \varrho J
\end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II)}$$

Da jedoch, wie in Folge der Beziehungen (B), theils direct der Euler'sche Satz, theils auch ganz einfache Rechnung ergiebt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \xi_1}\xi_1 + \frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \xi_2}\xi_2 &= (n-k)\,\bar{A}_k \\
\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \xi_1}\eta_1 + \frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \xi_2}\eta_2 &= (n-k)\,\bar{A}_{k+1} \\
\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \eta_1}\xi_1 + \frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \eta_2}\xi_2 &= k\,\bar{A}_{k-1} \\
\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \eta_1}\eta_1 + \frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \eta_2}\eta_2 &= k\,\bar{A}_k,
\end{aligned}$$

so nehmen die Gleichungen (II) unmittelbar die Form an:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum (n-k)\cdot\bar{A}_k \frac{\partial J}{\partial \bar{A}_k} = \varrho J \\
&\sum (n-k)\cdot\bar{A}_{k+1} \frac{\partial J}{\partial \bar{A}_k} = 0 \\
&\sum k\cdot\bar{A}_{k-1} \frac{\partial J}{\partial \bar{A}_k} = 0 \\
&\sum k\cdot\bar{A}_k \frac{\partial J}{\partial \bar{A}_k} = \varrho J
\end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II}_a\text{)}$$

Sie gelten für jeden Wert von ξ und η; also auch für $\xi_1 = \eta_2 = 1$, $\xi_2 = \eta_1 = 0$. Für diese Werte geht aber $\bar{A}_k$ in $\bar{a}_k$ und demnach J in i über, so dass endlich die gesuchten Differentialgleichungen in der Form sich ergeben:

$$\left.\begin{aligned}
&n\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0}\bar{a}_0 + (n-1)\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1}\bar{a}_1 + (n-2)\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_2}\bar{a}_2 + \cdots = \varrho i \\
&n\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0}\bar{a}_1 + (n-1)\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1}\bar{a}_2 + (n-2)\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_2}\bar{a}_3 + \cdots = 0 \\
&1\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1}\bar{a}_0 + 2\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_2}\bar{a}_1 + 3\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_3}\bar{a}_2 + \cdots = 0 \\
&1\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1}\bar{a}_1 + 2\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_2}\bar{a}_2 + 3\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_3}\bar{a}_3 + \cdots = \varrho i
\end{aligned}\right\}. \qquad \text{(III)}$$

Dieses System von partiellen Differentialgleichungen, denen jede Invariante i einer Form $f = a_x^n$ genügt, gab bereits Cayley im 47. Bd. des Crelle'schen Journals.

Anmerkung. Addirt man in dem Systeme (III) die erste und vierte Gleichung, so erhält man:

$$\frac{2\varrho i}{n} = \bar{a}_0 \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0} + \bar{a}_1 \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1} + \bar{a}_2 \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_2} + \cdots \bar{a}_n \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_n}.$$

Anderntheils ist nach dem Euler'schen Satze, wenn μ der Grad der Invariante i in den Coefficienten von f ist,

$$\mu i = \bar{a}_0 \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0} + \bar{a}_1 \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1} + \bar{a}_2 \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_2} + \cdots \bar{a}_n \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_n}.$$

Hieraus folgt für das Gewicht ϱ der Invariante i die Beziehung:

$$\varrho = \frac{\mu \cdot n}{2}.$$

Da ϱ stets eine ganze Zahl ist, so lehrt diese Gleichung überdies, dass Formen f ungeraden Grades in x nur Invarianten i geraden Grades in den Coefficienten von f besitzen können.

108. *Das System der Differentialgleichungen ist ein vollständiges.* Bezeichnen wir diese vier Gleichungen (III), indem wir noch in der Gleichung (1) und (4) die Grösse ϱi auf die rechte Seite schaffen, mit $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, $A_4 = 0$, so können wir, wie Clebsch zuerst bemerkt hat, zeigen, dass dieses System von Differentialgleichungen ein vollständiges ist, d. h. dass die Anwendung der Differentialgleichungen auf einander in der Weise, wie sie z. B. durch

$$A_1(A_2) - A_2(A_1) = 0$$

angedeutet sein mag, zu keinen neuen Differentialgleichungen führt, sondern nur auf lineare Combinationen der bereits vorhandenen. Es wird genügen, dies an einem Beispiele zu zeigen, indem wir i etwa als eine Potenz der Discriminante $\bar{a}_0 \bar{a}_2 - \bar{a}_1^2$ einer quadratischen Form annehmen. Wir haben dann:

$$A_1 = 2 \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0} \bar{a}_0 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1} \bar{a}_1 - 2i = 0$$

$$A_2 = 2 \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0} \bar{a}_1 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1} \bar{a}_2 \qquad = 0.$$

Folglich wird

$$0 = A_1(A_2) - A_2(A_1)$$

$$= 2\bar{a}_0 \frac{\partial\left[2\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0}\bar{a}_1 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1}\bar{a}_2\right]}{\partial \bar{a}_0} + \bar{a}_1 \frac{\partial\left[2\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0}\bar{a}_1 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1}\bar{a}_2\right]}{\partial \bar{a}_1} - 2i\left[2\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0}\bar{a}_1 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1}\bar{a}_2\right]$$

$$- 2\bar{a}_1 \frac{\partial\left[2\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0}\bar{a}_0 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1}\bar{a}_1 - 2i\right]}{\partial \bar{a}_0} - \bar{a}_2 \cdot \frac{\partial\left[2\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0}\bar{a}_0 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1}\bar{a}_1 - 2i\right]}{\partial \bar{a}_1}$$

$$= 4\bar{a}_0\bar{a}_1\frac{\partial^2 i}{\partial \bar{a}_0^2} + 2\bar{a}_0\bar{a}_2\frac{\partial^2 i}{\partial \bar{a}_0\,\partial \bar{a}_1} + 2\bar{a}_1^2\frac{\partial^2 i}{\partial \bar{a}_0\,\partial \bar{a}_1} + \bar{a}_1\bar{a}_2\frac{\partial^2 i}{\partial \bar{a}_1^2}$$

$$- 4\bar{a}_1 i\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0} - 2\bar{a}_2 i\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1}$$

$$- 4\bar{a}_0\bar{a}_1\frac{\partial^2 i}{\partial \bar{a}_0^2} - 2\bar{a}_0\bar{a}_2\frac{\partial^2 i}{\partial \bar{a}_0\,\partial \bar{a}_1} - 2\bar{a}_1^2\frac{\partial^2 i}{\partial \bar{a}_0\,\partial \bar{a}_1} - \bar{a}_1\bar{a}_2\frac{\partial^2 i}{\partial \bar{a}_1^2}$$

$$+ 4\bar{a}_1\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0} + 2\bar{a}_2\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1}$$

$$= -2i\left\{2\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0}\bar{a}_1 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1}\bar{a}_2\right\} + 2\left\{\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0}\bar{a}_1 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1}\bar{a}_2\right\}.$$

Man erkennt, dass die ganze rechte Seite sich reducirt auf

$$0 = -2iA_2 + 2A_2 = 2A_2 \cdot (1 - i),$$

d. h. die Differentialgleichung $A_1(A_2) - A_2(A_1) = 0$ ist dieselbe, wie $A_2 = 0$.

Den allgemeinen Beweis hat Clebsch in seinen „Binären Formen“ Seite 310 gegeben.

Anmerkung. Zu den vier Differentialgleichungen treten nur dann neue hinzu, wenn es sich darum handelt, specielle Invarianten zu charakterisiren. So hat Brioschi noch specielle Differentialgleichungen aufgestellt, um Discriminanten und Resultanten zu charakterisiren. (Vgl. auch die Untersuchungen Nöther's in Faà di Bruno, übersetzt von Walter, Seite 275.)

109. *Differentialgleichungen für simultane Invarianten und Covarianten.* Es hat nun keine Schwierigkeit, ein System von Differentialgleichungen für simultane Invarianten i direct anzuschreiben. Ist nämlich i simultane Invariante der s Formen

$$f_1, f_2, f_3, \dots f_s$$

von den Graden $n_1, n_2, n_3, \dots n_s$ in x, welche bezw. die Coefficienten

$$a_k^{(1)}, \quad \bar{a}_k^{(2)}, \quad \bar{a}_k^{(3)}, \quad \cdots \bar{a}_k^{(s)}$$

besitzen, so geht aus der ganzen Ableitung dieser Differentialgleichungen direct hervor, dass sie für diesen Fall die Gestalt annehmen müssen:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s}\left(n\cdot\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0^{(\lambda)}}\bar{a}_0^{(\lambda)}+(n-1)\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1^{(\lambda)}}\bar{a}_1^{(\lambda)}+(n-2)\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_2^{(\lambda)}}\bar{a}_2^{(\lambda)}\dots\right)=\varrho\cdot i\\
&\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s}\left(n\cdot\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0^{(\lambda)}}\bar{a}_1^{(\lambda)}+(n-1)\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1^{(\lambda)}}\bar{a}_2^{(\lambda)}+\cdots\cdots\cdots\right)=0\\
&\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s}\left(1\cdot\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1^{(\lambda)}}\bar{a}_0^{(\lambda)}+\quad 2\cdot\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_2^{(\lambda)}}\bar{a}_1^{(\lambda)}+\cdots\cdots\cdots\right)=0\\
&\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s}\left(1\cdot\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1^{(\lambda)}}\bar{a}_1^{(\lambda)}+\quad 2\cdot\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_2^{(\lambda)}}\bar{a}_2^{(\lambda)}+\cdots\cdots\cdots\right)=\varrho\cdot i
\end{aligned}\right\}\cdot\text{(IV)}$$

Da man nun an Stelle jeder Covariante*) eine Invariante einführen kann, bei deren Bildung das simultane System um ebensoviel lineare Formen vermehrt ist, als Reihen von Veränderlichen in der Covariante existiren, so genügt jede Covariante ebenfalls einem simultanen Systeme (IV) von Differentialgleichungen. Will man in ihnen die Glieder absondern, welche die Differentialquotienten nach den Veränderlichen enthalten, so denke man sich einen Augenblick die Coefficienten $l^{(i)}$ der linearen Formen an Stelle der Variabeln eingeführt. Dann treten links den vier Gleichungen entsprechend die Summen auf:

$$\sum l_1\frac{\partial i}{\partial l_1},\quad \sum l_2\frac{\partial i}{\partial l_1},\quad \sum l_1\frac{\partial i}{\partial l_2},\quad \sum l_2\frac{\partial i}{\partial l_2}$$

oder, wenn wir nun wieder l_1 durch x_2, und l_2 durch $-x_1$ ersetzen:

$$\sum x_2\frac{\partial i}{\partial x_2},\quad -\sum x_1\frac{\partial i}{\partial x_2},\quad -\sum x_2\frac{\partial i}{\partial x_1},\quad \sum x_1\frac{\partial i}{\partial x_1},$$

oder endlich, wenn i vom Grade $\Sigma\nu_i$ in den verschiedenen Variabelnreihen ist, gemäss dem Euler'schen Satze:

$$i\sum\nu_i-\sum x_1\frac{\partial i}{\partial x_1},\quad -\sum x_1\frac{\partial i}{\partial x_2},$$
$$-\sum x_2\frac{\partial i}{\partial x_1},\quad i\sum\nu_i-\sum x_2\frac{\partial i}{\partial x_2}.$$

---

*) Vgl. auch Clebsch, „Binäre Formen“, S. 315 und diese Vorles. Nr. 100.

Das System (IV) der Differentialgleichungen nimmt also, wenn man dort noch $\varrho + \Sigma\nu$ durch ϱ ersetzt, für Covarianten auch die Formen an:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_1^s \sum_0^{n_s - 1} (n_s - k) \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_k^{(\lambda)}} \bar{a}_k^{(\lambda)} - \sum x_1 \frac{\partial i}{\partial x_1} = i \cdot \varrho \\
&\sum_1^s \sum_0^{n_s - 1} (n_s - k) \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_k^{(\lambda)}} \bar{a}_{k+1}^{(\lambda)} - \sum x_1 \frac{\partial i}{\partial x_2} = 0 \\
&\sum_1^s \sum_1^{n_s} k \cdot \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_k^{(\lambda)}} \bar{a}_{k-1}^{(\lambda)} - \sum x_2 \frac{\partial i}{\partial x_1} = 0 \\
&\sum_1^s \sum_1^{n_s} k \cdot \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_k^{(\lambda)}} \bar{a}_k^{(\lambda)} - \sum x_2 \frac{\partial i}{\partial x_2} = i \cdot \varrho
\end{aligned}\right\}. \qquad \text{(V)}$$

Ist nun i von den Graden $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_s$ in den Coefficienten der Formen $f_1, f_2 \cdots f_s$, so erhält man durch Addition der ersten und letzten Gleichung nach Anwendung des Euler'schen Satzes:

$$\frac{1}{2}\left\{\sum_1^s \mu_i \nu_i - \sum \nu_i\right\} = \varrho.$$

Ist insbesondere $s = 1$, also i Covariante einer einzigen Form $f = a_x^n$ mit einer Reihe von Variabeln, dann besteht wiederum zwischen Gewicht ϱ, dem Grade ν in x, dem Grade μ in den Coefficienten die Beziehung

$$\varrho = \frac{1}{2}(\mu n - \nu).$$

Daraus erkennt man, dass Formen ungeraden Grades keine Covarianten besitzen, die gleichzeitig ungeraden Grades in den Coefficienten und geraden Grades in den Variabeln sind, oder umgekehrt.

110. *Die Differentialgleichungen* (IV) resp. (V) *sind nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend zur Definition einer Invariante, resp. Covariante.* Wir haben bisher gezeigt, dass jede ganze homogene Function i, welche der Gleichung

$$J = i \cdot (\xi\eta)^\varrho \qquad \text{(I)}$$

genügt, stets ein System von Differentialgleichungen befriedigt. Es lässt sich nun aber auch umgekehrt der Beweis liefern, dass jede Lösung i der Differentialgleichungen (IV) eine Invariante ist, d. h. dass für sie die Relation (I) besteht, in welcher J aus i durch die Vertauschung von a_1 mit a_ξ, a_2 mit a_η etc. hervorgegangen ist.

Um diesen Beweis zu erbringen, nehmen wir an: J sei eine ganze homogene Function der Coefficienten $\bar{A}_k = a_\xi^{n-k} a_\eta^k$ etc., welche dem Systeme (IV) genügt, oder also, was dasselbe ist, dem Systeme (I). In gleicher Weise sei K eine beliebige zweite Lösung dieser Gleichungen (I). Dann bestehen zunächst die beiden Systeme von Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial \xi_1}\xi_1 + \frac{\partial J}{\partial \xi_2}\xi_2 = \varrho J \\ \frac{\partial J}{\partial \xi_1}\eta_1 + \frac{\partial J}{\partial \xi_2}\eta_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial J}{\partial \eta_1}\eta_1 + \frac{\partial J}{\partial \eta_1}\eta_2 = \varrho J \end{array} \qquad (2)\quad \begin{array}{l} \frac{\partial K}{\partial \xi_1}\xi_1 + \frac{\partial K}{\partial \xi_2}\xi_2 = \varrho K \\ \frac{\partial K}{\partial \xi_1}\eta_1 + \frac{\partial K}{\partial \xi_2}\eta_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial K}{\partial \eta_1}\eta_1 + \frac{\partial K}{\partial \eta_2}\eta_2 = \varrho K. \end{array}$$

Multipliciren wir das erste mit K, das zweite mit J und subtrahiren je zwei in gleicher Zeile befindliche Gleichungen von einander, so bekommen wir, wenn wir die erhaltenen Differenzen noch mit K^2 dividiren:

$$\frac{K\frac{\partial J}{\partial \xi_1} - J\frac{\partial K}{\partial \xi_1}}{K^2}\xi_1 + \frac{K\frac{\partial J}{\partial \xi_2} - J\frac{\partial K}{\partial \xi_2}}{K^2}\xi_2 = 0$$

$$\frac{K\frac{\partial J}{\partial \xi_1} - J\frac{\partial K}{\partial \xi_1}}{K^2}\eta_1 + \frac{K\frac{\partial J}{\partial \xi_2} - J\frac{\partial K}{\partial \xi_2}}{K^2}\eta_2 = 0, \text{ etc.}$$

Setzen wir hierin:

$$\frac{J}{K} = L \ldots \tag{c}$$

so kommt:

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_1}\xi_1 + \frac{\partial L}{\partial \xi_2}\xi_2 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \xi_1}\eta_1 + \frac{\partial L}{\partial \xi_2}\eta_2 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_1}\xi_1 + \frac{\partial L}{\partial \eta_2}\xi_2 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \eta_1}\eta_1 + \frac{\partial L}{\partial \eta_2}\eta_2 = 0. \tag{2}$$

Jedes der beiden Gleichungssysteme (1) und (2) ist homogen in den Differentialquotienten; da die Determinante $(\xi\eta)$ nicht verschwindet, so haben sie nur die identischen Lösungen (vgl. Bd. I, Nr. 96 und 97)

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \xi_2} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \eta_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \eta_2} = 0,$$

d. h. die Grösse L ist von ξ und η unabhängig. Nun ist aber K eine beliebige specielle Lösung der Gleichungen (I), also etwa gleich Δ^ϱ, von welcher wir wissen, dass sie eine solche ist. Benutzen wir dieselbe, so ist wegen (c)

$$J = \Delta^\varrho \cdot L.$$

Setzen wir hier, da $\xi_1 \eta_1 \xi_2 \eta_2$ beliebig sind, $\xi_1 = 1$, $\eta_2 = 1$, $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = 0$, so geht a_ξ über in a_1, a_η in a_2, $\varDelta$ in 1, und J in i, so dass wir erhalten

$$L = i,$$

d. h. jede Lösung der Differentialgleichung (IV) genügt der Relation

$$J = \varDelta^\varrho \cdot i,$$

so dass dieselben in der That nur Invarianten definiren.

111. *Begriff der Evectante.* Wir können die Differentialgleichungen für Invarianten auch direct aufstellen, ohne dabei von der Transformation Gebrauch zu machen. Zu dem Zwecke führen wir aber zunächst einen neuen Begriff ein, nämlich den der Evectante.

Wir haben schon mehrfach von dem Satze Gebrauch gemacht, dass man in einem symbolischen Producte jederzeit a_1 durch x_2 und a_2 durch $-x_1$ ersetzen darf, wodurch die Invarianteneigenschaft desselben nicht aufgehoben wird. Nun ist nach dem Euler'schen Satze

$$\mu i = \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0} \bar{a}_0 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1} \bar{a}_1 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_2} \bar{a}_2 + \cdots \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_n} \bar{a}_n.$$

Ersetzt man jeden zweiten Factor $\bar{a}_k$ der Summe rechts durch sein Symbol a_1^n, $a_1^{n-1} a_2$, $a_1^{n-2} a_2^2$, und in diesen Symbolen wieder a_1 durch x_2, a_2 durch $-x_1$, so erhält man als Resultat dieser Substitutionen die Covariante

$$p_x^n = x_2^n \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0} - x_2^{n-1} x_1 \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1} + x_2^{n-2} x_1^2 \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_2} - \cdots$$

oder
$$p_x^n = \sum (-1)^k \cdot x_2^{n-k} \cdot x_1^k \cdot \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_k}.$$

Man nennt diese Covariante Evectante von i, und zwar die erste Evectante, insofern i nur einmal nach den Coefficienten $\bar{a}_k$ differentiirt wurde.

Die r^{te} Evectante entsteht alsdann durch r-malige Wiederholung des angegebenen Processes.

112. *Beispiel:* Die Discriminante der quadratischen Form a_x^2 ist

$$(ab)^2 = 2(\bar{a}_0 \bar{a}_2 - \bar{a}_1^2) = i;$$

also ist nach dem Euler'schen Satze:

$$2i = \left[\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0} \bar{a}_0 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1} \bar{a}_1 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_2} \bar{a}_2\right] = \left[\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0} a_1^2 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1} a_1 a_2 + \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_2} a_2^2\right]$$

und somit, wenn man rechts a_1 durch x_2, a_2 durch $-x_1$ ersetzt:

$$p_x^2 = 2(\bar{a}_2 x_2^2 + 2\bar{a}_1 x_1 x_2 + \bar{a}_0 x_1^2) = 2a_x^2 = 2b_x^2,$$

d. h. die erste Evectante der Discriminante ist die Form selbst.

2) Die Discriminante der cubischen Form a_x^3 ist

$$i=(ab)^2(cd)^2(ad)(cb)=[\bar{a}_0^2\bar{a}_3^2+4\bar{a}_0\bar{a}_2^3-6\bar{a}_0\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3+4\bar{a}_1^3\bar{a}_3-3\bar{a}_1^2\bar{a}_2^2]2;$$

folglich ist

$$4i=\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_0}a_1^3+\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_1}a_1^2a_2+\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_2}a_1a_2^2+\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_3}a_2^3;$$

demnach

$$\begin{aligned}p_x^3=&[(2\bar{a}_0\bar{a}_3^2+4\bar{a}_2^3-6\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3)x_2^3+(6\bar{a}_0\bar{a}_2\bar{a}_3-12\bar{a}_1^2\bar{a}_3+6\bar{a}_1\bar{a}_2^2)x_2^2x_1\\&+(12\bar{a}_0\bar{a}_2^2-6\bar{a}_0\bar{a}_1\bar{a}_3-6\bar{a}_1^2\bar{a}_2)x_2x_1^2+(2\bar{a}_0^2\bar{a}_3-6\bar{a}_0\bar{a}_1\bar{a}_2+4\bar{a}_1^3)x_1^3]2\\=&4(ab)^2(cb)c_x^2a_x.\end{aligned}$$

Diese Evectante ist aber nichts anderes als die Covariante dritten Grades von $f=a_x^3$, welche auch als Functionaldeterminante von f mit der Hesse'schen Form von f sich ergiebt. (Vgl. Nr. 37.)

113. *Symbolische Darstellung des Evectantenprocesses.* Betrachten wir die beiden gegebenen Beispiele näher, so sieht man: durch den Evectantenprocess wurde aus $(ab)^2$ die ursprüngliche Form $f=2a_x^2=2b_x^2$. Dieselbe entsteht auch direct aus $(ab)^2$, indem man einmal die Symbolreihe a_2, a_1 durch x_1, $-x_2$, und dann aber auch die Symbolreihe b_2, b_1 durch x_1, $-x_2$ ersetzt. Die erste Operation giebt ein Glied g_1, die zweite ein Glied g_2, und es ist

$$f=g_1+g_2=b_x^2+a_x^2=2a_x^2=2b_x^2.$$

Ebenso erhält man im zweiten Falle durch successive Vertauschung der vier Symbole a, b, c, d mit den Variabeln x_1 und $-x_2$ vier Glieder $g_1\,g_2\,g_3\,g_4$, und zwar, da alle vier Symbole vollständig symmetrisch auftreten, so ist:

$$g_1+g_2+g_3+g_4=4g_1=4g_2=4g_3=4g_4,$$

also ist

$$p_x^3=4(ab)^2(cb)c_x^2a_x.$$

Wir schliessen: „Die erste Evectante entsteht aus der Invariante μ^{ten} Grades, indem wir aus ihr μ Glieder $g_1\,g_2\ldots g_\mu$ dadurch bilden, dass wir immer je eine Symbolreihe durch die Variabelnreihe der x ersetzen, und dann die Summe aller Glieder nehmen.“ (Vgl. auch die Wirkung des Aronhold'schen Processes an einem symbolischen Producte, Nr. 60.)

114. *Umformung der Differentialgleichungen für Invarianten.* Wir können nun die Differentialgleichungen (III) Nr. 107 für Invarianten auch in kürzerer Form schreiben. Vergleicht man in der Identität

$$p_x^n=\sum(-1)^k x_1^k x_2^{n-k}\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_k}$$

die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x, so erhält man:

$$\binom{n}{k} p_1^k p_2^{n-k} = \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_k} (-1)^k.$$

Tragen wir diese Werthe der Differentialquotienten in die Gleichungen (III) Nr. 107 ein, so kommt:

$$\begin{aligned} \varrho i &= \sum (n-k) \binom{n}{k} (-1)^k a_1^{n-k} a_2^k p_1^k p_2^{n-k} \\ &= \sum n \binom{n-1}{k} (-1)^k a_1^{n-k} a_2^k p_1^k p_2^{n-k}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} \varrho i &= -n a_1 p_2 (pa)^{n-1} \\ 0 &= \quad n a_1 p_1 (pa)^{n-1} \\ 0 &= \quad n a_2 p_2 (pa)^{n-1} \\ \varrho i &= +n a_2 p_1 (pa)^{n-1} \end{aligned}\right\}. \tag{VI}$$

Dieses System (VI) lässt sich noch kürzer in die beiden folgenden Gleichungen zusammenfassen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\varrho i}{n} = \mu i &= (pa)^n \\ 0 &= (pa)^{n-1} p_x a_x \end{aligned}\right\}. \tag{VII}$$

Die erste derselben ergiebt sich direct durch Addition der ersten und vierten Gleichung des Systemes (VI). Sie lehrt:

> „Die n^{te} Ueberschiebung der ursprünglichen Form $f = a_x^n$ mit der ersten Evectante einer ihrer Invarianten i liefert wiederum die Invariante i."

Die zweite der Gleichungen (VII) erhalten wir, wenn wir die vier Gleichungen (VI) der Reihe nach mit $-x_1 x_2$, x_1^2, x_2^2, $x_1 x_2$ multipliciren und addiren. Sie lehrt:

> „Die $(n-1)^{te}$ Ueberschiebung der ursprünglichen Form $f = a_x^n$ mit der ersten Evectante einer ihrer Invarianten ist identisch null."

115. *Evectanten von Combinanten.* Ist i eine Combinante der beiden Formen $f = a_x^n$, $\varphi = \alpha_x^n$, genügt also i der Gleichung

$$\delta i = \sum \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_k} \bar{\alpha}_k = \sum \frac{\partial i}{\partial \bar{\alpha}_k} \bar{a}_k = 0, \tag{1}$$

so liefert die n^{te} Ueberschiebung der ersten Evectante von i über eine der Grundformen nicht mehr i, wie im vorigen einfachen Falle. Vielmehr hat man nun:

$$(p\alpha)^n = (pa)^n = 0; \tag{2}$$

denn es ist: $$p_x^n = \sum (-1)^k \frac{\partial i}{\partial \bar{a}_k} x_1^k x_2^{n-k},$$

also $$\frac{\partial i}{\partial \bar{a}_k} = (-1)^k \binom{n}{k} \bar{p}_{n-k}$$

Substituirt man den Werth dieser partiellen Differentialquotienten in (1), so erhält man:

$$\sum_{k=n}^{k=0} (-1)^k \binom{n}{k} \bar{p}_{n-k} \bar{\alpha}_k = (\alpha p)^n = 0.$$

Eine solche Combinante ist insbesondere die Resultante $R_{f,\varphi}$ der beiden Formen f und φ. Für sie können wir die Richtigkeit der Gleichung (2) auch noch in anderer Weise zeigen, wodurch zugleich auf die Combinanteneigenschaft von $R_{f,\varphi}$ ein neues Licht geworfen wird. Man weiss nämlich (vergl. auch Bd. I Nr. 164), dass die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial R_{f,\varphi}}{\partial \bar{a}_i}$ den Potenzen der gemeinschaftlichen Wurzel $\xi = -\frac{\xi_2}{\xi_1}$ von f und φ proportional sind. Ersetzt man also in der Evectante

$$p_x^n = \sum (-1)^k \frac{\partial R_{f,\varphi}}{\partial \bar{a}_k} x_1^k x_2^{n-k}$$

dementsprechend die Grössen $\frac{\partial R_{f,\varphi}}{\partial \bar{a}_k}$ durch $c \cdot (-1)^k \cdot \xi^{n-k}$, so kommt:

$$p_x^n = \bar{c} \cdot (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)^n = \bar{c} \cdot \xi_x^n.$$

Folglich ist:

$$(\varphi, p)^n = \bar{c} \cdot (\varphi, \xi^n)^n = \bar{c} \cdot \varphi(\xi).$$

Da aber $\varphi(x)$ für die gemeinschaftliche Wurzel $x = \xi$ verschwindet, so ist $\varphi(\xi) = 0$ und damit

$$(\varphi, p)^n = 0.$$

Ist nun aber $\chi = r_x^n$ neben $f = a_x^n$ und $\varphi = \alpha_x^n$ eine dritte Form, die gleichfalls für $x = \xi$ verschwindet, so ist auch

$$(\chi, p)^n = \bar{c} \cdot (\chi, \xi^n)^n = 0.$$

Es ist aber:

$$(\chi, p)^n = \sum (-1)^k \binom{n}{k} \bar{p}_{n-k} \bar{r}_k = \sum \frac{\partial R_{f,\varphi}}{\partial \bar{a}_k} \cdot \bar{r}_k = \bar{\delta} R_{f,\varphi}.$$

Demnach ist auch:

$$\bar{\delta} R_{f,\varphi} = 0,$$

wobei nun die Incremente durch die Coefficienten einer völlig fremden Form χ ersetzt werden, für welche nur die Bedingung besteht, dass sie mit f und φ eine gemeinschaftliche Wurzel ξ besitzt. Wir werden später von diesem Satze Gebrauch machen.

116. *Zweite Methode zur Aufstellung der Differentialgleichungen für Invarianten.* Das in Nr. 114 erhaltene System (VII) von Gleichungen ist nur eine andere Form des Systemes der Differentialgleichungen

(III) Nr. 107 für Invarianten. Indem wir dasselbe direct aufstellen, erhalten wir einen zweiten Beweis, dass alle Invarianten gewissen Differentialgleichungen genügen müssen.

Die Aufgabe ist, die Richtigkeit der beiden Gleichungen nachzuweisen

$$\left.\begin{aligned}(p, f)^n &= \mu \cdot i\\ (p, f)^{n-1} &= 0\end{aligned}\right\}. \tag{A}$$

Nun ist die erste Evectante p von i eine Summe symbolischer Producte g, welche entstehen, wenn jede der μ Symbolreihen a, resp. b, c . . . etc. durch x ersetzt wird. Es ist also:

$$(p, f)^n = \sum_1^{\mu} (g, f)^n. \tag{2}$$

Andererntheils entsteht aber die n^{te} Ueberschiebung zweier Formen, indem man umgekehrt die Variabeln $x_1\, x_2$ durch Symbolreihen a_2, $-a_1$, resp. b_2, $-b_1$ etc. ersetzt. Beide Operationen hinter einander ausgeführt, der Evectantenprocess und der Ueberschiebungsprocess, ändern also das ursprüngliche symbolische Product nicht; jedes Glied der Summe (2) geht durch die Ueberschiebung wieder in i über, so dass man in der That erhält:

$$(p, f)^n = \mu \cdot i.$$

Was nun die zweite Gleichung betrifft, so gestaltet sich ihr Beweis folgendermassen. Es ist wiederum zunächst

$$(p, f)^{n-1} = \sum_1^{\mu} (g, f)^{n-1}.$$

Jede der μ Ueberschiebungen rechts besitzt n Terme. Denn ist z. B. g_1 jenes Glied der Evectante, das entstanden ist, indem man für die Symbolreihe a die Variabeln x einführte, so entsteht nach den Gesetzen der Ueberschiebung $(g_1, f)^{n-1}$ dadurch, dass man in immer andern und andern $(n-1)$ Factoren erster Art von g_1 umgekehrt x_1 und x_2 durch a_2, $-a_1$ ersetzt, was bei n Elementen nur auf n Arten möglich ist. Die Summe rechts enthält also $n \cdot \mu$ Terme, wobei $n \cdot \mu$ jedenfalls eine gerade Zahl ist, wie aus Nr. 107, Anmerkung hervorgeht. Jeder der $n \cdot \mu$ Terme enthält zwei und nur zwei Factoren erster Art, da f sowohl als jedes Glied g_i vom Grade n in x ist. Man kann einen solchen Term auch erhalten, indem man z. B. in der Invariante i in einem Klammerfactor (ba) die Symbolreihe a_1, a_2 durch $-x_2$, $+x_1$ ersetzt und das so entstehende symbolische Product mit a_x multiplicirt, so dass also (ba) durch $b_x\, a_x$ ersetzt wurde. Es tritt

aber alsdann bei dieser Bildung der $n \cdot \mu$ Terme, die ja völlig symmetrisch erfolgt, jedenfalls auch noch ein zweiter Term neben dem eben erwähnten auf, der entsteht, wenn in demselben Klammerfactor (ba) von i die Symbolreihe b_1, b_2 durch $-x_2$, x_1 ersetzt und das so entstehende symbolische Product mit b_x multiplicirt wird. Da dieser Term aber bis auf das Vorzeichen mit dem vorhin erwähnten übereinstimmt, so sieht man, dass je zwei der $n \cdot \mu$ Terme sich gegenseitig aufheben, d. h. dass

$$(p, f)^{n-1} = \sum_1^{\mu} (g, f)^{n-1} = 0,$$

was wir zu beweisen hatten.

Wir haben somit durch reine Invariantenprocesse die Existenz der Gleichungen (A) nachgewiesen, welche das System der Differentialgleichungen (III) nach jeder Richtung ersetzen, und da jener Satz in Nr. 108, dass dieses System von Differentialgleichungen ein vollständiges ist, zu seinem Beweise nur Processe der Invariantentheorie benutzt, so dürfte es jedenfalls möglich sein, auch ihn durch ein rein algebraisches Aequivalent zu ersetzen.

117. *Umformung einer Relation* $F(A_i) = 0$ *in*

$$\sum \{(ab)\, c_x + (bc)\, a_x + (ca)\, b_x\}\, \varphi_\lambda = 0.$$

Zum Schlusse noch eine Anwendung des Evectantenprocesses. Ich habe bereits in § 1 an einem Beispiele gezeigt, wie sich eine in Coefficienten und Variabeln homogene Relation $F(A_i) = 0$ von symbolischen Producten A_i in die Gestalt bringen lässt

$$\sum \{(ab)\, c_x + (bc)\, a_x + (ca)\, b_x\} = 0.$$

Die Möglichkeit dieser Umformung wollen wir nun für eine beliebige Relation $F(A_i) = 0$ nachweisen. Wir betrachten $F(A_i)$ als Covariante μ^{ten} Grades in den Coefficienten einer Form $f = a_x^n = b_x^n =$ etc.; da sie identisch verschwindet, so verschwinden auch die partiellen Differentialquotienten in der nach dem Euler'schen Satze gegebenen Darstellung:

$$\mu\, F(A_i) = \sum \frac{\partial (F(A_i))}{\partial \bar{a}_k} \cdot \bar{a}_k,$$

und demnach auch die erste Evectante dieser Covariante

$$P_y^n = \sum (-1)^k \frac{\partial (F(A_i))}{\partial \bar{a}_k} \cdot y_1^k\, y_2^{n-k}.$$

Nun erhält man diese Evectante auch, wenn man in $F(A_i)$ der Reihe nach das Symbol a, b, c etc. durch y ersetzt; es ist also:

$$0 = P_y^n = F(A_i)_{a=y} + F(A_i)_{b=y} + \cdots + F(A_i)_{m=y} = \sum_{m=a,b,\ldots} F(A_i)_{m=y}.$$

Hiebei ist es gestattet, nachträglich rechts im zweiten, dritten, etc., letzten Posten, a mit b, resp. a mit c, etc. zu vertauschen, so dass in keinem Gliede mehr das Symbol a auftritt. Wir setzen nun voraus, dass sich einfachere Relationen $F(A_i)$ — also insbesondere solche, welche mindestens ein Symbol a, b, etc. weniger besitzen, oder solche, welche durch Spaltung in zwei Factoren, deren einer mindestens ein Symbolfactor r_x oder (pq) ist, sich auf einfachere Relationen reduciren, — stets in die Form $\sum \{(ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x\} \varphi_\lambda = 0$ bringen lassen. Der Beweis gestaltet sich dann für complicirtere Fälle folgendermassen.

P^n_y wird sich im allgemeinen in zwei Theile trennen lassen, einen Theil $M = (xy) \sum Q^{(1)}_i$, der also (xy) zum Factor hat, und einen Theil

$$N = \sum c_i G_i, \tag{1}$$

der diesen Factor nicht besitzt. Sollten zufälliger Weise in $P^n_y = 0$ alle Glieder diesen Factor enthalten, so dividire man mit der höchsten Potenz von (xy) diese Identität.

Setzen wir alsdann in $P^n_y = 0$ einen Moment $y = x$, so verschwindet wegen des Factors (xx) der erste Theil, und demnach auch der zweite, d. h. wir haben

$$N = \sum c_i H_i = 0, \tag{2}$$

wenn wir die Glieder G_i für $x = y$ mit H_i bezeichnen. Da aber die Glieder H_i um das Symbol a weniger Symbole besitzen als die ursprünglichen Glieder in $F(A_i)$, so kann man nach Voraussetzung schreiben:

$$N = \sum c_i H_i = \sum \{(db)c_x + (bc)d_x + (cd)b_x\} \varphi_\lambda = 0. \tag{3}$$

Bilden wir nun wieder die n^{te} Polare von $\sum c_i H_i$, wobei die Polare von H_i mit $\overline{G}_i$ bezeichnet sei, dann ist, weil die Glieder G_i in (1) Glieder dieser Polaren sein müssen [vergl. Nr. 25, (I)]:

$$G_i = \overline{G}_i + (xy) \sum \varrho_i Q^{(2)}_i,$$

also

$$\sum c_i G_i = \sum c_i \overline{G}_i + (xy) \sum \overline{\varrho}_i Q^{(3)}_i,$$

oder, weil $\sum c_i G_i = N$, und $\sum c_i \overline{G}_i = \left[\sum c_i H_i\right]_{y^n}$, mit Benutzung von Gleichung (1) und (3)

$$N = \left[\sum \{(db)c_x + (bc)d_x + (cd)b_x\} \varphi_\lambda\right]_{y^n} + (xy) \sum \overline{\varrho}_i Q^{(3)}_i.$$

Addiren wir hiezu:

$$M = (xy) \sum Q_i^{(1)},$$

so erhalten wir:

$$P_y^n = \left[\sum \{(db)c_x + (bc)d_x + (cd)b_x\} \varphi_\lambda \right]_{y^\mu} + (xy) \sum \bar{\lambda}_i Q_i^{(4)}.$$

Ersetzen wir endlich hierin y wieder durch a, so geht P_y^μ in $\sum F(A_i)$ über, wobei die späteren Posten $F(A_i)$ aus dem ersten durch Vertauschung von a mit b, resp. $c, d, \ldots$ etc. entstehen. Da sonach alle diese Posten einander gleich sind und nur μ Symbole $a, b, c \ldots m$ vorhanden sind, so wird:

$$\mu F(A_i) = \sum F(A_i) = \sum \{(db)c_x + (bc)d_x + (cd)b_x\} \bar{\varphi}_\lambda + a_x \sum \bar{\lambda}_i Q_i^{(4)}.$$

Weil nun $F(A_i)$ sowohl, als auch $\sum \{(db)c_x + (bc)d_x + (cd)b_x\} \varphi_\lambda$ identisch verschwinden, so verschwindet auch $\sum \bar{\lambda}_i Q_i^{(4)}$, da aber wegen des abgesonderten Factors a_x diese Relation $\sum \bar{\lambda}_i Q_i^{(4)} = 0$ einen symbolischen Factor weniger besitzt als die Relation $F(A_i) = 0$, so lässt sich nach Voraussetzung auch $\sum \bar{\lambda}_i Q_i^{(4)}$ in die Form

$$\sum \{(ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x\} \bar{\varphi}_\lambda$$

bringen und demnach hat man in der That:

$$F(A_i) = \sum \{(ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x\} \bar{\varphi}_\lambda = 0.$$

Zweiter Theil.

Die Formen zweiten, dritten und vierten Grades.

§ 11. Die Form zweiten Grades: System einer und zweier simultaner Formen.

118. *Ueberblick über die folgenden Untersuchungen.* Wir haben mit den letzten Paragraphen die allgemeinen Untersuchungen über In- und Covarianten binärer Formen (so weit sie sich nicht auf Systembildung und associirte Formen beziehen) abgeschlossen und wenden uns nunmehr den einzelnen Formen zu, indem wir mit der quadratischen Form beginnen.

Die ersten Fragen, die wir uns hier stellen, sind die Fragen nach dem vollen System einer quadratischen Form, oder zweier simultaner Formen. Unter vollem System verstehen wir hier wie später die Gesammtheit derjenigen Co- und Invarianten, durch welche sich alle übrigen rational und ganz darstellen lassen. Dieses volle System aufzufinden, wird immer eine unserer Hauptaufgaben sein. Eine allgemeine Methode, das kleinste volle System aufzufinden, existirt nicht. Es muss immer erst durch successive Begrenzung der Anzahl gezeigt werden, dass wirklich keine der in das System aufgenommenen Formen überflüssig ist, d. h. durch die übrigen sich rational und ganz darstellen lässt. Diese Reduction der Formenanzahl stützt sich insbesondere auf einen Begriff: den des Reducenten, dessen Definition im Laufe dieses Paragraphen festgestellt wird.

Bei den quadratischen Formen lässt sich das volle System a priori angeben. Nachdem wir dies für zwei simultane Formen erledigt und die Relationen zwischen diesen Formen aufgestellt haben, werden wir in einigen Anwendungen davon Gebrauch machen. Hieran schliessen wir die Betrachtungen über das volle System dreier quadratischer Formen, und den mannigfachen Relationen die zwischen den Co- und Invarianten desselben bestehen. Das System lässt sich dann leicht allgemein für eine beliebige Anzahl quadratischer Formen erweitern. Nach diesen Untersuchungen über allgemeine Formen zweiten Grades

wenden wir uns speciellen zu, insbesondere solchen, die bei Auflösung der Gleichungen vierten und fünften Grades eine wesentliche Rolle spielen.

119. *System einer quadratischen Form.* Es sei die quadratische Form

$$f = \bar{a}_0 x_1^2 + 2\bar{a}_1 x_1 x_2 + \bar{a}_2 x_2^2$$

symbolisch dargestellt durch

$$f = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2 = \text{ etc.}$$

Die erste Ueberschiebung dieser Form über sich selbst ist

$$(f, f) = (ab)\, a_x b_x;$$

diese verschwindet aber identisch, da sie durch Vertauschung der völlig gleichberechtigten Symbole a und b nur das Vorzeichen ändert, wie wir bereits auch früher bemerkt haben. Die zweite Ueberschiebung liefert die bekannte Discriminante

$$D = (f, f)^2 = (ab)^2.$$

Ihre unsymbolische Gestalt ist (vergl. auch Nr. 2)

$$D = 2(\bar{a}_0 \bar{a}_2 - \bar{a}_1^2).$$

Die Ueberschiebung von f über sich selbst führt somit nur auf eine einzige Form, und da dieselbe Invariante ist, so können wir durch diesen Process zu keinen weiteren Formen gelangen. Die Frage ist, hat überhaupt die Form f noch andere Co- und Invarianten und wenn ja, lassen sich dieselben vielleicht als ganze rationale Functionen von f und D darstellen.

Wir können zeigen, dass in der That beide Fragen bejaht werden müssen, und bezeichnen deshalb f und D zusammen als volles System der quadratischen Form.

Das allgemeinste symbolische Product nämlich, das eine Covariante von f darstellen kann, ist, weil höhere als erste Potenzen von a_x und (ab) immer durch f oder D ersetzt werden können, dargestellt durch

$$P = (ab)(ac) \dots (ik)\, a_x b_x c_x \dots i_x k_x.$$

Greifen wir irgend einen Klammerfactor (ab) aus diesem Producte heraus, so müssen, soll P wirkliche und nicht blos symbolische Bedeutung haben, noch ausser ihm entweder die Factoren $a_x b_x$ oder die Factoren $(ac)(bc)$ oder $(ad)(bc) \dots$ auftreten. Um diese Fälle in einen zusammenzufassen, sagen wir

$$Q = (ab)\, a_\xi b_\eta$$

muss ein Theil des Productes P sein, wenn (ab) einer seiner Klammerfactoren ist. Aber dieser Theil Q lässt sich auf die bekannten Formen

f oder D zurückführen. Vertauscht man nämlich a und b, so kommt

$$Q = -(ab)\,b_\xi a_\eta\,,$$

also

$$2Q = (ab)(a_\xi b_\eta - b_\xi a_\eta) = (ab)^2(\xi\eta),$$

oder

$$Q = \frac{1}{2} D \cdot (\xi\eta).$$

Das Product P hat also die Discriminante D als Factor, und die Ursache liegt in dem Auftreten des Klammerfactors (ab). Durch Absonderung dieses Factors D wird P auf ein einfacheres Product P_1 zurückgeführt; es ist, wie wir uns in Zukunft ausdrücken werden, reducibel auf D und P_1. In P_1 treten aber immer nur Klammerfactoren vom Typus (ab) auf, an deren Stelle wieder die Discriminante D eingeführt werden kann. Was übrig bleibt ist eine Constante mal einer Potenz der Form f. P ist also reducibel auf $D^\mu \cdot f^\nu$; d. h. irgend ein symbolisches Product P ist rational durch D und f darstellbar.

120. *Auflösung der quadratischen Gleichung.* Eine Gleichung ist als gelöst zu betrachten, wenn sie in ihre Linearfactoren zerfällt. Diese Zerfällung kann man für

$$f(x) = a_x^2 = b_x^2 = \ldots$$

folgendermassen bewerkstelligen.

Quadrirt man die Identität

$$(ab)(xy) = (a_x b_y - b_x a_y),$$

so kommt:

$$D \cdot (xy)^2 = a_x^2 b_y^2 + b_x^2 a_y^2 - 2 a_x a_y b_x b_y.$$

Es ist aber $a_x a_y = b_x b_y = f_y$ und demnach wird:

$$D \cdot (xy)^2 = 2 f(x) \cdot f(y) - 2 f_y^2,$$

oder

$$f(x) \cdot f(y) = f_y^2 + \frac{D}{2}(xy)^2.$$

Hieraus folgt:

$$f(x) = \frac{1}{f(y)} \left\{ f_y + (xy)\sqrt{-\frac{D}{2}} \right\} \cdot \left\{ f_y - (xy)\sqrt{-\frac{D}{2}} \right\}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung besteht aus zwei in x linearen Factoren, wobei y nur als willkürlicher Parameter fungirt, so dass die Lösung als eine ganz allgemeine erscheint. Wollen wir die specielle für die gewöhnliche Gleichung zweiten Grades, so brauchen wir nur

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 0$$

zu setzen und erhalten alsdann die bekannte Zerfällung:

$$f(x) = \frac{1}{a_0} \left\{ a_0 x_1 + a_1 x_2 - x_2 \sqrt{-\frac{D}{2}} \right\} \left\{ a_0 x_1 + a_1 x_2 + x_2 \sqrt{-\frac{D}{2}} \right\}. \quad \text{(I)}$$

121. *Darstellung der Discriminante in den Coefficienten der Linearfactoren von f.* Bezeichnen wir in (I) die beiden Klammern rechts mit p_x und q_x, setzen wir also, indem wir $\frac{1}{a_0}$ in einen dieser Factoren hereinziehen,

$$f = p \cdot q,$$

dann ist

$$D = -\frac{1}{2}(pq)^2.$$

Denn D ist als zweite Ueberschiebung von f über sich selbst dargestellt durch (vergl. Nr. 38, I)

$$D = (p_x q_x, p'_x q'_x)^2$$
$$= \frac{1}{2}\{(pp')(qq') + (pq')(qp')\}.$$

Da aber p und q lineare Formen sind, so sind ihre symbolischen Coefficienten gleich ihren wirklichen, und demnach ist:

$$p = p', \quad q = q',$$

also

$$(pp') = 0, \quad (qq') = 0 \quad \text{und} \quad (pq') = -(qp') = +(pq).$$

Daher wird:

$$D = \frac{1}{2}(pq)(qp) = -\frac{1}{2}(pq)^2.$$

Das gleiche Resultat erhält man auch durch folgende Ueberlegung. Die Form $D = (ab)^2$ geht aus $f = a_x^2$ hervor, wenn man x durch b, d. h. x_1 durch b_2 und x_2 durch $-b_1$ ersetzt. Wenn also

$$f = p_x q_x = a_x^2,$$

dann ist:

$$D = (pb)(qb) = (ab)^2.$$

Das symbolische Product $(bp)(bq)$ geht aber aus der ersten Polare

$$2f_y = 2b_x b_y = p_x q_y + q_x p_y$$

hervor, wenn man x durch p, y durch q ersetzt; dies liefert die Beziehung:

$$2(bp)(bq) = (qp)(pq) = -(pq)^2,$$

und somit:

$$D = -\frac{1}{2}(pq)^2.$$

122. *Simultanes System zweier quadratischer Formen.* Das volle simultane System zweier quadratischer Formen

$$f = a_x^2, \quad \varphi = \alpha_x^2$$

lässt sich nach den vorausgegangenen Entwicklungen leicht a priori angeben. Es besteht einmal aus denjenigen In- und Covarianten, welche die einzelnen Formen selbst besitzen, also aus den vier Formen

$$f = a_x^2, \quad D_1 = A_{ff} = (ab)^2$$
$$\varphi = \alpha_x^2, \quad D_2 = A_{\varphi\varphi} = (\alpha\beta)^2,$$

ferner aus jenen, welche durch Ueberschiebung von f über φ entstehen, also aus den zwei weitern Formen:

$$(f, \varphi) = \vartheta_x^2 = \vartheta$$
$$(f, \varphi)^2 = A_{f\varphi}.$$

Da hiebei eine neue Covariante ϑ auftritt, so würden sich hieran jene Formen anschliessen, welche durch Ueberschiebung von ϑ über sich selbst und über f und φ sich ergeben. Indess entstehen aus diesen Ueberschiebungen keine neuen Formen; vielmehr lässt sich zeigen:

„Das volle simultane System der beiden quadratischen Formen f und φ besteht aus den sechs Formen

$$f, \varphi, A_{ff}, A_{\varphi\varphi}, \vartheta, A_{f\varphi};$$

alle übrigen In- und Covarianten sind ganze und rationale Functionen derselben."

123. *Gedankengang im Beweise dieses Satzes.* Das allgemeinste symbolische Product, das eine neue simultane Covariante von f und φ darstellen kann, wird die Symbole

$$a, b, c, \ldots; \quad \alpha, \beta, \gamma, \ldots; \quad \vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$$

enthalten, da es aus den Formen f, φ, ϑ durch Ueberschiebung entstanden sein muss. Doch ist von vornherein klar, dass wir nur solche Producte zu untersuchen brauchen, in denen die Factoren erster Art, wie a_x, α_x, ϑ_x nur in ersten Potenzen auftreten. Denn im andern Falle liessen sich ja sofort die bekannten Covarianten f, φ, ϑ des Systemes als Factoren absondern.

Was die Klammerfactoren betrifft, so können sie, da die Grundformen f, φ, ϑ selbst nur vom zweiten Grade sind, nur in ersten oder zweiten Potenzen auftreten. Die überhaupt denkbaren Klammerfactoren sind aber folgende sechs:

$$(ab), (\alpha\beta), (a\alpha); \quad (\vartheta\vartheta_1), (a\vartheta), (\alpha\vartheta). \tag{A}$$

Wir zeigen nun zuerst:

„Ein symbolisches Product, das einen solchen Factor quadratisch enthält, ist reducibel, d. h. es enthält Factoren, die sich aus den ursprünglichen Invarianten A_{ff}, $A_{\varphi\varphi}$, $A_{f\varphi}$ zusammensetzen."

In zweiter Linie beweisen wir:

„Ein symbolisches Product, in welchem ein solcher Factor linear auftritt, ist reducibel, d. h. es enthält Factoren, welche rationale ganze Functionen der ursprünglichen sechs Co- und Invarianten sind."

124. *Begriff der Reducibilität und des Reducenten.* Ich will hiebei zunächst die Begriffe der Reducibilität und des Reducenten, wie wir sie für jetzt, wie für später nöthig haben, fest umgrenzen. Ein symbolisches Product ist in drei Fällen als reducibel anzusehen: Erstens, wenn es identisch verschwindet; zweitens, wenn es bereits bekannte Formen, die in dem System schon aufgenommen sind, insbesondere Invarianten zu Factoren hat, oder gar durch solche Formen vollständig dargestellt werden kann; drittens, wenn es sich in andere symbolische Producte überführen lässt, die bereits als reducibel erkannt wurden, was sich oft dadurch schon ausweist, dass man es auf ein Product mit weniger bereits bekannten Symbolen zu reduciren vermag. (Vergl. auch Nr. 144.)

Von den in einem solchen reducibلen Producte auftretenden Klammerfactoren sind alsdann insbesondere jene von Bedeutung, kraft deren die Reducibilität eintritt. Sie erhalten den Namen „Reducent", sobald jedes symbolische Product, welches sie besitzt, reducibel ist. Hiezu ist nur nöthig, dass das ursprüngliche Product P, welches aus ihm und seinen Symbolen allein construirt ist, und alle aus P durch Faltung entstehenden Producte P_i reducible Formen sind. Denn ein beliebiges Product Π, das den betreffenden Reducenten besitzt, kann stets durch Ueberschiebungen dargestellt werden, welche diese reduciblen Formen P und P_i mit geeigneten andern Formen bilden. (Vergl. Nr. 46.) Und diese Ueberschiebungen sind reducibel, wenn P und P_i es waren. (Vergleiche auch Nr. 144.)

125. *Beweis, dass alle Producte, welche einen der sechs Factoren* (A) *quadratisch enthalten, reducibel sind.* Da die Grössen $(ab)^2$, $(\alpha\beta)^2$, $(a\alpha)^2$ nicht anderes als die Invarianten A_{ff}, $A_{\varphi\varphi}$, $A_{f\varphi}$ des Systemes sind, so können wir von vornherein von Producten mit diesen Klammerfactoren absehen.

Die Grösse $(\vartheta\vartheta_1)^2$ ist die Discriminante $A_{\vartheta\vartheta}$ der Form ϑ, wir können zeigen, dass sie durch die drei Invarianten des Systemes ausdrückbar ist.

Zu dem Zwecke wollen wir diese Discriminante noch durch andere symbolische Producte darstellen, aus deren Vergleichung alsdann die Reducibilität ersichtlich ist.

Zunächst ersetzen wir in $(\vartheta\vartheta_1)^2$ das Symbol ϑ_1 durch die ursprünglichen Symbole a, α, gemäss der Definition

$$\vartheta_{1x}^2 = (a\alpha)\, a_x \alpha_x,$$

und erhalten so:

$$(\vartheta\vartheta_1)^2 = (a\alpha)(\vartheta\alpha)(\vartheta a). \tag{1}$$

Das symbolische Product rechts erhalten wir aber auch, wenn wir ein Glied der ersten Polare von $\vartheta_x^2 = (b\beta)\, b_x \beta_x$ in die Reihe (VIII) § 7 entwickeln. Es ist nämlich:

$$(b\beta)\, b_x \beta_y = \{(b\beta)\, b_x \beta_x\}_y + \frac{1}{2}\, (b\beta)^2 (xy), \tag{2}$$

oder, indem wir nun x durch a, y durch α ersetzen und die Symbole ϑ_x^2, $A_{f\varphi}$ für $(b\beta)\, b_x \beta_x$, resp. $(b\beta)^2$ einführen und mit $(a\alpha)$ multipliciren:

$$(b\beta)(ba)(\beta\alpha)(a\alpha) = (\vartheta a)(\vartheta\alpha)(a\alpha) + \frac{1}{2}\, A_{f\varphi} \cdot (a\alpha)^2. \tag{3}$$

Hierin tritt bereits das symbolische Product der Gleichung (1) auf, und da $(a\alpha)^2 = A_{f\varphi}$, so handelt es sich nur mehr darum, auch die linke Seite dieser Gleichung (3) auf bekannte Formen zurückzuführen. Es ist aber, wenn wir darin a mit b vertauschen, und die halbe Summe der so entstehenden Producte nehmen:

$$(b\beta)(ba)(\beta\alpha)(a\alpha) = \frac{1}{2}\, (ab)(\alpha\beta)\, \{(a\alpha)(b\beta) - (b\alpha)(a\beta)\}$$

oder

$$= \frac{1}{2}\, (ab)^2 (\alpha\beta)^2 = \frac{1}{2}\, A_{ff} \cdot A_{\varphi\varphi}, \tag{4}$$

wie der Identitätssatz unmittelbar liefert. Demnach erhalten wir aus Gleichung (3) und (4)

$$\frac{1}{2}\, \{A_{ff} \cdot A_{\varphi\varphi} - A_{f\varphi}^2\} = (a\alpha)(\vartheta\alpha)(\vartheta a), \tag{5}$$

oder durch Vergleichung mit (1)

$$(\vartheta\vartheta_1)^2 = \frac{1}{2}\, \{A_{ff} A_{\varphi\varphi} - A_{f\varphi}^2\}, \tag{6}$$

d. h.: „Jedes symbolische Product mit dem Factor $(\vartheta\vartheta_1)^2$ ist reducibel."

Dies gilt aber auch für symbolische Producte mit den Factoren $(a\vartheta)^2$ und $(\alpha\vartheta)^2$. Denn es ist:

$$\left.\begin{aligned} 0 = A_{f\vartheta} &= (a\vartheta)^2 = (b\alpha)(ab)(a\alpha) \\ 0 = A_{\varphi\vartheta} &= (\alpha\vartheta)^2 = (a\beta)(\alpha a)(\alpha\beta) \end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

wie man unmittelbar erkennt, da die symbolischen Producte rechts durch Vertauschung gleichberechtigter Symbole nur ihr Vorzeichen ändern. Wir haben somit den Satz bewiesen:

> „Alle symbolischen Producte, welche einen der sechs möglichen Klammerfactoren quadratisch enthalten, sind reducibel."

Es erübrigt also nur noch, dieselbe Eigenschaft für symbolische Producte nachzuweisen, welche diese Factoren linear besitzen.

126. *Beweis, dass alle Producte, welche einen der sechs Factoren* (A) *in* Nr. 123 *linear enthalten, reducibel sind.*

Die Factoren (ab) und $(\alpha\beta)$ haben wir bereits in Nr. 119 als Reducenten erkannt; genau dieselbe Eigenschaft besitzt $(\vartheta\vartheta_1)$ aus gleichen Gründen. Es bleiben also nur noch Producte mit den linearen Klammerfactoren $(a\alpha)$, $(a\vartheta)$, $(\alpha\vartheta)$ zu untersuchen. Ein Product, das den Factor $(a\vartheta)$ oder $(\alpha\vartheta)$ besitzt, muss auch noch die Factoren $a_\xi\vartheta_\eta$ resp. $\alpha_\xi\vartheta_\eta$ enthalten, wobei die Grössen ξ, η für irgend welche andere Symbole oder Variable stehen mögen. Wir brauchen also nur zu zeigen, dass

$$(a\vartheta)\,a_\xi\,\vartheta_\eta \quad \text{und} \quad (\alpha\vartheta)\,\alpha_\xi\,\vartheta_\eta$$

reducibel sind. Dies erkennen wir aber auf folgende Weise. Da $(a\vartheta)$ und $(\alpha\vartheta)$ die Klammerfactoren der Functionaldeterminanten $(f,\ \vartheta)$ und $(\varphi,\ \vartheta)$ sind, so sind sie sicher Reducenten, wenn diese Formen und die aus ihnen durch Faltung entstehenden reducibel sind. Es sind aber $(f,\ \vartheta)$ und $(\varphi,\ \vartheta)$ Functionaldeterminanten von Functionaldeterminanten, und als solche nach den früher gegebenen allgemeinen Theorien stets durch einfachere Formen darstellbar. In der That liefert Nr. 52, (I) und (II) direct:

$$(f,\ \vartheta) = \frac{1}{2}\left\{A_{f\varphi}\cdot f - A_{ff}\cdot\varphi\right\}$$

$$(\vartheta,\ \varphi) = \frac{1}{2}\left\{A_{f\varphi}\cdot\varphi - A_{\varphi\varphi}\cdot f\right\}.$$

Die aus $(f,\ \vartheta)$ und $(\vartheta,\ \varphi)$ durch Faltung entstehenden Formen $A_{f\vartheta}$ und $A_{\varphi\vartheta}$ sind aber gleichfalls reducibel, da sie verschwinden; demnach sind $(a\vartheta)$ und $(\alpha\vartheta)$ in der That Reducenten.

Man kann die Reducibilität der Formen $(a\vartheta)\,a_\xi\vartheta_\eta$ und $(\alpha\vartheta)\,\alpha_\xi\vartheta_\eta$ auch in anderer Weise einfach zeigen. Aus den Formeln Nr. 51, (II) erhält man nämlich direct:

$$(a\vartheta)\,\vartheta_\eta\,a_\xi = (f,\ \vartheta)_\eta = \frac{1}{2}\left\{A_{f\varphi}\cdot f_\xi\cdot f_\eta - A_{ff}\cdot\varphi_\xi\cdot\varphi_\eta\right\}$$

$$-(\alpha\vartheta)\,\vartheta_\eta\,\alpha_\xi = (\vartheta,\ \varphi)_\eta = \frac{1}{2}\left\{A_{f\varphi}\cdot\varphi_\xi\cdot\varphi_\eta - A_{\varphi\varphi}\cdot f_\xi\cdot f_\eta\right\}.$$

Die symbolischen Producte rechts enthalten neben den bekannten drei Invarianten des Systemes nur mehr ein Symbol a, respective α, also w e n i g e r Symbole wie die Ausdrücke links, wodurch deren Reducibilität nachgewiesen ist.

Es erübrigt noch, die Reducibilität von Producten mit dem Klammerfactor $(a\alpha)$, oder, was dasselbe ist, mit dem Theilproduct $(a\alpha)\,a_\xi\,\alpha_\eta$ nachzuweisen. Sie ergiebt sich direct aus Nr. 125, (2), wonach:

$$(a\alpha)\,a_\xi\,\alpha_\eta = \vartheta_\xi\,\vartheta_\eta + \frac{1}{2}\,A_{f\varphi}\,(\xi\eta).$$

Die rechte Seite enthält nur reducible Glieder, das zweite wegen des Factors $A_{f\varphi}$, das erste, da wir für jeden Klammerfactor mit dem Symbol ϑ bereits die Eigenschaft nachgewiesen haben, ein Product, dem er angehört, reducibel zu machen.

Wir sind also damit zu dem Resultate gelangt, dass jedes symbolische Product, welches irgend einen der sechs möglichen Klammerfactoren linear enthält, auf die sechs bekannten Formen reducirt werden kann.

„Demnach sind alle sechs Klammerfactoren

$$(ab),\ (\alpha\beta),\ (a\alpha);\quad (a\vartheta),\ (\alpha\vartheta),\ (\vartheta\vartheta)$$

Reducenten, und es lassen sich alle Co- und Invarianten der Formen f und φ ganz und rational durch die Formen

$$f,\ \varphi,\ \vartheta,\ A_{ff},\ A_{\varphi\varphi},\ A_{f\varphi}$$

darstellen."

127. *Zusammenfassung der gewonnenen Relationen.* Ich will nur noch tabellarisch auf die wichtigeren Relationen, die bei dieser Untersuchung sich ergeben haben, aufmerksam machen, indem ich sie im Folgenden zusammenstelle. Ist $f = a_x^2$, $\varphi = \alpha_x^2$, $\vartheta = (a\alpha)\, a_x \alpha_x$, so hat man:

(1) $$2A_{\vartheta\vartheta} = A_{ff} A_{\varphi\varphi} - A_{f\varphi}^2 \qquad \text{(Nr. 125)}$$

(2) $$A_{f\vartheta} = 0, \quad A_{\varphi\vartheta} = 0 \qquad \text{(Nr. 125)}$$

(3) $$2(\vartheta, f) = A_{ff}\cdot\varphi - A_{f\varphi}\cdot f \qquad \text{(Nr. 126)}$$

$$2(\varphi, \vartheta) = A_{\varphi\varphi}\cdot f - A_{f\varphi}\cdot\varphi.$$

Hiezu tritt:

(4) $$-2\vartheta^2 = A_{ff}\,\varphi^2 - 2A_{f\varphi}\, f\varphi + A_{\varphi\varphi} f^2,$$

eine Relation (4), welche zwar hier nicht neuerdings abgeleitet wurde, die sich aber unmittelbar aus der allgemeineren Nr. 48, (I) ergiebt.

128. *Erste Anwendung. Ist ϑ identisch Null, so sind f und φ einander proportional.* Wir zeigen zuerst, dass $\vartheta = 0$ die hinreichende Bedingung ist, damit die Gleichung besteht

$$f = \varrho\cdot\varphi,$$

wo ϱ ein Proportionalitätsfactor. Es ist nämlich

$$2\vartheta_x\vartheta_y = (a\alpha)\,\{a_x\alpha_y + \alpha_x a_y\},$$

und weil nach dem Productsatze:

$$(xy) = \frac{1}{(a\alpha)}\,\{a_x\alpha_y - \alpha_x a_y\},$$

so folgt durch Multiplication beider Gleichungen

$$2(xy)\,\vartheta_x\vartheta_y = a_x^2\alpha_x^2 - a_y^2\alpha_x^2.$$

Wenn nun $\vartheta = 0$, dann ist auch $\vartheta_y = 0$, also wird in diesem Falle:

$$a_x^2 \alpha_y^2 = a_y^2 \alpha_x^2,$$

oder

$$a_x^2 = \frac{a_y^2}{\alpha_y^2} \cdot \alpha_x^2 = \varrho \cdot \alpha_x^2.$$

Die Bedingung $\vartheta = 0$ ist aber nicht nur hinreichend, sondern auch nothwendig. Denn wenn

$$\alpha_x^2 = \frac{1}{\varrho} a_x^2 = \frac{1}{\varrho} b_x^2,$$

dann ist

$$\vartheta = (a_x^2, \alpha_x^2) = \frac{1}{\varrho}(a_x^2, b_x^2) = \frac{1}{\varrho}(ab)\, a_x b_x = 0.$$

129. *Zweite Anwendung. Ist $A_{\vartheta\vartheta}$ identisch null, so besitzen f und φ einen gemeinsamen linearen Factor.* Diese Bedingung ist nothwendig; denn wenn f und φ einen gemeinsamen linearen Factor besitzen, also etwa

$$f = p_x q_x$$

$$\varphi = p_x r_x$$

ist, dann wird ϑ ein reines Quadrat. Denn man hat nach Nr. 38, (I)

$$\vartheta = (p_x q_x, p_x r_x) = \frac{1}{4}\{(pp) q_x r_x + (pr) q_x p_x + (qp) p_x r_x + (qr) p_x^2\}.$$

Da aber $(pp) = 0$ und $(pr) q_x + (qp) r_x = (qr) p_x$, so wird

$$\vartheta = \frac{1}{4}\{(qr) p_x^2 + (qr) p_x^2\},$$

oder

$$\vartheta = \frac{1}{2}(qr) \cdot p_x^2.$$

Die Functionaldeterminante ϑ ist also das Quadrat des gemeinsamen linearen Factors p_x und demnach $A_{\vartheta\vartheta}$ als Discriminante identisch null.

Die Bedingung $A_{\vartheta\vartheta} = 0$ ist aber auch hinreichend. Denn wenn

$$A_{\vartheta\vartheta} = 0,$$

dann ist

$$\vartheta = m_x^2,$$

wo m_x eine lineare Form ist. Die zweite Ueberschiebung von $f = a_x^2$ über $\vartheta = m_x^2$ ist sodann

$$A_{f\vartheta} = (am)^2 = a_m^2.$$

Wir wissen aber, dass $A_{f\vartheta}$ wie $A_{\varphi\vartheta}$ identisch verschwinden; es ist also sowohl

$$a_m^2 = 0,$$

als auch

$$\alpha_m^2 = 0,$$

d. h. die Formen a_x^2 und α_x^2 werden identisch null für $x = m$, oder was das Nämliche ist, sie besitzen einen gemeinschaftlichen linearen Factor m_x.

Da also $A_{\vartheta\vartheta} = 0$ die nothwendige und hinreichende Bedingung ist, dass f und φ einen gemeinsamen Factor besitzen, so muss $A_{\vartheta\vartheta}$ der Resultante $R_{f,\varphi}$ beider Formen proportional sein. Die Proportionalitätsconstante kann nur ein Zahlenfactor sein, da sowohl $A_{\vartheta\vartheta}$ als auch $R_{f,\varphi}$ vom vierten Grade in den Coefficienten beider Formen ist. Man findet durch ein beliebiges Beispiel leicht:

$$R_{f,\varphi} = -2 A_{\vartheta\vartheta} = A_{f\varphi}^2 - A_{ff} A_{\varphi\varphi}.$$

Anmerkung. Die Identität:

$$2\vartheta = (qr) \cdot p_x^2$$

lehrt zugleich, wie man den gemeinschaftlichen Factor ermitteln kann. Denn vergleicht man in der ersten Polare

$$2\vartheta_x\vartheta_y = (qr) p_x p_y$$

die Coefficienten von y_1 und y_2, so erhält man:

$$2\vartheta_x\vartheta_1 = (qr) p_x p_1$$
$$2\vartheta_x\vartheta_2 = (qr) p_x p_2,$$

und somit durch Division:

$$\vartheta_x\vartheta_1 : \vartheta_x\vartheta_2 = p_1 : p_2 \tag{1}$$

für jeden Werth von x. Die beiden ersten partiellen Differentialquotienten von ϑ sind sonach den Coefficienten des gemeinschaftlichen linearen Factors von f und φ proportional; dies gilt insbesondere beispielsweise für $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, für welchen Fall Gleichung (1) in

$$\bar{\vartheta}_0 : \bar{\vartheta}_1 = p_1 : p_2 \tag{2}$$

übergeht. Es ist aber nach Nr. 47, (II)

$$\vartheta = \begin{vmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \\ \bar{\alpha}_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ x_1^2 & -x_1x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = \bar{\vartheta}_0 x_1^2 + 2\bar{\vartheta}_1 x_1 x_2 + \bar{\vartheta}_2 x_2^2,$$

wobei

$$\bar{\vartheta}_0 = (\bar{a}_1\bar{\alpha}_2), \quad \bar{\vartheta}_1 = \frac{1}{2}(\bar{a}_0\bar{\alpha}_2), \quad \bar{\vartheta}_2 = (\bar{a}_0\bar{\alpha}_1).$$

Durch Substitution dieser Werthe in (2) erhalten wir:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2(\bar{a}_1\bar{\alpha}_2)}{(\bar{a}_0\bar{\alpha}_2)}. \tag{3}$$

130. *Dritte Anwendung. Kanonische Form für zwei simultane quadratische Formen.* Wir stellen uns die Aufgabe, zwei solche lineare

Formen r_x und s_x zu ermitteln, dass durch dieselbe Transformation f und φ gleichzeitig die Gestalt erhalten:

$$\left.\begin{aligned} f &= \lambda_1 r_x^2 + \lambda_2 s_x^2 \\ \varphi &= \mu_1 r_x^2 + \mu_2 s_x^2 \end{aligned}\right\}. \tag{I}$$

Die erste Untersuchung zur Lösung solcher Aufgaben ist immer: Wie gestaltet sich das simultane Formensystem, wenn wir f und φ bereits in dieser kanonischen Form zu Grunde legen? Es ergiebt sich sofort, dass ϑ das Product der beiden linearen Formen r_x und s_x ist, bis auf einen constanten Factor. Denn man erhält:

$$\begin{aligned} \vartheta = (f, \varphi) &= (\lambda_1 r_x^2 + \lambda_2 s_x^3, \; \mu_1 r_x^2 + \mu_2 s_x^2) \\ &= \lambda_1 \mu_1 (r_x^2, \; r_x^2) + \lambda_1 \mu_2 (r_x^2, \; s_x^2) + \lambda_2 \mu_1 (s_x^2, \; r_x^2) + \lambda_2 \mu_2 (s_x^2, \; s_x^2) \\ &= \lambda_1 \mu_2 (rs) r_x s_x - \lambda_2 \mu_1 (rs) r_x s_x \\ &= (\lambda \mu)(rs) r_x s_x . \end{aligned}$$

Wir lernen daraus: Die Factoren r_x und s_x, durch welche sich f und φ gleichzeitig in die kanonische Form (I) bringen lassen, sind den linearen Factoren von ϑ proportional. Damit also überhaupt diese Darstellung möglich ist, muss ϑ wirklich zwei verschiedene lineare Factoren besitzen, d. h. f und φ dürfen keinen Factor gemeinsam haben.

Die Einführung dieser beiden linearen Factoren von ϑ ist aber auch hinreichend, um f und φ gleichzeitig als Summe zweier Quadrate darzustellen. Denn sei

$$\vartheta = r_x \cdot s_x ,$$

dann ist nach Nr. 126 (2):

$$\left.\begin{aligned} A_{f\vartheta} &= (as)(ar) = 0 \\ A_{\varphi\vartheta} &= (\alpha s)(\alpha r) = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Nun hat man gemäss dem Identitätssatze:

$$\begin{aligned} a_x(rs) &= r_x(as) - s_x(ar) \\ \alpha_x(rs) &= r_x(\alpha s) - s_x(\alpha r). \end{aligned}$$

Also, indem man beide Identitäten quadrirt, und berücksichtigt, dass wegen der Relationen (1) die mittleren Glieder rechts verschwinden:

$$\left.\begin{aligned} f \cdot (rs)^2 &= r_x^2 (as)^2 + s_x^2 (ar)^2 \\ \varphi \cdot (rs)^2 &= r_x^2 (\alpha s)^2 + s_x^2 (\alpha r)^2 \end{aligned}\right\}, \tag{II}$$

wodurch in der That f und φ als Summen zweier Quadrate dargestellt sind.

Um die Transformation von f und φ wirklich auszuführen, wird man sonach entweder die Form ϑ in ihre Linearfactoren spalten oder

einfacher in folgender Weise verfahren. Man multiplicirt die Gleichungen (II) mit 1 resp. λ und addirt dieselben; dann erhält man:

$$f + \lambda\varphi = r_x^2 \left\{ \frac{(as)^2 + \lambda(\alpha s)^2}{(rs)^2} \right\} + s_x^2 \left\{ \frac{(ar)^2 + \lambda(\alpha r)^2}{(rs)^2} \right\}.$$

Nun lässt sich λ so bestimmen, dass der Coefficient von r_x^2 oder von s_x^2 verschwindet; in diesem Falle geht dann $f + \lambda\varphi$ gerade in das Quadrat der linearen Form s_x resp. r_x (bis auf einen constanten Factor) über. Damit aber $f + \lambda\varphi$ ein reines Quadrat sei, muss die Discriminante:

$$(f + \lambda\varphi, f + \lambda\varphi)^2 = (f, f)^2 + 2\lambda(f, \varphi)^2 + \lambda^2(\varphi, \varphi)^2$$

identisch verschwinden. Dies liefert eine quadratische Gleichung für λ, nämlich:

$$A_{ff} + 2\lambda A_{f\varphi} + \lambda^2 A_{\varphi\varphi} = 0.$$

Sind dann λ_1 und λ_2 die Wurzeln dieser Gleichung, so ist:

$$f + \lambda_1\varphi = m_x^2$$
$$f + \lambda_2\varphi = n_x^2,$$

und somit:

$$f = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} m_x^2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} n_x^2$$
$$\varphi = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} m_x^2 - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} n_x^2.$$

§ 12. Die Form zweiten Grades: System dreier und mehr simultaner Formen.

131. *Das simultane System dreier quadratischer Formen.* Das volle System dreier quadratischer Formen f, φ, ψ besteht aus folgenden Bildungen.

1) Die Originalformen selbst:

$$f = a_x^2 = b_x^2 = \ldots$$
$$\varphi = \alpha_x^2 = \beta_x^2 = \ldots$$
$$\psi = r_x^2 = s_x^2 = \ldots;$$

2) ihre sechs zweiten Ueberschiebungen:

$$(f, f)^2 = A_{ff}, \quad (\varphi, \varphi)^2 = A_{\varphi\varphi}$$
$$(f, \varphi)^2 = A_{f\varphi}, \quad (\varphi, \psi)^2 = A_{\varphi\psi}$$
$$(f, \psi)^2 = A_{f\psi}, \quad (\psi, \psi)^2 = A_{\psi\psi};$$

3) ihre drei Functionaldeterminanten (schiefe Covarianten):

$$(\varphi, \psi) = \vartheta_1 = \vartheta_{1x}^2$$
$$(\psi, f) = \vartheta_2 = \vartheta_{2x}^2$$
$$(f, \varphi) = \vartheta_3 = \vartheta_{3x}^2;$$

4) ihre Combinante (die einzige schiefe Invariante):

$$(a\alpha)(\alpha r)(ar) = \begin{vmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \\ \bar{\alpha}_0 & \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 \\ \bar{r}_0 & \bar{r}_1 & \bar{r}_2 \end{vmatrix} = R_{123},$$

welch letztere wir bereits in § 1 kennen gelernt haben. Ausser diesen dreizehn Formen existirt keine, die sich nicht als ganze rationale Function derselben darstellen liesse.

132. *Alle Producte mit quadratischen Klammerfactoren sind auf diese dreizehn Formen reducibel.* Irgend ein symbolisches Product nämlich, das eine neue Covariante der drei Formen repräsentiren soll, kann nur folgende Klammerfactoren

$$\left.\begin{array}{llllll} 1)\ (ab) & (\alpha\beta) & (rs) & (a\alpha) & (ar) & (\alpha r) \\ \quad (a\vartheta_3) & (a\vartheta_2) & (\alpha\vartheta_1) & (\alpha\vartheta_3) & (r\vartheta_2) & (r\vartheta_1) \\ \quad (\vartheta_1\vartheta_1) & (\vartheta_2\vartheta_2) & (\vartheta_3\vartheta_3); & & & \\ 2)\ (a\vartheta_1) & (\alpha\vartheta_2) & (r\vartheta_3) & (\vartheta_1\vartheta_2) & (\vartheta_1\vartheta_3) & (\vartheta_2\vartheta_3) \end{array}\right\} \qquad (A)$$

besitzen und zwar im höchsten Falle in der zweiten Potenz. Was die fünfzehn Factoren der ersten Gruppe betrifft, so sahen wir bereits bei Aufstellung des simultanen Systemes zweier quadratischer Formen, dass jedes Product, in welchem sie quadratisch oder linear auftreten, auf die Formen des Systemes reducibel ist. Unsere Aufgabe ist also nur noch nachzuweisen, dass auch die Klammerfactoren der zweiten Gruppe Reducenten sind. Wir betrachten wiederum zuerst Producte, deren Klammerfactoren den Exponenten 2 haben. Die Factoren

$$(a\vartheta_1)^2,\ (\alpha\vartheta_2)^2,\ (r\vartheta_3)^2,\ (\vartheta_1\vartheta_2)^2,\ (\vartheta_1\vartheta_3)^2,\ (\vartheta_2\vartheta_3)^2$$

gehören zunächst folgenden Ueberschiebungen an:

$$(f, (\varphi, \psi))^2, \qquad (\varphi, (\psi, f))^2, \qquad (\psi, (f, \varphi))^2 \qquad (1)$$

$$((\varphi, \psi), (\psi, f))^2, \quad ((\varphi, \psi), (f, \varphi))^2, \quad ((\psi, f), (f, \varphi))^2. \qquad (2)$$

Es ist aber:

$$(f, (\varphi, \psi))^2 = (a_x^2, (\alpha r)\alpha_x r_x)^2 = (a\alpha)(\alpha r)(ar) = R_{123} \qquad (I)$$
$$= (\varphi, (\psi, f))^2 = (\psi, (f, \varphi))^2,$$

und folglich führen die Ueberschiebungen der Gruppe (1) auf keine neue Form, d. h. Producte mit den Factoren $(a\vartheta_1)^2$, $(\alpha\vartheta_2)^2$, $(r\vartheta_3)^2$ sind reducibel.

Was die Ueberschiebungen der Gruppe (2) betrifft, so können wir deren Reducibilität auf folgende Art beweisen. Ich will zuerst den Weg der directen Rechnung einschlagen. Es ist, wenn $f = a_x^2$, $\varphi = \alpha_x^2$, $\psi = r_x^2$, $\chi = \mu_x^2$ irgend vier quadratische Formen darstellen:

$$U = ((f, \varphi), (\psi, \chi))^2 = (a\alpha)(r\mu)(a_x\alpha_x, r_x\mu_x)^2$$
$$= \frac{1}{2}(a\alpha)(r\mu)\{(ar)(\alpha\mu) + (a\mu)(\alpha r)\}$$
$$= \frac{1}{2}(G_1 + G_2).$$

Die Differenz der beiden Glieder rechts ist:

$$G_1 - G_2 = (a\alpha)(r\mu)\{(ar)(\alpha\mu) - (a\mu)(\alpha r)\},$$

oder weil:

$$(ar)(\alpha\mu) - (a\mu)(\alpha r) = (a\alpha)(r\mu)$$

(Identitätssatz), so erhält man:

$$G_1 - G_2 = (a\alpha)^2(r\mu)^2 = A_{f\varphi}A_{\psi\chi}.$$

Addiren wir die beiden Gleichungen:

$$U = \frac{1}{2}(G_1 + G_2)$$
$$\frac{1}{2}A_{f\varphi}A_{\psi\chi} = \frac{1}{2}(G_1 - G_2),$$

so erhält man:

$$U + \frac{1}{2}A_{f\varphi}A_{\psi\chi} = (a\alpha)(r\mu)(ar)(\alpha\mu),$$

oder, wenn wir auf das symbolische Product rechts den Productsatz anwenden:

$$U + \frac{1}{2}A_{f\varphi}A_{\psi\chi} = \frac{1}{2}\{A_{f\varphi}A_{\psi\chi} + A_{f\psi}A_{\varphi\chi} - A_{f\chi}A_{\varphi\psi}\},$$

also

$$U = ((f, \varphi), (\psi, \chi))^2 = \frac{1}{2}\{A_{f\psi}A_{\varphi\chi} - A_{f\chi}A_{\varphi\psi}\}. \qquad \text{(II)}$$

Für $\chi = f$ erhält man hieraus

$$((f, \varphi), (\psi, f))^2 = \frac{1}{2}(A_{f\psi}A_{f\varphi} - A_{ff}A_{\varphi\psi}) = A_{\vartheta_3\vartheta_2}.$$

Man kann das gleiche Resultat rascher durch den Aronhold'schen Process erlangen. Führt man nämlich in die Identität

$$2(\vartheta_3, \vartheta_3)^2 = A_{ff}A_{\varphi\varphi} - A_{f\varphi}^2$$
$$= (ab)^2(\alpha\beta)^2 - (a\alpha)^2(b\beta)^2$$

durch einmaliges Deltairen statt des Symboles α das Symbol r ein, so kommt, weil

$$\delta(\vartheta_3) = \delta(f, \varphi) = (f, \psi) = -\vartheta_2$$
$$-4(\vartheta_3, \vartheta_2)^2 = 2(ab)^2(\alpha r)^2 - 2(a\alpha)^2(br)^2,$$

oder

$$A_{\vartheta_3\vartheta_2} = -\frac{1}{2}\{A_{ff}A_{\varphi\psi} - A_{f\varphi}A_{f\psi}\} = (\vartheta_3\vartheta_2)^2. \qquad \text{(III)}$$

Analoge Relationen erhält man für $A_{\vartheta_2\vartheta_1}$ und $A_{\vartheta_1\vartheta_3}$. Folglich sind Producte, welche die Factoren $(\vartheta_1\vartheta_2)^2$, $(\vartheta_1\vartheta_3)^2$, $(\vartheta_2\vartheta_3)^2$ besitzen, auf Formen des Systems reducibel.

133. *Producte, welche die Klammerfactoren* (A) *linear enthalten, sind reducibel.* Es bleiben also nur mehr Producte zu untersuchen, in denen kein Klammerfactor in höherer als in der ersten Potenz auftritt. Auch hier brauchen wir die Reducibilität nur mehr für Producte nachzuweisen, in welchen die letzten sechs Klammerfactoren

$$(a\vartheta_1) \quad (\alpha\vartheta_2) \quad (r\vartheta_3) \quad (\vartheta_1\vartheta_2) \quad (\vartheta_1\vartheta_3) \quad (\vartheta_2\vartheta_3)$$

linear auftreten. Der Beweis gestaltet sich genau wie bei zwei simultanen quadratischen Formen. Wir haben nur zu zeigen, dass die Producte

$$(a\vartheta_1)\,a_x\vartheta_{1y}, \ \ldots, \ (\vartheta_1\vartheta_2)\,\vartheta_{1x}\vartheta_{2y}, \ \ldots$$

reducibel sind. Die hiezu nöthigen Formeln gehen direct aus der Relation (2) Nr. 125

$$(f, \varphi)_y = (a\alpha)\,a_x\alpha_y - \frac{1}{2} A_{f\varphi}(xy)$$

hervor. Ersetzt man hierin nämlich die quadratische Form φ durch die quadratische Form ϑ_1, so kommt:

$$(f, \vartheta_1)_y = (a\vartheta_1)\,a_x\vartheta_{1y} - \frac{1}{2} A_{f\vartheta_1}(xy); \tag{I}$$

und substituirt man hierin noch ϑ_2 für f, so kommt auch:

$$(\vartheta_2, \vartheta_1)_y = (\vartheta_2\vartheta_1)\,\vartheta_{2x}\vartheta_{1y} - \frac{1}{2} A_{\vartheta_2\vartheta_1}(xy). \tag{II}$$

Beide Relationen lehren, dass die Producte

$$(a\vartheta_1)\,a_x\vartheta_{1y} \quad \text{und} \quad (\vartheta_2\vartheta_1)\,\vartheta_{2x}\vartheta_{1y}$$

reducibel sind; denn die Formen $A_{f\vartheta_1}$, $A_{\vartheta_2\vartheta_1}$ sind reducibel gemäss den Entwicklungen in Nr. 132, und die Formen (f, ϑ_1) und $(\vartheta_2, \vartheta_1)$ sind als Functionaldeterminanten von Functionaldeterminanten reducibel, und zwar hat man, wie aus der allgemeinen Formel (III) Nr. 53 direct hervorgeht:

$$(f, \vartheta_1) = (f, (\varphi, \psi)) = -\frac{1}{2}\{A_{f\varphi}\psi - A_{f\psi}\varphi\}, \tag{III}$$

und ebenso:

$$(\vartheta_2, \vartheta_1) = ((\psi, f), \vartheta_1) = -\frac{1}{2}\{A_{f\vartheta_1}\psi - A_{\psi\vartheta_1}f\},$$

oder weil:

$$A_{\psi\vartheta_1} = (r\vartheta_1)^2 = (\psi, (\varphi, \psi))^2 = 0$$

und

$$A_{f\vartheta_1} = (a\vartheta_1)^2 = R_{123}:$$

so wird:

$$(\vartheta_2, \vartheta_1) = -\frac{1}{2} R_{123}\psi. \tag{IV}$$

Die Relationen (I) und (II) gehen also unter Benutzung dieser Werthe (III) und (IV) über in:

$$\left.\begin{aligned}(a\vartheta_1)\,a_x\,\vartheta_{1y} &= \frac{1}{2}\left\{A_{f\psi}\,\varphi_y\,\varphi_x - A_{f\varphi}\,\psi_y\,\psi_x + R_{123}(xy)\right\}\\ (\vartheta_1\vartheta_2)\,\vartheta_{2x}\,\vartheta_{1y} &= \frac{1}{2}\left\{R_{123}\,\psi_y\,\psi_x + \frac{1}{2}(xy)(A_{\psi\psi}A_{f\varphi} - A_{\psi\varphi}A_{\psi f})\right\}\end{aligned}\right\}\cdot \text{(V)}$$

Somit sind alle Producte, welche irgend einen der vorhandenen Klammerfactoren linear enthalten, reducibel. Durch Faltung derselben entstehen Producte mit quadratischen Klammerfactoren, die gleichfalls auf die Formen des Systemes zurückgeführt werden können. Demnach sind alle Klammerfactoren Reducenten und das simultane System dreier quadratischer Formen besteht aus keinen weiteren als den Eingangs aufgezählten dreizehn Formen.

134. *Relationen zwischen den Formen des Systemes.* Ich will zunächst der Uebersichtlichkeit halber wiederum die sämmtlichen, bisher gewonnenen Relationen tabellarisch ordnen, und durch einige neue ergänzen, die sich direct aus den allgemeinen Formeln über Functionaldeterminanten ergeben.

1) Relationen zwischen den zweiten Ueberschiebungen.

$$\alpha)\quad \left.\begin{aligned}A_{f\vartheta_2} &= A_{f\vartheta_3} = 0\\ A_{\varphi\vartheta_1} &= A_{\varphi\vartheta_3} = 0\\ A_{\psi\vartheta_1} &= A_{\psi\vartheta_2} = 0\end{aligned}\right\}\ \text{vergl. Nr. 127 (2),}$$

$$\beta)\quad \left.\begin{aligned}2A_{\vartheta_1\vartheta_1} &= -R_{\varphi\psi} = A_{\varphi\varphi}A_{\psi\psi} - A_{\varphi\psi}^2\\ 2A_{\vartheta_2\vartheta_2} &= -R_{f\psi} = A_{ff}\,A_{\psi\psi} - A_{f\psi}^2\\ 2A_{\vartheta_3\vartheta_3} &= -R_{f\varphi} = A_{ff}\,A_{\varphi\varphi} - A_{f\varphi}^2\end{aligned}\right\}\ \text{vergl. Nr. 127 (1),}$$

$$\gamma)\quad \left.\begin{aligned}2A_{\vartheta_1\vartheta_2} &= -A_{\psi\psi}A_{f\varphi} + A_{\psi f}\,A_{\psi\varphi}\\ 2A_{\vartheta_1\vartheta_3} &= -A_{\varphi\varphi}\,A_{f\psi} + A_{\varphi f}\,A_{\varphi\psi}\\ 2A_{\vartheta_2\vartheta_3} &= -A_{ff}\,A_{\varphi\psi} + A_{f\varphi}\,A_{f\psi}\end{aligned}\right\}\ \text{vergl. Nr. 132 (III).}$$

2) Relationen zwischen der Combinante und den zweiten Ueberschiebungen:

$$\alpha)\quad R_{123} = A_{f\vartheta_1} = A_{\varphi\vartheta_2} = A_{\psi\vartheta_3},\ \text{vergl. Nr. 132 (I),}$$

$$\beta)\quad 2R_{123}^2 = \begin{vmatrix}A_{ff} & A_{f\varphi} & A_{f\psi}\\ A_{\varphi f} & A_{\varphi\varphi} & A_{\varphi\psi}\\ A_{\psi f} & A_{\psi\varphi} & A_{\psi\psi}\end{vmatrix}.$$

Diese Relation ist eine unmittelbare Folge der allgemeinen Relation (II) Nr. 49. Man erkennt auch, dass die rechten Seiten der Relationen β) und γ) in (1) nichts anderes als die Minoren dieser Determinante sind. Aus dieser Relation kann man noch zahlreiche andere ableiten, wie sie die Lehrsätze über adjungirte Determinanten

(vergl. Bd. I Nr. 87, 88) liefern; ich will hierauf indess nicht weite eingehen.

3) Relationen zwischen den Covarianten des Systems.

α) Die Relationen für die Functionaldeterminanten (f, ϑ_i), (φ, ϑ_i), (ψ, ϑ_i), $(\vartheta_i, \vartheta_k)$. Sie ergeben sich sofort aus der allgemeinen Formel Nr. 53 (III). Aus ihr erhält man beispielsweise:

$$\left.\begin{aligned} 2(f, \vartheta_1) &= -A_{f\varphi}\psi + A_{f\psi}\varphi \\ 2(f, \vartheta_2) &= -A_{f\psi}f + A_{ff}\psi \\ 2(f, \vartheta_3) &= -A_{ff}\varphi + A_{f\varphi}f \end{aligned}\right\} \text{vergl. auch Nr. 127 (3)}$$

und ebenso

$$\left.\begin{aligned} 2(\vartheta_2, \vartheta_1) &= -R_{123}\psi \\ 2(\vartheta_1, \vartheta_3) &= -R_{123}\varphi \\ 2(\vartheta_3, \vartheta_2) &= -R_{123}f \end{aligned}\right\} \text{vergl. Nr. 133 (IV)}.$$

β) Darstellung der Functionaldeterminanten ϑ_i durch gerade Formen:

$$\left.\begin{aligned} -2\vartheta_1^2 &= A_{\varphi\varphi}\psi^2 - 2A_{\varphi\psi}\varphi\psi + A_{\psi\psi}\varphi^2 \\ -2\vartheta_2^2 &= A_{ff}\psi^2 - 2A_{f\psi}f\psi + A_{\psi\psi}f^2 \\ -2\vartheta_3^2 &= A_{ff}\varphi^2 - 2A_{f\varphi}f\varphi + A_{\varphi\varphi}f^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{Nr. 48 (I)}.$$

γ) Allgemeine Relation für drei quadratische Formen:

$$\begin{vmatrix} A_{ff} & A_{f\varphi} & A_{f\psi} & f \\ A_{f\varphi} & A_{\varphi\varphi} & A_{\varphi\psi} & \varphi \\ A_{f\psi} & A_{\varphi\psi} & A_{\psi\psi} & \psi \\ f & \varphi & \psi & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} A_{\vartheta_1\vartheta_1} & A_{\vartheta_2\vartheta_1} & A_{\vartheta_3\vartheta_1} & \vartheta_1 \\ A_{\vartheta_1\vartheta_2} & A_{\vartheta_2\vartheta_2} & A_{\vartheta_3\vartheta_2} & \vartheta_2 \\ A_{\vartheta_1\vartheta_3} & A_{\vartheta_2\vartheta_3} & A_{\vartheta_3\vartheta_3} & \vartheta_3 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die beiden letzten Relationen gehen wieder unmittelbar aus der allgemeinen Formel (III) Nr. 50 hervor.

135. *Weitere Relationen zwischen den Formen des Systemes.* Bei der eingreifenden Bedeutung der Theorie quadratischer Formen für andere Untersuchungen will ich diese Tabelle noch durch einige weitere Relationen ergänzen, die wir im Folgenden ableiten wollen. Aus den Identitäten

$$\begin{aligned} \bar{a}_0 x_1^2 + 2\bar{a}_1 x_1 x_2 + \bar{a}_2 x_2^2 - f &= 0 \\ \bar{\alpha}_0 x_1^2 + 2\bar{\alpha}_1 x_1 x_2 + \bar{\alpha}_2 x_2^2 - \varphi &= 0 \\ \bar{r}_0 x_1^2 + 2\bar{r}_1 x_1 x_2 + \bar{r}_2 x_2^2 - \psi &= 0 \\ y_2^2 x_1^2 - 2y_1 y_2 x_1 x_2 + y_1^2 x_2^2 - (xy)^2 &= 0 \end{aligned}$$

eliminiren wir die vier Grössen x_1^2, $2x_1x_2$, x_2^2, -1 und erhalten die nothwendig verschwindende Determinante:

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & f \\ \bar{\alpha}_0 & \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 & \varphi \\ \bar{r}_0 & \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \psi \\ y_2^2 & -y_1 y_2 & y_1^2 & (xy)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ordnen wir sie nach der letzten Colonne, so erhalten wir

$$R\,(xy)^2 = (\bar{\alpha}_0\,\bar{r}_1\,y_1^2)\cdot f - (\bar{a}_0\,\bar{r}_1\,y_1^2)\cdot\varphi + (\bar{a}_0\,\bar{\alpha}_1\,y_1^2)\cdot\psi.$$

Nun ist aber:

$$(\bar{\alpha}_0\,\bar{r}_1\,y_1^2) = \begin{vmatrix} \bar{\alpha}_0 & \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 \\ \bar{r}_0 & \bar{r}_1 & \bar{r}_2 \\ y_1^2 & -y_1 y_2 & y_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 \\ r_1^2 & r_1 r_2 & r_2^2 \\ y_2^2 & -y_1\,y_2 & y_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_1 r_2 - \alpha_2 r_1)\,(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)\,(r_1 y_1 + r_2 y_2)$$

$$= (\alpha r)\,\alpha_y\,r_y = \vartheta_1\,(y).$$

Demnach besteht folgende Relation:

$$R\,(xy)^2 = f(x)\,\vartheta_1\,(y) + \varphi\,(x)\,\vartheta_2\,(y) + \psi\,(x)\,\vartheta_3\,(y) \tag{I}$$

oder auch, wenn wir x mit y vertauschen,

$$R\,(xy)^2 = f(y)\,\vartheta_1\,(x) + \varphi\,(y)\,\vartheta_2\,(x) + \psi\,(y)\,\vartheta_3\,(x). \tag{II}$$

Beide bilden wieder eine Quelle neuer Relationen. Für $y_i = x_i$ ergiebt sich aus beiden Gleichungen (I) und (II) die Relation:

$$f\vartheta_1 + \varphi\,\vartheta_2 + \psi\,\vartheta_3 = 0. \tag{III}$$

Ersetzen wir dagegen in (II) y_1 durch $-a_2\,(= -b_2)$, y_2 durch a_1 $(= -b_1)$ etc., so kommt:

$$\left.\begin{aligned} Rf &= A_{ff}\,\vartheta_1 + A_{f\varphi}\,\vartheta_2 + A_{f\psi}\,\vartheta_3 \\ R\varphi &= A_{f\varphi}\vartheta_1 + A_{\varphi\varphi}\,\vartheta_2 + A_{\varphi\psi}\vartheta_3 \\ R\psi &= A_{f\psi}\vartheta_1 + A_{\varphi\psi}\vartheta_2 + A_{\psi\psi}\vartheta_3 \end{aligned}\right\}. \tag{IV$_a$}$$

Ebenso findet man aus der Relation (I), indem man darin die Variable y durch die Coefficienten der Form ϑ_i ersetzt:

$$\left.\begin{aligned} R\,\vartheta_1 &= A_{\vartheta_1\vartheta_1} f + A_{\vartheta_1\vartheta_2}\,\varphi + A_{\vartheta_1\vartheta_3}\,\psi \\ R\,\vartheta_2 &= A_{\vartheta_2\vartheta_1} f + A_{\vartheta_2\vartheta_2}\,\varphi + A_{\vartheta_2\vartheta_3}\,\psi \\ R\,\vartheta_3 &= A_{\vartheta_3\vartheta_1} f + A_{\vartheta_3\vartheta_2}\,\varphi + A_{\vartheta_3\vartheta_3}\,\psi \end{aligned}\right\}. \tag{IV$_b$}$$

In derselben Weise, wie wir seinerzeit (Nr. 48) die Relation für $2\vartheta^2\,(x)$

ermittelt haben, können wir nun auch Relationen für $2\vartheta^2_{1x}\vartheta^2_{1y}$ etc. berechnen. Es ist nämlich:

$$\vartheta_1(x) = (\varphi,\ \psi) = \begin{vmatrix} \bar{\alpha}_0 & \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 \\ \bar{r}_0 & \bar{r}_1 & \bar{r}_2 \\ x_2^2 & -x_1 x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}$$

$$2\vartheta_1(y) = \begin{vmatrix} \bar{\alpha}_2 & -2\bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_0 \\ \bar{r}_2 & -2\bar{r}_1 & \bar{r}_0 \\ y_1^2 & 2y_1 y_2 & y_2^2 \end{vmatrix}.$$

Durch Multiplication beider Determinanten erhalten wir:

$$2\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(y) = \begin{vmatrix} A_{\varphi\varphi} & A_{\varphi\psi} & \varphi(x) \\ A_{\psi\varphi} & A_{\psi\psi} & \psi(x) \\ \varphi(y) & \psi(y) & (xy)^2 \end{vmatrix}. \tag{V}$$

Analoge Relationen hat man für $2\vartheta_2(x)\,\vartheta_2(y)$, $2\vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y)$. Rändern wir ferner die Determinante

$$R = (\bar{a}_0\,\bar{\alpha}_1\,\bar{r}_2)$$

einmal vertical mit Elementen 0 und horizontal mit x_1^2, $-x_1 x_2$, x_2^2, ein zweites Mal, nachdem wir in derselben Determinante die Colonnen gestürzt und die zweite Colonne mit -2 multiplicirt haben, vertical mit 0, horizontal mit y_1^2, $2y_1 y_2$, y_2^2 und bilden das Product der so erhaltenen zwei viergliedrigen Determinanten, so kommt als Resultat:

$$\begin{vmatrix} A_{ff} & A_{f\varphi} & A_{f\psi} & f(y) \\ A_{\varphi f} & A_{\varphi\varphi} & A_{\varphi\psi} & \varphi(y) \\ A_{\psi f} & A_{\psi\varphi} & A_{\psi\psi} & \psi(y) \\ f(x) & \varphi(x) & \psi(x) & (xy)^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{VI}$$

Rändern wir endlich die Determinante R durch zwei Saumreihen, nämlich einmal vertical durch die Doppelreihe 0 0, und horizontal durch die Zeilen

$$\begin{matrix} x_2^2 & -x_1 x_2 & x_1^2 & 0\ 0 \\ y_2^2 & -y_1 y_2 & y_1^2 & 0\ 0, \end{matrix}$$

ein zweites Mal, nachdem wir die Colonnen gestürzt und die zweite Colonne mit — 2 multiplicirt haben, vertical wieder durch die Doppelreihe 0 0, aber horizontal durch die Zeilen

$$\begin{matrix} x_1^2 & 2x_1 x_2 & x_2^2 & 0\ 0 \\ y_1^2 & 2y_1 y_2 & y_2^2 & 0\ 0, \end{matrix}$$

so entsteht durch Multiplication der beiden fünfgliederigen Determinanten die letzte Relation:

$$\begin{vmatrix} A_{ff} & A_{f\varphi} & A_{f\psi} & f(x) & f(y) \\ A_{\varphi f} & A_{\varphi\varphi} & A_{\varphi\psi} & \varphi(x) & \varphi(y) \\ A_{\psi f} & A_{\psi\varphi} & A_{\psi\psi} & \psi(x) & \psi(y) \\ f(x) & \varphi(x) & \psi(x) & 0 & (xy)^2 \\ f(y) & \varphi(y) & \psi(y) & (xy)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot \qquad \text{(VII)}$$

Damit mögen die Relationen, welche zwischen den Formen des Systemes stattfinden, ihren Abschluss finden. Wir werden in mannigfachen Untersuchungen von ihnen Gebrauch machen.

136. *Das simultane System von n quadratischen Formen.* Aus dem System der drei Formen f, φ und ψ lässt sich nun leicht das System beliebig vieler quadratischer Formen erschliessen. Bezeichnen wir die Formen mit f_i, so besteht dasselbe

1) aus den n Formen $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$ selbst,

2) aus den $\frac{n(n-1)}{2}$ Functionaldeterminanten $\vartheta_{ik} = (f_i, f_k)$,

3) aus den $\frac{n(n+1)}{2}$ Invarianten $A_{f_i f_k} = (f_i, f_k)^2$, *)

4) aus den $\frac{n\cdot(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ Combinanten $R_{ikm} = (f_i, (f_k, f_m))^2$ $= (f_k, (f_m, f_i))^2 = (f_m, (f_i, f_k))^2$. *)

Man könnte noch die Frage aufwerfen, ob nicht die Ueberschiebungen der Functionaldeterminanten zu neuen Formen führen, nämlich zweier solcher Functionaldeterminanten, welche zusammen vier verschiedene Grundformen enthalten, wie

$$((f_i, f_k), (f_\varrho, f_\sigma))^\lambda, \quad \lambda = 1, 2. \qquad \text{(I)}$$

Doch ist auch deren Reducibilität bereits nachgewiesen. Die erste Ueberschiebung ist nämlich reducibel, als Functionaldeterminante von Functionaldeterminanten, die zweite nach Nr. 132 (II). Das System besteht also in der That nur aus den oben angeführten Formen. Zwischen diesen bestehen natürlich wieder eine grosse Zahl von Relationen, welche den im Vorhergehenden aufgestellten entsprechen,

*) Legt man, wie Herr Study es gethan hat, bei der symbolischen Darstellung einer Form f nicht wie wir lineare Factoren zu Grunde, sondern quadratische, so lassen sich alle Invarianten von $f = a_x^{2n}$ darstellen durch simultane Invarianten dieser beiden Formengruppen vom Typus $(ab)^2$ und $(ab)(ac)(bc)$.

von denen ich hier nur diejenigen anführen will, die sich auf die unter (I) angegebenen Ueberschiebungen beziehen. Man hat:

1) $((f_i, f_k), (f_\varrho, f_\sigma))^0 = \vartheta_{ik} \cdot \vartheta_{\varrho\sigma}$

$= -\frac{1}{2}\left\{A_{i\varrho} f_k f_\sigma - A_{i\sigma} f_k f_\varrho + A_{k\sigma} f_i f_\varrho - A_{k\varrho} f_i f_\sigma\right\}$, Nr. 48 (II)

2) $((f_i, f_k), (f_\varrho, f_\sigma))^1 = (\vartheta_{ik}, \vartheta_{\varrho\sigma})$

$= \frac{1}{2}\left\{R_{i\varrho\sigma} f_k - R_{k\varrho\sigma} f_i\right\}$ Nr. 53 (III)

3) $((f_i, f_k), (f_\varrho, f_\sigma))^2 = (\vartheta_{ik}, \vartheta_{\varrho\sigma})^2$

$= \frac{1}{2}\left\{A_{i\varrho} A_{k\sigma} - A_{i\sigma} A_{k\varrho}\right\}.$ Nr. 132 (II)

4) $(A_{\varrho\varrho}, A_{kk}, A_{\sigma\sigma}, A_{ii}) = 0.$ Nr. 50.

§ 13. Specielle quadratische Formen.

137. *Conjugirte quadratische Formen.* Bei der Cayley'schen Methode der Auflösung einer Gleichung vierten Grades mit Hilfe der Invariantentheorie (vgl. Nr. 175) zeigen sich drei quadratische Formen φ, ψ, χ (die quadratischen Factoren der Covariante t), deren zweite Ueberschiebungen $A_{\varphi\psi}$, $A_{\varphi\chi}$, $A_{\psi\chi}$ identisch verschwinden. Wir wollen allgemein drei solche quadratische Formen f_0, f_1, f_2 conjugirt nennen, sobald ihre simultanen Invarianten $A_{f_0 f_1}$, $A_{f_0 f_2}$, $A_{f_1 f_2}$ identisch null sind. Das volle System dreier conjugirter quadratischer Formen enthält nicht mehr 13, sondern nur 7 selbständige Formen. Die Bedingung $A_{f_i f_k} = 0$ bewirkt nämlich, dass die Functionaldeterminanten $\vartheta_0 = (f_1, f_2)$, $\vartheta_1 = (f_0, f_2)$, $\vartheta_2 = (f_0, f_1)$ den Originalformen f_0, resp. f_1, f_2 proportional werden. Denn nach Formel Nr. 134, 3 (α) ist:

$$2(f_0, \vartheta_0) = -A_{f_0 f_1} \cdot f_2 + A_{f_0 f_2} \cdot f_1.$$

Da aber die beiden Invarianten rechts nach Voraussetzung verschwinden, so ist:

$$(f_0, \vartheta_0) = 0$$

und ebenso (f_1, ϑ_1), (f_2, ϑ_2). Das Verschwinden dieser Functionaldeterminanten lehrt aber nach Nr. 128, dass die beiden Formen, aus denen sie gebildet wurden, einander proportional sind. Man hat demnach

$$\vartheta_0 = c_0 \cdot f_0$$
$$\vartheta_1 = c_1 \cdot f_1$$
$$\vartheta_2 = c_2 \cdot f_2.$$

138. *Kanonische Form dreier conjugirter Formen.* Man kann sich fragen: Welchen algebraischen Ausdruck besitzen drei conjugirte

Formen, wenn man eine derselben in ihrer einfachsten kanonischen Form $f_0 = 2x_1 x_2$ zu Grunde legt? Zur Beantwortung dieser Frage nehmen wir an $f_1 = \alpha_x^2$ sei eine zu $f_0 = a_x^2$ conjugirte Form, dann muss, weil nach Voraussetzung

$$A_{f_0 f_1} = \bar{a}_0 \bar{\alpha}_2 - 2\bar{\alpha}_1 \bar{a}_1 + \bar{\alpha}_0 \bar{a}_2 = 0, \quad \bar{a}_0 = \bar{a}_2 = 0, \quad \bar{a}_1 = 1,$$

auch $\alpha_1 = 0$ sein, d. h. die betreffende Form f_1 muss dem Büschel angehören:

$$F = \bar{\alpha}_0 x_1^2 + \bar{\alpha}_2 x_2^2.$$

Sind nun f_1 und f_2 zwei Formen des Büschels F, die nicht nur zu f_0, sondern auch unter einander conjugirt sind, so müssen ausserdem noch deren Coefficienten der Bedingung genügen:

$$A_{f_1 f_2} = \bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_2' + \bar{\alpha}_0' \bar{\alpha}_2 = 0.$$

Hieraus ergiebt sich, dass die drei conjugirten Formen in diesem Falle die Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned} f_0 &= 2x_1 x_2 \\ f_1 &= \bar{\alpha}_0 x_1^2 + \bar{\alpha}_2 x_2^2 \\ f_2 &= (\bar{\alpha}_0 x_1^2 - \bar{\alpha}_2 x_2^2) \frac{\bar{\alpha}_0'}{\bar{\alpha}_0}. \end{aligned}$$

Anmerkung. Drei specielle Formen dieser Art erhalten wir, wenn wir hierin $\bar{\alpha}_2 = 1$ setzen und überdies $\bar{\alpha}_0$ und $\bar{\alpha}_0'$ so bestimmen, dass die Discriminanten $A_{f_1 f_1}$, $A_{f_2 f_2}$ denselben Werth -2 annehmen, den auch $A_{f_0 f_0}$ besitzt. Unter diesen Voraussetzungen wird

$$\bar{\alpha}_0 = -1, \quad \bar{\alpha}_0' = i$$

und somit werden diese drei speciellen Formen:

$$\begin{aligned} f_0 &= \quad 2x_1 x_2 \\ f_1 &= -(x_1^2 - x_2^2) \\ f_2 &= +i(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned}$$

Für diese drei Formen berechnen sich die Proportionalitätsconstanten in den am Schlusse von Nr. 137 erwähnten Gleichungen:

$$\vartheta_0 = c_0 f_0, \quad \vartheta_1 = c_1 f_1, \quad \vartheta_2 = c_2 f_2$$

sehr einfach. Denn gerade wegen dieser Beziehungen reducirt sich die allgemeine Relation Nr. 134 (2, α)

$$R_{012} = A_{f_0 \vartheta_0} = A_{f_1 \vartheta_1} = A_{f_2 \vartheta_2}$$

auf

$$R_{012} = c_0 A_{f_0 f_0} = c_1 A_{f_1 f_1} = c_2 A_{f_2 f_2},$$

oder, indem wir die Zahlencoefficienten einführen, auf

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & i \end{vmatrix} = -2c_0 = -2c_1 = -2c_3.$$

Daraus erhalten wir:

$$c_0 = c_1 = c_2 = \sqrt{-1} = i.$$

Das Product dieser drei quadratischen Formen ist eine Form sechsten Grades

$$t = \text{Const.}\ x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4),$$

welche Klein (vgl. Vorles. über das Ikosaeder § 10) Octaeder nennt. Man kann nämlich die Gauss'sche Zahlenebene so auf eine im Nullpunkt berührende Kugel projiciren, dass die sechs Wurzeln der Gleichung $t = 0$ gerade die Eckpunkte eines in die Kugel einbeschriebenen Octaeders werden. Wir werden auf das Octaeder noch später zu sprechen kommen (vgl. § 19).

139. *Die quadratischen Formen des Würfels.* Wir hatten uns in Nr. 138 die Aufgabe vorgelegt, quadratische Formen aufzustellen, deren zweite Ueberschiebungen $A_{f_i f_k}$ $(i \gtrless k)$ verschwinden. Die Frage kann man verallgemeinern: Lässt sich eine Gruppe von quadratischen Formen, die keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen, so bestimmen, dass ihre sämmtlichen zweiten Ueberschiebungen $A_{f_i f_k}$ $(i \gtrless k)$ einen festen Werth ϱ besitzen?

Zur Beantwortung wählen wir wiederum als eine der quadratischen Formen die Form

$$f_0 = 2x_1 x_2.$$

Wir wissen, dass ihre Discriminante den Werth -2 besitzt, und wollen annehmen, dass auch die übrigen Formen f_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ eine Normalform besitzen mögen, so dass ihre Discriminante

$$A_{f_i f_i} = -2$$

sei. Dann lautet die Frage: Welches sind unter diesen Voraussetzungen die Formen f_i, deren zweite Ueberschiebungen $A_{f_i f_k}$ $(i \gtrless k)$ sowohl unter einander als mit f_0 den festen Werth ϱ besitzen? Es mag von vornherein bemerkt sein, dass dieser Werth ϱ von ± 2 verschieden sein muss. Denn da die gesuchten Formen keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen sollen, so müssen die Resultanten

$$R_{f_i f_k} \lessgtr 0$$

sein. Nun ist aber nach Nr. 134 $(1, \beta)$

$$R_{f_i f_k} = \begin{vmatrix} A_{f_i f_k} & A_{f_i f_i} \\ A_{f_k f_k} & A_{f_i f_k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{f_i f_k} & -2 \\ -2 & A_{f_i f_k} \end{vmatrix}$$
$$= A^2_{f_i f_k} - 4 \gtrless 0.$$

d. h. $A_{f_j f_k}$ muss von ± 2 verschieden sein.

140. Sei nun $f_1 = x^2 + 2bx + c$, wobei wir noch der Einfachheit halber den Coefficienten von x^2 gleich 1 annahmen, eine erste Form von den verlangten Eigenschaften, und

$$f_2 = \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$$

eine zweite, dann müssen nach unseren Voraussetzungen die Beziehungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} A_{f_1 f_1} &= 2(c - b^2) = -2 \\ A_{f_0 f_1} &= \quad -2b \quad = \quad \varrho \\ A_{f_2 f_2} &= 2(\alpha\gamma - \beta^2) = -2 \\ A_{f_0 f_2} &= \quad -2\beta \quad = \quad \varrho \\ A_{f_1 f_2} &= \gamma + c\alpha - 2b\beta = \varrho \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Dies sind gerade fünf Gleichungen mit fünf Unbekannten. Aus den ersten beiden bestimmen sich die Coefficienten von f_1 linear; aus den drei letzten dagegen erhält man eine quadratische Gleichung für α oder γ, und erkennt somit, dass es ausser f_0 f_1 f_2 noch eine weitere Form f_3 giebt, so dass die fünf Invarianten

$$A_{f_0 f_1}, \quad A_{f_0 f_2}, \quad A_{f_0 f_3}, \quad A_{f_1 f_2}, \quad A_{f_1 f_3}$$

den Werth ϱ besitzen. Das gestellte Problem verlangt aber, dass auch $A_{f_2 f_3} = \varrho$ sei. Da jedoch die Coefficienten von f_2 und f_3 durch die obigen fünf Gleichungen schon völlig bestimmt sind, so kann diese Forderung nur mehr eine Bedingung für ϱ sein. Nehmen wir also an, ϱ sei eine positive Grösse und fragen uns, welchen numerischen Werth muss sie besitzen, damit allgemein

$$A_{f_i f_k} = \varrho$$

ist. Die Beantwortung der Frage liefert uns die Relation Nr. 136 (4), welche zwischen den zweiten Ueberschiebungen von vier Formen bestehen muss, und die wir allgemein in Nr. 50 abgeleitet haben. Dieselbe war:

$$\begin{vmatrix} (f, f)^2, & (f, \varphi)^2, & (f, \psi)^2, & (f, \chi)^2 \\ (\varphi, f)^2, & (\varphi, \varphi)^2, & (\varphi, \psi)^2, & (\varphi, \chi)^2 \\ (\psi, f)^2, & (\psi, \varphi)^2, & (\psi, \psi)^2, & (\psi, \chi)^2 \\ (\chi, f)^2, & (\chi, \varphi)^2, & (\chi, \psi)^2, & (\chi, \chi)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzen wir in ihr die Werthe $+\varrho$ und -2 der zweiten Ueberschiebungen ein, so kommt:

$$\begin{vmatrix} -2, & \varrho, & \varrho, & \varrho \\ \varrho, & -2, & \varrho, & \varrho \\ \varrho, & \varrho, & -2, & \varrho \\ \varrho, & \varrho, & \varrho, & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder, wenn man $-\frac{2}{\varrho} = \sigma$ setzt und geeignet reducirt:

$$(1-\sigma)^3 \begin{vmatrix} \sigma & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder endlich: $(1-\sigma)^3(\sigma+3) = 0$.

141. Der cubische Factor $(1-\sigma)^3 = 0$ liefert $\varrho = -2$ als Lösung; diese haben wir gerade ausgeschlossen. Es bleibt als einzige Lösung

$$\sigma = -3$$

also

$$\varrho = +\frac{2}{3}.$$

Unter Benutzung dieses Werthes gehen die fünf Coefficientenbedingungen (I) über in:

$$\begin{aligned} A_{f_1 f_1} &= \quad c - b^2 = -1 \\ A_{f_0 f_1} &= \quad -b = \frac{1}{3} \\ A_{f_2 f_2} &= \quad \alpha\gamma - \beta^2 = -1 \\ A_{f_0 f_2} &= \quad -\beta = \frac{1}{3} \\ A_{f_1 f_2} &= \gamma + c\alpha - 2b\beta = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Daraus folgt zunächst $b = -\frac{1}{3}$, $c = -\frac{8}{9}$, $\beta = -\frac{1}{3}$. Demnach erhält man für α und γ:

$$\left.\begin{aligned} \gamma - \frac{8}{9}\alpha &= +\frac{8}{9} \\ \alpha\gamma &= -\frac{8}{9} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II)}$$

Denken wir uns in f_2 die Constante γ in der Form $-\frac{8}{9}\gamma'$, dann gehen die Gleichungen (II) in die symmetrisch gebauten:

$$\begin{aligned} \gamma' + \alpha &= -1 \\ \alpha\gamma' &= \quad 1 \end{aligned}$$

über, woraus man erkennt, dass α und γ' die beiden dritten Wurzeln ε und ε^2 der Einheit sind. Die vier gesuchten Formen f sind demnach:

$$f_0 = 2x_1 x_2$$
$$f_1 = \quad x_1^2 - \frac{2}{3} x_1 x_2 - \frac{8}{9} x_2^2$$
$$f_2 = \varepsilon x_1^2 - \frac{2}{3} x_1 x_2 - \frac{8}{9} \varepsilon^2 x_2^2$$
$$f_3 = \varepsilon^2 x_1^2 - \frac{2}{3} x_1 x_2 - \frac{8}{9} \varepsilon x_2^2 .$$

Damit ist die Aufgabe gelöst, quadratische Formen f so zu bestimmen, dass ihre zweiten Ueberschiebungen A_{ik} durchwegs den Werth $+\varrho$ besitzen.

Anmerkung. Das Product der vier quadratischen Formen liefert eine Form achten Grades:

$$W = \text{Const. } xy\,(x^6 - 8x^3y^3 - 8y^6),$$

wenn wir der Einfachheit halber $\frac{2}{3} x_2 = y$, $x_1 = x$ setzen. Klein nennt diese Form (vgl. Vorles. über das Ikosaeder § 5 und 10) Würfel, da man wiederum die Gauss'sche Zahlenebene so auf eine im Nullpunkt derselben berührende Kugel projiciren kann, dass die acht Wurzeln von $W = 0$ auf der Kugel acht Punkte bestimmen, die gerade die acht Ecken eines der Kugel einbeschriebenen Würfels bilden. Ueber diese Form W vergleiche auch § 19.

142. *Relationen zwischen den vier Formen f_i.* Man erkennt direct, dass die Summe aller vier Formen identisch verschwindet; demnach hat man als erste Relation:

$$f_0 + f_1 + f_2 + f_3 = 0. \tag{1}$$

Aus ihr folgt, dass die Summe irgend zweier derselben bis auf das Vorzeichen gleich der Summe der beiden andern ist. Bezeichnen wir eine solche Summe mit φ_{ik}, so hat man:

$$\begin{aligned} \varphi_{01} &= -\varphi_{23} \\ \varphi_{02} &= -\varphi_{13} \\ \varphi_{03} &= -\varphi_{12}. \end{aligned} \tag{2}$$

Da also die sechs Summen zu je zweien der vier Formen f_i nur drei verschiedene absolute Werthe annehmen, so müssen sie sich als Wurzeln einer Gleichung sechsten Grades darstellen lassen, die sich durch die einfache Substitution

$$\varphi_{ik}^2 = z$$

auf eine cubische $\Phi = 0$ reduciren lässt.

Die drei Formen $\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03}$ sind drei conjugirte quadratische Formen; denn man hat:

$$\begin{aligned}(\varphi_{01}, \varphi_{02})^2 &= 0\\ (\varphi_{02}, \varphi_{03})^2 &= 0\\ (\varphi_{03}, \varphi_{01})^2 &= 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Dies ergiebt sich sofort durch Rechnung. So ist beispielsweise:

$$(\varphi_{01}, \varphi_{02})^2 = (f_0 + f_1, f_0 + f_2)^2 = A_{00} + A_{01} + A_{02} + A_{12}$$
$$= -2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0.$$

Es ist ferner bemerkenswerth, dass auch eine lineare Relation zwischen den Quadraten der vier Formen f_i existirt. Man verificirt nämlich sehr leicht durch Rechnung:

$$f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 0. \tag{4}$$

Anmerkung. 1. Wegen der Relationen (1) und (4) reducirt sich die Gleichung:

$$(\xi - f_0)(\xi - f_1)(\xi - f_2)(\xi - f_3) = 0$$

auf die drei Glieder:

$$\xi^4 + A\xi + B = 0.$$

Durch die Substitution

$$\xi = \eta \sqrt[3]{A}$$

geht sie über in die Gleichung

$$\eta^4 + \eta + c = 0, \tag{I}$$

eine Gleichung vierten Grades, die nur einen einzigen Parameter C besitzt. Sie hat eine cubische Resolvente, die oben erwähnte Gleichung $\Phi = 0$, die natürlich ebenfalls nur diesen einen Parameter C enthalten kann. Man könnte diesen Umstand benutzen — wenn man nicht aus praktischen Gründen davon absehen müsste — die allgemeine Gleichung vierten Grades aufzulösen. Zu dem Zwecke bringt man sie zunächst — was immer möglich ist — auf die Form (I), vergleicht die Parameter und löst nun die Gleichung (I) mit Hilfe der cubischen Resolvente, aus deren Wurzeln φ_{ik} sich leicht die Wurzeln f_i der vorgelegten Gleichung bestimmen lassen. (Vgl. auch § 19.)

Anmerkung. 2. Herr Brill hat im 20. Bande der Math. Annalen (Binäre Formen und Gleichung sechsten Grades) gleichfalls gezeigt: Man kann immer vier quadratische Formen so finden, dass zwischen ihnen sowohl als zwischen ihren Quadraten je eine lineare Relation besteht, also dass man, wenn $f_1\ f_2\ f_3\ f_4$ die vier quadratischen Formen, die Beziehungen hat:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0 \tag{1}$$
$$\alpha_1 f_1^2 + \alpha_2 f_2^2 + \alpha_3 f_3^2 + \alpha_4 f_4^2 = 0. \tag{2}$$

Er zeigt ferner, dass, wenn man irgend drei der vier Formen durch ihre drei Functionaldeterminanten ϑ_{ik} ersetzt, zwischen dieser und der vierten Form ebenfalls analoge Relationen bestehen. Da dies auf vier verschiedene Arten möglich ist, so haben folgende fünf Formenquadrupel

$$\begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_1 & \vartheta_{23} & \vartheta_{34} & \vartheta_{42} \\ \vartheta_{13} & f_2 & \vartheta_{34} & \vartheta_{41} \\ \vartheta_{12} & \vartheta_{24} & f_3 & \vartheta_{41} \\ \vartheta_{12} & \vartheta_{23} & \vartheta_{31} & f_4 \end{array}$$

die nämliche Eigenschaft, gleichzeitig durch Relationen von der Form (1), (2) aneinander gebunden zu sein. Ist also ein Quadrupel gefunden, so erhält man aus ihm stets vier andere. Hiebei kann man jedes der fünf Quadrupel in irgend einer Permutation zu Grunde legen, um auf dieselben vier andern zu gelangen. Man hat also $24 \cdot 5 = 120$ Operationen zur Verfügung, um von einem Quadrupel auf ein anderes der fünf zu gelangen, und insofern bilden die fünf Quadrupel eine Gruppe im Sinne der Gleichungstheorie.

142. *Die quadratischen Formen des Ikosaeders.* Indem wir der Invariante $A_{f_3f_4}$ die Bedingung auferlegten, dass auch sie in Uebereinstimmung mit den fünf übrigen den constanten Werth $+\rho$ besitzen möge, gelangten wir zu vier quadratischen Formen, die durch diese Bedingung völlig bestimmt waren. Es stand uns damals aber frei, für $A_{f_3f_4}$ den Werth $\pm\rho$ zu wählen, und wir wollen nun untersuchen, zu welchem Resultate die Wahl $A_{f_3f_4} = -\rho$ führt. In diesem Falle wird die Bedingung für den numerischen Werth von ρ dargestellt durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} -2, & \rho, & \rho, & \rho \\ \rho, & -2, & \rho, & \rho \\ \rho, & \rho, & -2, & -\rho \\ \rho, & \rho, & -\rho, & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Wir ersetzen in ihr wiederum $-\frac{2}{\rho}$ durch σ und erhalten alsdann

$$\begin{vmatrix} \sigma & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sigma & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \sigma & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \sigma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma-1, & 1-\sigma, & 0, & 0 \\ 1, & \sigma, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & (\sigma+1), & -(\sigma+1) \\ 1, & 1, & -1, & \sigma \end{vmatrix}$$

$$= (\sigma^2-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \sigma & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Der Factor $\sigma^2 - 1 = 0$ führt wiederum auf den Werth $\varrho = \pm 2$, den wir aus gleichen Gründen wie früher verwerfen müssen. Der andere Factor reducirt sich auf

$$(\sigma + 1)(\sigma - 1) - 4 = 0$$

oder

$$\sigma = \pm \sqrt{5}.$$

Die Wahl des Vorzeichens steht uns frei. Wir nehmen zunächst

$$\sigma = + \sqrt{5}$$

und erhalten alsdann

$$\varrho = \frac{-2}{\sqrt{5}}.$$

Die Coefficientenrelationen (I) in Nr. 140 gehen dann, wenn wir diesmal den noch willkürlichen Coefficienten von x^2 in f_1 gleich $\frac{2}{\sqrt{5}}$ wählen, anstatt ihn wie früher gleich 1 zu setzen, über in:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{5}} c - b^2 &= -1 \\ b &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \alpha\gamma - \beta^2 &= -1 \\ \beta &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \gamma + c\alpha - 2b\beta &= \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(III)}$$

Hieraus folgt zunächst:

$$b = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c = \frac{-2}{\sqrt{5}}.$$

Die übrigen Gleichungen gehen durch Substitution dieser Werthe über in:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \gamma - \frac{2}{\sqrt{5}} \alpha - \frac{2}{5} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

$$\alpha\gamma = \frac{-4}{5}.$$

Wenn wir hier wiederum, um die Gleichungen symmetrischer zu gestalten, in f_2 den Coefficienten α durch $\frac{2}{\sqrt{5}} \alpha'$ und den Coefficienten γ durch $\frac{-2}{\sqrt{5}} \gamma'$ ersetzen, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' + \gamma' &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ \alpha'\gamma' &= 1 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(IV)}$$

Nun sind bekanntlich die fünften Wurzeln der Einheit

$$\varepsilon = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad \varepsilon^3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \quad \varepsilon^4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\varepsilon^5 = 1.$$

Demnach kann man die Gleichungen (IV) auch in der Form schreiben

$$\begin{aligned} \alpha' + \gamma' &= \varepsilon + \varepsilon^4 \\ \alpha' \gamma' &= \varepsilon \cdot \varepsilon^4 \end{aligned} \qquad \text{(V)}$$

oder, wenn man auch in den Gleichungen (IV) der $\sqrt{5}$ das negative Zeichen giebt, was nach unseren Entwicklungen erlaubt ist,

$$\begin{aligned} \alpha' + \gamma' &= \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \\ \alpha' \gamma' &= \varepsilon^2 \cdot \varepsilon^3 . \end{aligned} \qquad \text{(VI)}$$

Die beiden Gleichungen (V) und (VI) aber lehren:

„Die Coefficienten α' und γ' der quadratischen Form f_2 sind je ein Paar ε^ν und ε^μ der fünften Einheitswurzeln, wenn man dieselben so auswählt, dass die Exponentensumme $\nu + \mu = 5$ ist.“

Es existiren demnach vier Formen f_2, welche die verlangten Eigenschaften besitzen. Wir erhalten also sechs quadratische Formen von der Beschaffenheit, dass ihre fünfzehn zweiten Ueberschiebungen $\Delta_{f_i f_k}$ $(i \gtrless k)$ bis auf das Vorzeichen übereinstimmen. Sie sind, wenn wir die Formen $f_1, \ldots f_5$ noch mit $\frac{\sqrt{5}}{2}$ multipliciren, dargestellt durch:

$$\begin{aligned}
f_0 &= 2x_1 x_2 \\
\frac{\sqrt{5}}{2} f_1 &= x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2 \\
\frac{\sqrt{5}}{2} f_2 &= \varepsilon x_1^2 + x_1 x_2 - \varepsilon^4 x_2^2 \\
\frac{\sqrt{5}}{2} f_3 &= \varepsilon^2 x_1^2 + x_1 x_2 - \varepsilon^3 x_2^2 \\
\frac{\sqrt{5}}{2} f_4 &= \varepsilon^3 x_1^2 + x_1 x_2 - \varepsilon^2 x_2^2 \\
\frac{\sqrt{5}}{2} f_5 &= \varepsilon^4 x_1^2 + x_1 x_2 - \varepsilon x_2^2 .
\end{aligned}$$

Anmerkung. Das Product dieser sechs quadratischen Formen bezeichnete Klein mit dem Namen „Ikosaeder“ (vergl. a. a. O.), aus den nämlichen Gründen, die ihn zu den Bezeichnungen „Oktaeder“ und „Würfel“ veranlassten. Die Gleichung des Ikosaeders ist demnach

$$x_1 x_2 (x^5 - (\varepsilon + \varepsilon^4)^5 x_2^5)(x^5 - (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)^5 x_2^5) = 0,$$

oder:

$$x_1 x_2 (x_1^{10} + 11\, x_1 x_2 - x_2^{10}) = 0.$$

Ich möchte noch darauf aufmerksam machen, dass auch zwischen den sechs quadratischen Formen specielle Relationen bestehen müssen, und zwar vier an der Zahl, da sie nur von den zwei Parametern x_1 und x_2 abhängen. In der That findet man leicht durch directe Rechnung, wenn man die erste Form f_0 noch mit $\frac{\sqrt{5}}{2}$ multiplicirt und nun $\frac{\sqrt{5}}{2} f_i$ mit ψ_i bezeichnet, die vier Identitäten:

$$\sum_{i=0}^{i=5} \psi_i^2 = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{i=5} \psi_i^4 = 0, \tag{2}$$

$$\sum_{i=0}^{i=5} \psi_i^6 = 0, \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{i=5} \psi_i^3 = \frac{(1+\sqrt{5})^3}{(1-\sqrt{5})^2\sqrt{5}} \left(\sum_1^5 \psi_i\right)^3. \tag{4}$$

Aus den ersten drei Relationen geht sofort hervor, dass die Gleichung

$$\prod_{i=0}^{i=5} (z - \psi_i^2) = 0$$

die Form haben wird

$$z^6 + a z^2 + b z + c = 0.$$

Durch die Transformation $z = \sqrt[4]{a} \cdot y$ geht sie über in die Form

$$y^6 + y^2 + b' y + c' = 0. \tag{5}$$

Aber auch diese beiden Constanten b' und c' sind noch von einander abhängig wegen der noch unbenutzten Relation (4). Sie sind beide Functionen ein und desselben Parameters λ, so dass also (5) eine Gleichung sechsten Grades mit einem **einzigen** Parameter darstellt. Wir werden später auf solche Gleichungen noch zu sprechen kommen. Nimmt man statt der sechs quadratischen Formen ihre ersten Polaren f_{i_y}, so bestehen immer noch vier analoge Identitäten, wie die oben angeführten. Aber die Gleichung sechsten Grades, welche die Quadrate dieser Formen zu Wurzeln hat, besitzt nunmehr **zwei** Parameter. Es ist dies dieselbe Gleichung sechsten Grades, welche Jacobi zwischen Thetaeihen im 2. Bd. des Crelle'schen Journals erhalten hat. Setzt man nämlich:

$$\Theta(q) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \cdots$$

und

$$\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}},$$

so wird

$$\Theta(\varepsilon^\varrho \cdot q) = 1 + 2\varepsilon^\varrho q + 2\varepsilon^{4\varrho} q^4 + 2\varepsilon^{4\varrho} q^9 + 2\varepsilon^\varrho q^{16} + 2q^{25} + \cdots,$$

oder.

$$\Theta(\varepsilon^\varrho q) = \varepsilon^\varrho A_0 + A_1 + \varepsilon^{4\varrho} A_2,$$

wobei

$$\begin{aligned} A_0 &= 2q + 2q^{16} + 2q^{36} + 2q^{81} + \cdots \\ A_1 &= 1 + 2q^{25} + 2q^{100} + 2q^{225} + \cdots \\ A_2 &= 2q^4 + 2q^9 + 2q^{49} + 2q^{64} + \cdots. \end{aligned}$$

Setzen wir aber $A_0 = x_1 y_1$, $A_1 = (x_1 y_2 + x_2 y_1)$, $A_2 = - x_2 y_2$, so haben wir:

$$\begin{aligned} \Theta(q) &= f_{1y} \\ \Theta(\varepsilon q) &= f_{2y} \\ \Theta(\varepsilon^2 q) &= f_{3y} \\ \Theta(\varepsilon^3 q) &= f_{4y} \\ \Theta(\varepsilon^4 q) &= f_{5y}, \end{aligned}$$

und überdies:

$$\Theta(q^{25}) = f_{0y}.$$

Es lassen sich also in der That diese sechs Thetareihen mit den Polaren der sechs quadratischen Formen $f_0, f_1, \ldots f_5$ identificiren.

§ 14. Die Form dritten Grades.

143. *Einleitende Bemerkungen.* Wir haben bereits in den Beispielen Nr. 37 und Nr. 39, welche den Ueberschiebungsprocess erläutern sollten, eine Reihe von Co- und Invarianten der Form dritten Grades kennen gelernt. Bezeichnet man die cubische Form mit

$$\begin{aligned} f &= \bar{a}_0 x_1^3 + 3\bar{a}_1 x_1 x_2 + 3\bar{a}_2 x_1 x_2^2 + \bar{a}_3 x_2^3 \\ &= a_x^3 = b_x^3 = c_x^5 = \text{etc.}, \end{aligned}$$

so haben die a. a. O. gebildeten Covarianten die symbolischen Producte

$$\begin{aligned} (f, f)^2 &= (ab)^2 a_x b_x = \varDelta \\ (\varDelta, \varDelta)^2 &= (ab)^2 (cd)^2 (ad)(bc) = A_{\varDelta\varDelta} = R \\ (f, \varDelta) &= (ab)^2 (ca) b_x c_x^2 = Q \end{aligned}$$

zum Repräsentanten. Schon damals bemerkten wir, dass mit diesen vier Formen

$$f, \varDelta, R, Q$$

das volle System von f abgeschlossen ist, d. h. dass alle übrigen Co- und Invarianten von f sich rational und ganz durch dieselben dar-

stellen lassen, und es ist unsere erste Aufgabe, diese Behauptung nachzuweisen. Da nun alle weiteren Co- und Invarianten nur durch Ueberschiebung der drei Covarianten f, Δ, Q entstehen können und somit durch symbolische Producte dargestellt sein müssen, die irgend welche der sechs Klammerfactoren

$$(ab),\ (a\Delta),\ (\Delta\Delta_1),\ (aQ),\ (\Delta Q),\ (QQ_1)$$

zu Factoren haben, so besteht unsere Aufgabe darin, den Nachweis zu liefern, dass jeder dieser sechs Klammerfactoren Reducent ist (vergl. Nr. 124), d. h. dass jedes symbolische Product, welches solche Klammerfactoren besitzt, entweder identisch verschwindet oder auf Producte mit Factoren f, Δ, R, Q reducirt werden kann. Indem ich nun diesen Beweis antrete, will ich nur den Beweis für die Reducenteneigenschaft des Klammerfactors (ab) nochmals in voller Ausführlichkeit entwickeln. Da der Gedankengang bei den folgenden Beweisen derselbe bleibt, so wird alsdann eine grössere Kürze gestattet sein.

144. *Der Factor (ab) ist Reducent.* Jedes symbolische Product P, das den Factor (ab) besitzt, muss in irgend welchen Verbindungen auch noch zwei weitere Symbole a und zwei Symbole b enthalten, wenn es eine wirkliche Covariante von f darstellen soll. Wir drücken dies am allgemeinsten aus, wenn wir sagen:

$$\pi = (ab)\, a_\xi\, a_x\, b_\eta\, b_y$$

muss ein Factor des zu untersuchenden Productes P sein, wobei ξ, x, η, y durch irgend welche Symbole ersetzt sein können. Dieses Theilproduct π kann als eine gemischte Polare der Form

$$\Pi = (ab)\, a_x^2\, b_y^2$$

angesehen werden und ist mit dieser gleichzeitig reducibel. Die Form Π ist aber ein Glied der zweiten Polare von

$$(f, f) = (ab)\, a_x^2\, b_x^2$$

und lässt sich somit darstellen durch diese Polare $(f, f)_{y^2}$ selbst plus Gliedern, welche den Factor $(ab)^2(xy)$ besitzen (vergl. Nr. 25). Π ist also reducibel, sobald $(f, f)_{y^2}$ und auch die Glieder mit dem Factor $(ab)^2(xy)$, oder was dasselbe ist, sobald (f, f) und $(ab)^2 a_x b_y$ reducibel sind. Der Term $(ab)^2 a_x b_y$ ist jedoch ein Glied der ersten Polare von

$$(f, f)^2 = (ab)^2\, a_x\, b_x$$

und lässt sich somit ersetzen durch diese plus Gliedern mit dem Factor $(ab)^3(xy)$. Die Reducibilität von Π ist also zurückgeführt auf die drei Bedingungen, dass (f, f), $(f, f)^2$, $(f, f)^3$ reducibel sind, d. h.

auf bekannte Formen führen. Es ist aber

$$(f, f) = 0, \quad (f, f)^2 = \Delta, \quad (f, f)^3 = 0,$$

und demnach ist π reducibel, und (ab) Reducent.

Anmerkung. Ich möchte noch bemerken, dass sich diese Darstellung der Reducibilität mit der in Nr. 124 gegebenen vollständig deckt. Wir belegten damals Klammerfactoren mit dem Namen Reducenten, sobald das Product, welches sie allein besass, sammt allen daraus durch Faltung entstehenden reducibel war. In der That sind wir hier zum gleichen Resultate gelangt, denn $(f, f)^2$ und $(f, f)^3$ entstehen aus (f, f) durch Faltung.

145. *Die Factoren* $(a\Delta)$ und $(\Delta\Delta_1)$ *sind Reducenten.* Die erste Ueberschiebung von f über Δ lieferte die Covariante Q; die zweite Ueberschiebung aber verschwindet identisch (vergl. auch Nr. 62, Beispiele). Denn ersetzt man in

$$\Delta_x^2 = (ab)^2 a_x b_x$$

x durch c, so kommt:

$$(c\Delta)^2 = (ab)^2 (ac)(bc),$$

und somit:

$$(f, \Delta)^2 = (c\Delta)^2 c_x = (ab)^2 (ac)(bc) c_x.$$

Vertauscht man rechts einmal c mit b, dann auch c mit a und addirt die drei so erhaltenen Ausdrücke für $(f, \Delta)^2$, so ergiebt sich:

$$(f, \Delta)^2 = \frac{1}{3}(ab)(ac)(bc)\{(ab)c_x - (ac)b_x + (bc)a_x\},$$

oder:

$$(f, \Delta)^2 = 0, \tag{I}$$

da der in der Klammer befindliche Ausdruck identisch verschwindet. Weitere Ueberschiebungen von f über Δ existiren nicht; $(f, \Delta) = Q$, $(f, \Delta)^2 = 0$, folglich ist $(a\Delta)$ Reducent.

Ebenso ist $(\Delta\Delta_1)$ Reducent, weil $(\Delta, \Delta) = 0$, $(\Delta, \Delta)^2 = A_{\Delta\Delta}$ ist.

146. *Der Factor* (aQ) *ist Reducent.* Nach den Entwicklungen in Nr. 144 haben wir nur den Werth der drei Ueberschiebungen:

$$(f, Q), \quad (f, Q)^2 \quad \text{und} \quad (f, Q)^3$$

zu untersuchen. Wir schlagen hiebei ganz den regulären Gang des Ueberschiebungsprocesses ein, indem wir zunächst die erste Polare von Q bilden. Es wird:

$$3 Q_x^2 Q_y = (c\Delta)\{c_x^2 \Delta_y + 2\Delta_x c_x c_y\} = G_1 + 2G_2. \tag{1}$$

Wir können den Ausdruck rechts vereinfachen. Die Differenz aus der Polare und einem ihrer Glieder, nämlich

$$3Q_x^2 Q_y - 3G_2 = (c\Delta)\{c_x^2 \Delta_y + 2\Delta_x c_x c_y\} - 3(c\Delta)\Delta_x c_x c_y,$$

hat den Factor $(c\Delta)^2(xy)$. Ein Product mit dem Factor $(c\Delta)^2$ ist aber identisch Null, da $(f, \Delta)^2 = 0$, und ein solches Product aus dieser Form durch Ueberschiebung entstanden gedacht werden kann. Folglich sind die beiden Glieder in (1) einander gleich, d. h. es ist:

$$(c\Delta)c_x^2\Delta_y = (c\Delta)\Delta_x c_y c_x$$

und demnach wird die Polare:

$$Q_x^2 Q_y = (c\Delta)c_x^2\Delta_y = (c\Delta)c_x c_y \Delta_x. \tag{2}$$

Hieraus folgt für $y_1 = -b_2$, $y_2 = b_1$:

$$(bQ)Q_x^2 b_x^2 = (c\Delta)(bc)c_x\Delta_x b_x^2,$$

oder, indem man b mit c vertauscht und beide Ausdrücke addirt:

$$(f, Q) = \frac{1}{2}(bc)c_x b_x \Delta_x((c\Delta)b_x - (b\Delta)c_x)$$

$$= -\frac{1}{2}(bc)^2 b_x c_x \Delta_x^2,$$

oder

$$(f, Q) = -\frac{1}{2}\Delta^2. \tag{I}$$

Bildet man ferner die erste Polare von Δ_x, so kommt:

$$\Delta_y\Delta_x = (ab)^2 a_x b_y. \tag{3}$$

Wir ersetzen hierin x durch Δ' und erhalten nach Multiplication mit Δ'_y:

$$(\Delta\Delta')\Delta_y\Delta'_y = (ab)^2(a\Delta')b_y\Delta'_y = (ab)^2(a\Delta)b_y\Delta_y.$$

Substituiren wir dagegen in (2) für x das Symbol b, so kommt:

$$(Qb)^2 Q_y b_y = (cb)^2(c\Delta)b_y\Delta_y.$$

Durch Comparation dieser beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$(Qb)^2 Q_y b_y = (\Delta\Delta')\Delta_y\Delta'_y.$$

Rechts steht die erste Ueberschiebung von Δ_y^2 über sich selbst, sie verschwindet identisch; also hat man:

$$(f, Q)^2 = 0. \tag{II}$$

Setzt man endlich in $Q = (c\Delta)c_x^2\Delta_x$ das Symbol b an die Stelle von x, so erhält man:

$$(Qb)^3 = (c\Delta)(cb)^2(\Delta b).$$

Dasselbe ergiebt sich, wenn man in $\Delta = (cb)^2 c_x b_x$ an Stelle von x das Symbol Δ substituirt, nämlich:

$$(\Delta, \Delta)^2 = (c\Delta)(cb)^2(b\Delta).$$

Durch Comparation ergiebt sich also:

$$(f, Q)^3 = -(Qb)^3 = (\Delta, \Delta)^2 = A_{\Delta\Delta}. \tag{III}$$

Die drei Ueberschiebungen von f über Q sind somit auf bekannte Formen reducibel und demnach ist (aQ) Reducent.

147. *Die Factoren* $(\varDelta Q)$ und $(Q Q')$ *sind Reducenten.* Der Nachweis, dass auch diese letzten Factoren Reducenten sind, lässt sich nun auf Grund der eben gewonnenen Beziehungen einfach führen. Da nach Nr. 146 (2):

$$Q_x^2 Q_y = (c\varDelta) c_x^2 \varDelta_y, \tag{1}$$

so hat man hieraus für $y_1 = -\varDelta_2$, $y_2 = +\varDelta_1$

$$\begin{aligned}(\varDelta Q) Q_x^2 \varDelta_x &= (c\varDelta)(\varDelta'\varDelta) c_x^2 \varDelta'_x \\ &= \frac{1}{2}(\varDelta'\varDelta) c_x^2 \{(c\varDelta)\varDelta'_x - (c\varDelta')\varDelta_x\} \\ &= +\frac{1}{2}(\varDelta'\varDelta)^2 \cdot c_x^3,\end{aligned}$$

oder

$$(\varDelta, Q) = \frac{1}{2} \cdot A_{\varDelta\varDelta} \cdot f. \tag{IV}$$

Setzt man in derselben Relation (1) statt x das Symbol $\varDelta (= \varDelta')$, so kommt:

$$(Q\varDelta)^2 Q_y = (c\varDelta)(c\varDelta')^2 \varDelta_y = 0,$$

da rechts der Reducent $(c\varDelta)^2$ auftritt (vergl. Nr. 145 und 146). Demnach ist:

$$(\varDelta, Q)^2 = 0 \tag{V}$$

und folglich ist $(\varDelta Q)$ Reducent.

Substituirt man endlich Q' in diese Relation (1) für die Variable x, und multiplicirt mit $Q'_y (= Q_y)$, so erhält man:

$$(QQ')^2 Q_y Q'_y = (c\varDelta)(cQ)^2 \varDelta_y Q_y.$$

Der symbolische Ausdruck rechts besitzt aber den Werth $\frac{1}{2} A_{\varDelta\varDelta} \cdot \varDelta$. Denn die erste Polare der verschwindenden Ueberschiebung $(f, Q)^2 = (aQ)^2 a_x Q_x$ ist:

$$(f, Q)_y^2 = (aQ)^2 \{a_x Q_y + Q_x a_y\} = 0;$$

andererntheils ist:

$$(aQ)^2 \{a_x Q_y - Q_x a_y\} = (aQ)^3 (xy).$$

Folglich erhält man durch Addition:

$$(aQ)^2 a_x Q_y = \frac{1}{2}(aQ)^3 (xy),$$

und wenn man hierin x durch $\varDelta$ ersetzt, und $(aQ)^3$ durch seinen Werth $A_{\varDelta\varDelta}$, so kommt endlich:

$$(a\varDelta)(aQ)^2 \varDelta_y Q_y = \frac{1}{2} A_{\varDelta\varDelta} \cdot \varDelta_y^2;$$

also ist in der That:

$$(Q, Q)^2 = \frac{1}{2} A_{\varDelta\varDelta} \cdot \varDelta. \tag{VI}$$

Weil aber auch aus bekannten Gründen $(Q, Q) = 0$ und $(Q, Q)^3 = 0$, so ist (Q, Q') Reducent.

Demnach sind alle überhaupt möglichen Klammerfactoren Reducenten, und es besteht somit der Satz:

> „Das volle System der Form dritten Grades f besteht aus den vier Formen f, $\varDelta$, $A_{\varDelta\varDelta}$, Q.“

148. *Tabelle der Ueberschiebungswerthe dieser vier Formen.* Ich will die in diesem Beweise gewonnenen Resultate noch einmal tabellarisch ordnen. Ist

$$f = a_x^3,$$

so hat man als symbolische Darstellungen der Grundformen des Systemes:

$$(f, f)^2 = \varDelta \quad = (ab)^2 a_x b_x$$

$$(\varDelta, \varDelta)^2 = A_{\varDelta\varDelta} = R \quad = (ab)^2 (cd)^2 (ad)(bc)$$

$$(f, \varDelta) = Q \quad = (c\varDelta) c_x^2 \varDelta_x = (ab)^2 (cb)\, c_x^2 a_x.$$

Als Ueberschiebungswerthe erhielten wir:

$$(f, f) = 0, \quad (f, f)^2 = \varDelta, \quad (f, f)^3 = 0 \tag{1}$$

$$(\varDelta, \varDelta) = 0, \quad (\varDelta, \varDelta)^2 = A_{\varDelta\varDelta} = R \tag{2}$$

$$(Q, Q) = 0, \quad (Q, Q)^2 = \frac{1}{2} A_{\varDelta\varDelta} \cdot \varDelta, \quad (Q, Q)^3 = 0 \tag{3}$$

$$(f, \varDelta) = Q, \quad (f, \varDelta)^2 = 0 \tag{4}$$

$$(\varDelta, Q) = \frac{1}{2} A_{\varDelta\varDelta} . f, \quad (\varDelta, Q)^2 = 0 \tag{5}$$

$$(f, Q) = -\frac{1}{2} \varDelta^2, \quad (f, Q)^2 = 0, \quad (f, Q)^3 = A_{\varDelta\varDelta}. \tag{6}$$

Unter den Covarianten des Systemes befindet sich eine schiefe Form, nämlich die Covariante Q. Ihr Quadrat muss sich durch die übrigen geraden Formen darstellen lassen. Um dies zu bewerkstelligen, berücksichtigen wir, dass sie Functionaldeterminante von f und $\varDelta$ ist. Indem wir die allgemeine Formel für Functionaldeterminanten benutzen (Nr. 48, I), gelangen wir zu der bereits von Cayley entdeckten Relation zwischen den vier Grundformen des Systemes:

$$2Q^2 = \begin{vmatrix} (f, f)^2, & (f, \varDelta)^2, & f \\ (f, \varDelta)^2, & (\varDelta, \varDelta)^2, & \varDelta \\ f, & \varDelta, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \varDelta, & 0, & f \\ 0, & R, & \varDelta \\ f, & \varDelta, & 0 \end{vmatrix}$$

oder:

$$2Q^2 + \varDelta^3 + Rf^2 = 0. \tag{1}$$

Wir werden bei Auflösung der Gleichung dritten Grades von dieser Relation Gebrauch machen.

149. *Das Formensystem von $Q+\lambda f$.* Wir sahen, dass die Form f eine Covariante gleichen Grades in den Variabeln besitzt, nämlich die Form Q und können uns demnach die Frage vorlegen: welchen Werth haben die Grundformen des Büschels

$$Q+\lambda f,$$

also die Formen

$$\varDelta_{Q+\lambda f},\ R_{Q+\lambda f},\ Q_{Q+\lambda f}.$$

Wir können zu diesem Zwecke den Weg directer Ueberschiebung oder auch den Aronhold'schen Process benutzen. Wir wollen hier den ersten einschlagen, und erhalten in einfacher Weise:

$$\varDelta_{Q+\lambda f} = (Q+\lambda f,\ Q+\lambda f)^2 = (Q,\ Q)^2 + 2\lambda(Q,f)^2 + \lambda^2(f,f)^2$$
$$= \frac{1}{2}R\cdot\varDelta + \lambda^2\varDelta = \left(\lambda^2+\frac{R}{2}\right)\varDelta \qquad (1)$$

$$R_{Q+\lambda f} = \left(\left(\lambda^2+\frac{R}{2}\right)\varDelta,\ \left(\lambda^2+\frac{R}{2}\right)\varDelta\right)^2 = \left(\lambda^2+\frac{R}{2}\right)^2(\varDelta,\ \varDelta)^2$$
$$= \left(\lambda^2+\frac{R}{2}\right)^2 R \qquad (2)$$

$$Q_{Q+\lambda f} = \left(Q+\lambda f,\ \left(\lambda^2+\frac{R}{2}\right)\varDelta\right) = \left(\lambda^2+\frac{R}{2}\right)\left\{(Q,\varDelta)+\lambda(f,\varDelta)\right\}$$
$$= \left(\lambda^2+\frac{R}{2}\right)\left\{-\frac{R}{2}f+\lambda Q\right\}\cdot \qquad (3)$$

150. *Beispiele zur Uebung.* Wir hatten zur Berechnung der Tabelle in Nr. 148 lediglich den Ueberschiebungsprocess benutzt. Der Umstand, dass f eine Covariante Q besitzt, die gleichfalls dritten Grades in den Variabeln ist, legt den Gedanken nahe, mit Hilfe des verwandten Aronhold'schen Processes solche Ueberschiebungen in vielleicht einfacherer Weise zu ermitteln. In der That können wir, indem wir eine beliebige Ueberschiebung von bekanntem Werthe deltairen, auch Werthe von andern Ueberschiebungen berechnen. Ich erinnere zunächst daran, dass wir in Nr. 63, unter der Voraussetzung

$$\delta f = Q, \qquad (I)$$

folgende Beziehungen erhielten:

$$\delta Q = -\frac{1}{2}Rf,\quad \delta\varDelta = 0,\quad \delta R = 0. \qquad (II)$$

Deltairen wir nun die beiden Relationen

$$(f,\ \varDelta)^2 = 0$$
$$(f,\ Q)^2 = 0,$$

so erhalten wir:

$$\delta(f,\ \varDelta)^2 = (\delta f,\ \varDelta)^2 + (f,\ \delta\varDelta)^2 = 0, \qquad (1)$$

also wegen den Beziehungen (I) und (II)

$$(Q, \Delta)^2 = 0$$

$$\delta(f, Q)^2 = (\delta f, Q)^2 + (f, \delta Q)^2 = 0, \tag{2}$$

oder:

$$(Q, Q)^2 + (f, -\tfrac{1}{2} R \cdot f)^2 = 0,$$

oder:

$$(Q, Q)^2 = \frac{R}{2} \cdot \Delta.$$

Man erkennt, wie auf diesem Wege oft in sehr einfacher Weise Ueberschiebungen berechnet werden können. Wir werden bei Gelegenheit der Theorie biquadratischer Formen noch ausgiebiger von dieser Methode Gebrauch machen.

151. *Erste Anwendung: Die Discriminante der Form f.* Bekanntlich ist die Discriminante einer Form darstellbar als Resultante der gleich null gesetzten ersten Differentialquotienten dieser Form. (Vergl. Bd. I, Nr. 173 und 178.) In unserm Falle hier sind die beiden ersten Differentialquotienten von $f = a_x^3 = b_x^3$ zwei quadratische Formen

$$f_1 = a_1 a_x^2$$

$$f_2 = b_2 b_x^2,$$

und die Resultante derselben ist nach Nr. 129 gleich der Discriminante ihrer Functionaldeterminante ϑ, nämlich:

$$2 A_{\vartheta\vartheta} = - R_{f_1 f_2}. \tag{1}$$

Nun ist die Functionaldeterminante von f_1 und f_2 dargestellt durch

$$\vartheta = (ab)\, a_x b_x a_1 b_2,$$

oder, wenn man a mit b vertauscht:

$$\vartheta = -(ab)\, a_x b_x b_2 a_1,$$

folglich:

$$2\vartheta = (ab)^2 a_x b_x = \Delta,$$

d. h.: „Die Discriminante der Form f ist also bis auf einen Zahlenfactor gleich der Discriminante von Δ."

Man hat:

$$A_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{4} A_{\Delta\Delta},$$

also wegen Relation (1)

$$-\frac{1}{2} A_{\Delta\Delta} = R_{f_1 f_2}.$$

Verschwindet die Discriminante von f, dann hat also sowohl f als Δ zwei gleiche Wurzeln. Wir werden sofort sehen, dass in diesem Falle Δ ein rationaler Factor von f ist, und dass die Form Q den

Doppelfactor der beiden Formen f und Δ dreifach enthält, also ein reiner Cubus ist.

152. *Zweite Anwendung: Auflösung der cubischen Gleichung.* Die Methoden, eine Gleichung dritten Grades aufzulösen, werden naturgemäss zunächst darauf gerichtet sein, sie auf eine reine cubische Gleichung, deren Wurzeln uns ja bekannt sind, zurückzuführen. Hiezu bieten uns die vorausgegangenen Entwicklungen zwei Relationen, einmal die Cayley'sche Identität

$$2Q^2 + \Delta^3 + Rf^2 = 0, \tag{1}$$

dann aber auch die Relation

$$\Delta_{Q+\lambda f} = \left(\frac{R}{2} + \lambda^2\right) \cdot \Delta. \tag{2}$$

Wir gehen zunächst von der zweiten Gleichung aus. Sobald nämlich die Hesse'sche Form $\Delta_{Q+\lambda f}$ von $Q + \lambda f$ identisch verschwindet, ist nach Nr. 55 die Form $Q + \lambda f$ ein reiner Cubus. Dies tritt also immer ein, sobald

$$\frac{R}{2} + \lambda^2 = 0, \tag{3}$$

und damit haben wir eine quadratische Resolvente der cubischen Form. Setzen wir ihre beiden Wurzeln:

$$+\sqrt{-\frac{R}{2}} = \lambda_1$$

$$-\sqrt{-\frac{R}{2}} = \lambda_2,$$

so sind die beiden Formen:

$$Q + \lambda_1 f, \quad Q + \lambda_2 f$$

die dritten Potenzen zweier linearer Formen, die wir mit α_x resp. β_x bezeichnen wollen. Für jene Werthe von x aber, welche das Verschwinden von f bewirken, besteht wegen

$$\left.\begin{aligned} Q + \lambda_1 f &= \alpha_x^3 \\ Q + \lambda_2 f &= \beta_x^3 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

die Beziehung

$$\alpha_x^3 = \beta_x^3,$$

d. h.: „Die drei Wurzeln von f bestimmen sich beziehungsweise aus den drei Gleichungen

$$\alpha_x - \beta_x = 0$$

$$\alpha_x - \varepsilon\beta_x = 0$$

$$\alpha_x - \varepsilon^2\beta_x = 0.\text{“}$$

Demnach lässt sich f bis auf eine Constante als Product folgender drei linearer Factoren schreiben:

$$f = c \cdot \left\{ \sqrt[3]{Q + \sqrt{-\frac{R}{2}} \cdot f} - \sqrt[3]{Q - \sqrt{-\frac{R}{2}} \cdot f} \right\} \times$$
$$\left\{ \sqrt[3]{Q + \sqrt{-\frac{R}{2}} \cdot f} - \varepsilon \sqrt[3]{Q - \sqrt{-\frac{R}{2}} \cdot f} \right\} \times \qquad (5)$$
$$\left\{ \sqrt[3]{Q + \sqrt{-\frac{R}{2}} \cdot f} - \varepsilon^2 \sqrt[3]{Q - \sqrt{-\frac{R}{2}} \cdot f} \right\}.$$

Es ist hiebei nicht nöthig, direct die dritte Wurzel aus $Q \pm \sqrt{-\frac{R}{2}} \cdot f$ auszuziehen; vielmehr braucht man nur die erste Polare zu bilden

$$Q_x^2 Q_y + \lambda_1 f_x^2 f_y = \alpha_x^2 \alpha_y$$
$$Q_x^2 Q_y + \lambda_2 f_x^2 f_y = \beta_x^2 \beta_y$$

und nun etwa $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ zu setzen. Die sich so ergebenden Werthe α_y und β_y sind bis auf Constante gleich den dritten Wurzeln aus dem vollständigen Cubus $Q + \lambda_i f$.

153. Wir können nun aber auch die Cayley'sche Relation zur Auflösung der Gleichung dritten Grades benutzen, welche uns zugleich auch Aufschluss über die Bedeutung der beiden linearen Formen α_x und β_x giebt, auf die wir im Vorausgehenden geführt wurden. Wir schreiben zu dem Zwecke die Relation (I) Nr. 148 in der Form:

$$\varDelta^3 = -\{2Q^2 + Rf^2\},$$

oder auch

$$\varDelta^3 = -2\left\{Q + f\sqrt{-\frac{R}{2}}\right\}\left\{Q - f\sqrt{-\frac{R}{2}}\right\}.$$

Auf der linken Seite befindet sich nun ein reiner Cubus, und rechts das Product zweier Formen dritten Grades, welche, da im allgemeinen f und Q keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen werden, ebenfalls keinen Theiler haben. Demnach muss jeder Factor rechts einzeln ein voller Cubus sein, etwa:

$$\frac{1}{2}\left\{Q + f\sqrt{-\frac{R}{2}}\right\} = \alpha_x^3$$
$$\frac{1}{2}\left\{Q - f\sqrt{-\frac{R}{2}}\right\} = \beta_x^3,$$

wo nun α_x und β_x bis auf den Factor $\frac{1}{2}$ mit den in Nr. 152 gleich bezeichneten linearen Factoren übereinstimmen. Wir haben demnach

$$\varDelta^3 = -8\,\alpha_x^3 \beta_x^3,$$

oder

$$\varDelta = -2\,\alpha_x \beta_x. \qquad (1)$$

Hiebei ist rechts noch eine der dritten Einheitswurzeln als Factor zu denken.

Wenn wir nun die Form f so transformiren, dass an Stelle der Variabeln x_1 und x_2 die Linearfactoren von Δ eintreten, so geht $f = 0$ in eine reine cubische Gleichung über. Es ist nämlich nach Nr. 148:

$$(f, \Delta)^2 = a_x(a\alpha)(a\beta) = 0,$$

d. h.: „Jedes symbolische Product mit dem Factor $(a\alpha)(a\beta)$ hat den Werth null.“ Erhebt man daher die Identität

$$a_x(\alpha\beta) = \alpha_x(a\beta) - \beta_x(a\alpha)$$

auf die dritte Potenz, so ergiebt sich:

$$a_x^3(\alpha\beta)^3 = \alpha_x^3(a\beta)^3 - \beta_x^3(a\alpha)^3 = c \cdot f. \tag{2}$$

Die Form f ist also unter Zugrundelegung der Linearfactoren von Δ in eine reine cubische Form transformirt, und man erkennt zugleich, dass es hiebei wegen der überall auftretenden dritten Potenzen gleichgiltig ist, welche dritte Einheitswurzel wir der rechten Seite der Gleichung (1) als Factor geben.

Zur Auflösung der cubischen Gleichung:

$$f = ax_1^3 + 3bx_1x_2^2 + 3cx_1x_2^2 + dx_2^3 = 0$$

hat man demnach folgenden Weg einzuschlagen.

Man bilde zunächst die Hesse'sche Form von f

$$\frac{1}{2}\Delta = (ac - b^2)x_1^2 + (ad - bc)x_1x_2 + (bd - c^2)x_2^2$$

und suche die beiden Wurzeln derselben:

$$\frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{(bc - ad) \pm \sqrt{(ad - bc)^2 - 4(bd - c^2)(ac - b^2)}}{2(ac - b^2)}.$$

Es ist alsdann:

$$\frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{\mu_1}(x_1\mu_1 - x_2\lambda_1)(x_1\mu_2 - x_2\lambda_2).$$

Mit Hilfe der Transformation

$$\begin{aligned} y_1 &= \mu_1 x_1 - \lambda_1 x_2 = \alpha_x \\ y_2 &= \mu_2 x_1 - \lambda_2 x_2 = \beta_x \end{aligned}$$

geht f in die Form über

$$F = Ay_1^3 + Dy_2^3 = 0,$$

die nun durch Ausziehen der dritten Wurzel gelöst werden kann.

154. *Schlussbemerkungen.* Sind die Coefficienten von f reell und ist $R = A_{\Delta\Delta}$ negativ, so besitzt f eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln. Dies erkennt man direct aus der Darstellung (5) der Form f in Nr. 152.

Ist $R = 0$, so besitzt f zwei gleiche Wurzeln und ebenso $\varDelta$. In diesem Falle ist natürlich die in Nr. 153 gegebene Transformation von f unmöglich. Die Hesse'sche Form ist dann, wie schon früher erwähnt, Factor von f. Denn da in jedem Falle nach Nr. 152 (4)

$$Q + \sqrt{-\frac{R}{2}}\, f = \alpha_x^3$$

$$Q - \sqrt{-\frac{R}{2}}\, f = \beta_x^3,$$

so ist demnach:

$$2f \cdot \sqrt{-\frac{R}{2}} = \alpha_x^3 - \beta_x^3 = (\alpha_x - \beta_x) \cdot (\alpha_x - \varepsilon \beta_x) \cdot (\alpha_x - \varepsilon^2 \beta_x)$$

$$2Q = \alpha_x^3 + \beta_x^3$$

$$\varDelta = \varrho \cdot \alpha_x \beta_x,$$

wo ϱ eine Constante.

Ist nun $R = 0$, also $\alpha_x = \beta_x$, so wird

$$Q = \alpha_x^3$$

$$\varDelta = \varrho \alpha_x^2.$$

Es ist aber

$$(f, \varDelta) = Q,$$

oder:

$$\varrho (a \alpha) a_x^2 \alpha_x = \alpha_x^3,$$

also nach Division mit dem linearen Factor α_x:

$$\varrho (a \alpha) a_x^2 = \alpha_x^2.$$

Daraus schliesst man, dass α_x der Doppelfactor von f. [Vergl. Nr. 99, (3).] Ueberdies sieht man, dass, im Falle $R = 0$, Q die dritte Potenz des Doppelfactors von f ist.

Ist endlich $\varDelta$ selbst identisch null, so ist nach Nr. 55 die Form f der Cubus einer linearen Form.

§ 15. Das Formensystem der Form vierten Grades.

155. *Die fundamentalen In- und Covarianten.* Wie bei den Formen dritten Grades, so liefern auch hier die Ueberschiebungen von f über sich selbst und über ihre Hesse'sche Covariante das vollständige System der Form vierten Grades, d. h. die Gesammtheit jener Formen, durch welche sich alle übrigen Co- und Invarianten ganz und rational ausdrücken lassen. Wir haben diese Ueberschiebungen $(f, f)^\lambda$, $(f, \varDelta)^\lambda$ bereits früher, insbesondere auch in § 8 unter den Anwendungen des Processes der Reihenentwicklung, kennen gelernt, und wollen nur noch einmal die dort gewonnenen Resultate zusammenfassen.

Bezeichnen wir mit

$$f = \bar{a}_0 x_1^4 + 4\bar{a}_1 x_1^3 x_2 + 6\bar{a}_2 x_1^2 x_2^2 + 4\bar{a}_3 x_1 x_2^3 + \bar{a}_4 x_2^4$$
$$= a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 = \dots \text{ etc.}$$

die gegebene Form vierten Grades, so sind die erwähnten Formen durch folgende symbolische Producte dargestellt:

$$(f,\ f)^2 = (ab)^2 a_x^2 b_x^2 = \varDelta$$
$$(f,\ f)^4 = (ab)^4 \qquad = i\ ^*)$$
$$(f, \varDelta) \ = (a\varDelta) a_x^3 \varDelta_x^3 = (ab)^2 (cb) c_x^3 a_x^2 b_x = t$$
$$(f, \varDelta)^4 = (a\varDelta)^4 \qquad = (ab)^2 (bc)^2 (ca)^2 = j\ ^*).$$

Diese fünf Formen:

$$f,\ \varDelta,\ t,\ i,\ j$$

bilden, wie schon erwähnt, das vollständige System der Form f, und mit dem Beweise dieser Behauptung wollen wir uns nun im Folgenden beschäftigen.

156. *Gedankengang des Beweises.* Irgend eine Co- oder Invariante von f kann nur durch Ueberschiebung der Formen f, $\varDelta$, t über sich selbst oder über einander entstehen. Legen wir hiebei t in der Form $(a\varDelta) a_x^3 \varDelta_x^3$ zu Grunde, so enthält jedes symbolische Product, das bei diesem Ueberschiebungsprocess entsteht, nur Symbole a und $\varDelta$, und zwar ausser in Factoren erster Art a_x, $\varDelta_x$ nur in den drei allein möglichen Klammerfactoren:

$$(ab),\ (a\varDelta),\ (\varDelta\varDelta_1).$$

Gelingt es uns also zu zeigen, dass alle Formen, welche einen dieser drei Klammerfactoren enthalten, reducibel sind, vergl. Nr. 124, so ist damit auch bewiesen, dass ausser den erwähnten fünf Formen keine weitern existiren können, die sich nicht rational und ganz durch die gegebenen f, $\varDelta$, t, i, j ausdrücken lassen.

Wir werden demnach zuerst die zunächst liegenden einfachen Ueberschiebungen von f über $\varDelta$, und $\varDelta$ über $\varDelta$ berechnen, wobei

---

*) Es ist:

$$i = (ab)^4 = a_1^4 b_2^4 - 4a_1^3 a_2 \cdot b_2^3 b_1 + 6a_1^2 a_2^2 b_1^2 b_2^2 - \cdots \text{ etc.} =$$
$$= 2(\bar{a}_0 \bar{a}_4 - 4\bar{a}_1 \bar{a}_3 + 3\bar{a}_2^2),$$

$$j = (ab)^2 (bc)^2 (ca)^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_2^2 \\ b_1^2 & b_1 b_2 & b_2^2 \\ c_1^2 & c_1 c_2 & c_2^2 \end{vmatrix}^2 = 6 \begin{vmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 \end{vmatrix}$$

$$= 6(\bar{a}_0 \bar{a}_2 \bar{a}_4 - \bar{a}_0 \bar{a}_3^2 - \bar{a}_1^2 \bar{a}_4 - \bar{a}_2^3 + 2\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3) \text{ (vergl. Bd. I, Nr. 40).}$$

sich als erstes Resultat ergiebt, dass sich die so entstehenden Formen in der That durch die fünf Grundformen rational und ganz ausdrücken lassen.

Sodann zeigen wir auf Grund dieser Thatsache, dass die Klammerfactoren

$$(ab),\ (a\Delta)^2,\ (a\Delta)(b\Delta),\ (\Delta\Delta_1)$$

Reducenten sind, und daraus ergiebt sich alsdann, dass jedes durch Ueberschiebung von f, Δ und t entstehende Product reducibel ist.

Die obenerwähnten Klammerfactoren (ab) und $(\Delta\Delta_1)$ sind unter diesen Reducenten, und was symbolische Producte mit dem Factor $(a\Delta)$ betrifft, so haben sie entweder diesen ganz allein und dann nothwendig auch noch die Factoren $a_x^3 \cdot \Delta_x^3$, d. h. sie besitzen t als Factor; oder sie haben als nächst einfachsten Fall die Factoren $(a\Delta)^2$, resp. $(a\Delta)(b\Delta)$, und von diesen wollen wir ja gerade beweisen, dass sie Reducenteneigenschaft besitzen.

157. *Die Ueberschiebungen* $(f, \Delta)^\lambda$, $(\Delta, \Delta)^\lambda$. Den ersten Theil des Beweises haben wir bereits in früheren Untersuchungen zum grössten Theil erledigt, oder können ihn wenigstens auf Grund der dort gewonnenen Resultate rasch zum Ziele führen.

Die Ueberschiebungen (f, Δ), $(f, \Delta)^4$ haben wir in das System aufgenommen, und (Δ, Δ), $(\Delta, \Delta)^3$ verschwinden identisch; die Formen $(f, \Delta)^2$, $(f, \Delta)^3$ wurden in § 8 berechnet als erste Anwendung des Processes der Reihenentwicklung, wobei wir die Werthe

$$(f, \Delta)^2 = \frac{i}{6} \cdot f$$

$$(f, \Delta)^3 = 0$$

erhielten. Es erübrigt also nur noch die Berechnung von

$$(\Delta, \Delta)^2 \text{ und } (\Delta, \Delta)^4.$$

158. *Berechnung von* $(\Delta, \Delta)^2$. Die Ueberschiebung $(\Delta, \Delta)^2$ geht aus der zweiten Polare Δ_{y^2} hervor, wenn wir darin y durch Δ_1 ersetzen, und mit Δ_{1x}^2 multipliciren. Diese zweite Polare ist aber das erste Glied in der Reihenentwicklung der Form

$$(ab)\, a_x^3 b_y^3 = \frac{3}{2}\, \Delta_{y^2}(xy) + \frac{1}{4}\, i\, (xy)^3.$$

Daher ist:

$$(ab)(b\Delta)^3 a_x^3 \Delta_x = \frac{3}{2}\, (\Delta, \Delta)^2 + \frac{1}{4}\, i \cdot \Delta. \tag{1}$$

Hiebei entsteht das symbolische Product links, wenn wir in $(b\Delta)^3 b_y \Delta_x$, y durch a ersetzen und mit a_x^3 multipliciren. Entwickeln

wir aber diese Form nach Reihe (VIII) § 7, so kommt:

$$(b\Delta)^3 b_y \Delta_x = [(b\Delta)^3 b_x \Delta_x]_y + \frac{1}{2}(b\Delta)^4 (yx),$$

oder weil:

$$(b\Delta)^3 b_x \Delta_x = (f, \Delta)^3 = 0$$
$$(b\Delta)^4 \qquad = (f, \Delta)^4 = j,$$

so ergiebt sich nach Ausführung der erwähnten Substitution

$$(ab)(b\Delta)^3 \Delta_x a_x^3 = \frac{1}{2} j \cdot f, \tag{2}$$

und demnach durch Comparation von (1) und (2)

$$(\Delta, \Delta)^2 = \frac{1}{8} \cdot j \cdot f - \frac{i}{6} \Delta. \tag{3}$$

159. *Berechnung von* $(\Delta, \Delta)^4$. Der Werth dieser Invariante wird am einfachsten erhalten, wenn wir in der Ueberschiebung

$$(f, \Delta)^2 = \frac{i}{6} \cdot a_x^4 = (a\Delta)^2 a_x^2 \Delta_x^2$$

x durch b, und gleichzeitig in der Identität

$$\Delta_x^4 = (ab)^2 a_x^2 b_x^2$$

x durch Δ ersetzen. Wir erhalten alsdann:

$$\frac{i}{6} \cdot i = (a\Delta)^2 (ab)^2 (\Delta b)^2$$
$$(\Delta, \Delta)^4 = (ab)^2 (a\Delta)^2 (b\Delta)^2,$$

und demnach durch Comparation:

$$(\Delta, \Delta)^4 = \frac{i^2}{6}. \tag{4}$$

Hiemit ist der erste Theil unserer Aufgabe erledigt. Es zeigte sich, dass in der That die Ueberschiebungen $(f, \Delta)^\lambda$ und $(\Delta, \Delta)^\lambda$ keine neuen Formen erzeugen. Im zweiten Theile haben wir nunmehr nachzuweisen, dass

$$(ab), \quad (a\Delta)^2, \quad (\Delta\Delta_1), \quad (a\Delta)(b\Delta)$$

Reducenten sind.

160. *Die Reducenten.* Auf Grund der nunmehr berechneten Ueberschiebungswerthe ist nicht schwer nachzuweisen, dass zunächst (ab), $(a\Delta)^2$, $(\Delta\Delta_1)$ Reducenteneigenschaft besitzen. Denn entwickelt man die entsprechenden einfachsten symbolischen Producte

$$(ab) a_x^3 b_y^3, \quad (a\Delta)^2 a_x^2 \Delta_y^2, \quad (\Delta\Delta_1) \Delta_x^3 \Delta_{1y}^3$$

in die Reihe (VIII) § 7, so findet man, dass die rechts auftretenden Elementarcovarianten sämmtlich Formen des Systems sind. Man erhält nämlich:

$$(ab)\,a_x^3 b_y^3 = \frac{3}{2}\,\Delta_{y^2}(xy) + \frac{1}{4}\,i\,(xy)^3 \tag{1}$$

$$(a\Delta)^2 a_x^2 \Delta_y^2 = \frac{i}{6} f_{y^4} + \frac{1}{3} j \cdot (xy)^2 \tag{2}$$

$$(\Delta\Delta_1)\,\Delta_x^3 \Delta_{1y}^3 = \frac{1}{2}\Big(j \cdot f_{y^2} - \frac{i}{2}\,\Delta_{y^2}\Big)(xy) + \frac{1}{24}\,i^2\,(xy)^3. \tag{3}$$

Nun kann jedes symbolische Product, das (ab), oder $(a\Delta)^2$, oder $(\Delta\Delta_1)$ zum Factor hat, durch Ueberschiebung mit den Formen (1), resp. (2), (3) oder deren Polaren gewonnen werden (vergl. § 3) und die Gleichungen (1), (2), (3) lehren daher:

1) Alle Formen, welche (ab) zum Factor haben, lassen sich reduciren auf Formen, welche an Stelle der beiden Symbole a und b nur mehr das eine Δ besitzen und auf Formen, die i zum Factor haben.

2) Alle Formen, welche $(a\Delta)^2$, $(\Delta\Delta_1)$ besitzen, lassen sich auf Formen reduciren, welche i oder j zum Factor haben,

und daher sind die erwähnten Klammerfactoren in der That Reducenten. (Vergl. Nr. 124.)

161. Um nun die gleiche Eigenschaft auch für $(a\Delta)(b\Delta)$ nachzuweisen, denken wir uns wieder das einfachste symbolische Product, das $(a\Delta)(b\Delta)$ zu Klammerfactoren besitzt, nämlich

$$P = (a\Delta)(b\Delta)\,a_x^3 b_y^3 \Delta_z^2$$

in eine nach Potenzen von (xy) fortschreitende Reihe entwickelt. Dann enthalten alle Elementarcovarianten, abgesehen von der ersten, den Factor (ab) und sind demnach reducibel. Nun ist aber nach dem Productsatz diese erste Elementarcovariante:

$$(a\Delta)(b\Delta)\,a_x^3 b_x^3 = \frac{1}{2}\,a_x^2 b_x^2\,\{(b\Delta)^2 a_x^2 + (a\Delta)^2 b_x^2 - \Delta_x^2 (ab)^2\},$$

und somit, weil rechts nur Reducenten sich befinden, gleichfalls reducibel. Es ist also auch P reducibel und $(a\Delta)(b\Delta)$ Reducent. Damit sind wir aber am Schlusse unseres Beweises angelangt. Jedes symbolische Product, das eine Co- oder Invariante der biquadratischen Form darstellen soll, kann zunächst reducirt werden auf eine Summe von Producten, die i oder j zum Factor haben, oder wenigstens auf Producte, mit weniger Symbolen a oder Δ. Durch Wiederholung der Reduction wird schliesslich jedes symbolische Product reducirt auf eine rationale ganze Function der Formen f, Δ, t, i, j.

162. *Die Fundamentalrelation zwischen den fünf Formen des Systemes.* Zwischen den fünf Formen des Systemes besteht eine Relation, die

wir sofort nach allgemeinen Gesetzen berechnen können. Die Covariante t sechsten Grades ist nämlich Functionaldeterminante von f und $\varDelta$, und demnach ist ihr Quadrat durch die geraden Formen des Systemes darstellbar. Man erhält nach Nr. 48, (I):

$$2t^2 = \begin{vmatrix} \varDelta, & \frac{i}{6}f, & f \\ \frac{i}{6}f, & \frac{j}{6}f - \frac{i}{6}\varDelta, & \varDelta \\ f, & \varDelta, & 0 \end{vmatrix}$$

oder:

$$2t^2 = \frac{i}{2}f^2 \cdot \varDelta - \varDelta^3 - \frac{j}{3}f^3.$$

163. *Relationen zur Berechnung der Ueberschiebung von t über sich selbst und über f und $\varDelta$.* Aus den letzten Untersuchungen geht hervor, dass die Ueberschiebungen von t über sich selbst und über f und $\varDelta$ zu keinen neuen Covarianten Veranlassung geben können. Wenn wir im Folgenden sie dennoch berechnen, so geschieht dies einmal, weil sich uns hier ein lehrreiches Beispiel für die Behandlung derartiger Aufgaben darbietet, dann aber auch, weil gerade die Ueberschiebungen von t über sich selbst interessante Aufschlüsse über den Charakter dieser Covariante gewähren. Am besten wählt man zur Bildung der durch diese Ueberschiebungen entstehenden Formen als Ausgangspunkt die Form:

$$P = a_y^4 \varDelta_x^4 - a_x^4 \varDelta_y^4 = p_y^4 q_x^4,$$

welche wir schon früher als Combinante charakterisirt haben. Entwickelt man dieselbe nach Potenzen von (yx), so erhält man

$$P = \sum \frac{\binom{4}{\varrho}\binom{4}{\varrho}}{\binom{8-\varrho+1}{\varrho}} \cdot \overline{(pq)}^{\varrho}_{y^{4-\varrho}} (yx)^{\varrho}. \tag{1}$$

Von den Elementarcovarianten dieser Form P verschwinden aber alle bis auf die zweite:

$$\overline{(pq)}^1 = [(a\varDelta)\, a_x^3 \varDelta_x^3 - (\varDelta a)\, a_x^3 \varDelta_x^3] = 2\,(a\varDelta)\, a_x^3 \varDelta_x^3 = 2\, t_x^6.$$

Der Coefficient dieses Gliedes der Reihe (1) ist $\dfrac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{8}{1}} = 2$; also erhalten wir:

$$a_y^4 \varDelta_x^4 - a_x^4 \varDelta_y^4 = 4\, t_x^3 t_y^3 (yx); \tag{I}$$

daraus ergeben sich durch Polarisation nach y die zwei weitern Formeln:

$$a_y^3 a_x \varDelta_x^4 - a_x^4 \varDelta_y^3 \varDelta_x = 3\, t_x^4 t_y^2 (yx) \tag{II}$$

$$a_y^2 a_x^2 \varDelta_x^4 - a_x^4 \varDelta_y^2 \varDelta_x^2 = 2\, t_x^5 t_y (yx), \tag{III}$$

wobei also:

$$(a\Delta)\, a_x^3 \Delta_x^3 = t_x^6. \tag{IV}$$

Auf den rechten Seiten dieser vier Formeln befinden sich Polaren von t, von der nullten angefangen bis zur dritten. Je nachdem wir also für y die Symbole a, Δ, t in dieselben eintragen, erhalten wir der Reihe nach die gewünschten Ueberschiebungen, ausgedrückt in Symbolen von a und Δ allein.

164. *Die ersten Ueberschiebungen.* Hiezu benutzen wir Formel III, wir setzen darin zunächst $y_1 = b_2$, $y_2 = -b_1$ und multipliciren mit b_x^2; dann erhält man:

$$(ab)_x^2\, a_x^2 b_x^2 \cdot \Delta - f\cdot (b\Delta)^2 b_x^2 \Delta_x^2 = 2\,(t, f) = \Delta^2 - \frac{i}{6}\cdot f^2, \tag{1}$$

sodann ersetzen wir y_1 durch Δ', y_2 durch Δ_2' und bekommen:

$$(a\Delta')^2 a_x^2 \Delta_x'^2 \cdot \Delta - f\cdot (\Delta\Delta')^2 \Delta_x^2 \Delta_x'^2 = 2\,(t, \Delta) = \frac{1}{3} f(i\Delta - jf). \tag{2}$$

Hiezu tritt als erste Ueberschiebung von t über sich selbst:

$$(t, t) = 0. \tag{3}$$

165. *Die zweiten Ueberschiebungen.* Wir ersetzen in Formel (II) zuerst y durch b, dann y durch Δ'; beide Male erhalten wir als Resultat null; daher

$$(t, f)^2 = 0 \tag{4}$$

$$(t, \Delta)^2 = 0. \tag{5}$$

Substituiren wir aber für y das Symbol t', so entsteht:

$$(at)^3 a_x t_x^3 \cdot \Delta - f\cdot (\Delta t)^3\, \Delta_x t_x^3 = 3\,(t, t')^2\, t_x^4 t_x'^4,$$

oder

$$(f, t)^3 \cdot \Delta - (\Delta, t)^3 f = (t, t')^2.$$

Führen wir für die sofort zu berechnenden Ueberschiebungen $(f, t)^3$ und $(\Delta, t)^3$ ihre aus (7) und (8) hervorgehenden Ausdrücke ein, so kommt:

$$\frac{1}{4}\left\{jf - i\Delta\right\}\Delta - \frac{1}{4}\left\{\frac{i^2}{6} f - j\Delta\right\} f = 3\,(t, t')^2,$$

oder

$$-\frac{1}{12}\left\{i\Delta^2 - 2j\Delta f + \frac{i^2}{6} f^2\right\} = (t, t')^2. \tag{6}$$

166. *Die dritten Ueberschiebungen.* Sie gehen direct aus der Combinante P selbst hervor [Gleichung (I)], indem man der Reihe nach y durch b, Δ', t' ersetzt. Man erhält:

$$4\,(t, f)^3 = i\Delta - jf \tag{7}$$

$$4\,(t, \Delta)^3 = j\Delta - \frac{i^2}{6} f \tag{8}$$

$$4\,(t, t')^3 = 0. \tag{9}$$

167. *Die vierten und fünften Ueberschiebungen.* Wir benutzen zu diesen Bildungen eine andere Ausgangsform.

Gemäss der Reihenentwicklung (IX), § 7 ist:

$$(a\varDelta)\varDelta_x^2 a_y^3 \varDelta_y = \sum \frac{\binom{2}{k}\binom{3}{k}}{\binom{6-k+1}{k}} (f, \varDelta)^k_{y^{3-k+1}} (xy)^k,$$

oder

$$(a\varDelta)\, a_y^3 \varDelta_y \varDelta_x^2 = t_{y^4} + \frac{i}{6} \cdot f_{y^2}(yx).$$

Ersetzen wir hier y durch b, so folgt:

$$(a\varDelta)(ab)^3(\varDelta b)\varDelta_x^2 = (t, f)^4 + \frac{i}{6}(f, f)^3.$$

Nun ist aber $(f, f)^3 = 0$, und ebenso verschwindet die linke Seite, da sie durch Vertauschung von a mit b ihr Zeichen ändert, daher:

$$(t, f)^4 = 0, \tag{10}$$

und ebenso

$$(t, \varDelta)^4 = 0, \tag{11}$$

wie aus (10) direct durch den Aronhold'schen Process (vergl. auch § 16) hervorgeht. Beide Resultate sind auch a priori einleuchtend. Denn diese Ueberschiebungen würden quadratische Covarianten erzeugen, die aber unmöglich durch f, $\varDelta$, t sich rational ausdrücken lassen.

Die vierte Ueberschiebung von t über sich selbst gewinnt man wiederum aus der Formel (II), Nr. 163, wenn man darin zuerst x mit y vertauscht, also aus:

$$a_y^4 \varDelta_x^3 \varDelta_y - a_x^3 a_y \varDelta_y^4 = 3\, t_y^4 t_x^2 (yx).$$

Man substituirt t für y und erhält:

$$(at)^4(\varDelta t)\varDelta_x^3 t_x - a_x^3(at)(\varDelta t)^4 t_x = 3\,(t, t')^4 t_x^2 t_x'^2.$$

Die beiden Glieder links verschwinden einzeln wegen der Symbolfactoren $(at)^4$, resp. $(\varDelta t)^4$, vermöge welcher dieselben durch Ueberschiebung mit $(f, t)^4 = 0$, resp. $(\varDelta t)^4 = 0$ entstanden gedacht werden können.

Somit habeu wir die wichtige Relation

$$(t, t)^4 = 0. \tag{12}$$

Durch sie wird t als eine ganz specielle Form ihres Grades charakterisirt. Wir werden in § 19 solche Formen eingehender studiren. Hier möge nur so viel bemerkt sein, dass gerade wegen dieser Relation $(t, t)^4 = 0$

nach den in § 20 entwickelten Gesetzen das ganze Formensystem einer solchen Form t sich auf die vier Formen reducirt

$$t,\ (t,t)^2,\ ((t,t)^2,t),\ (t,t)^6.$$

Insbesondere müssen daher alle Invarianten Potenzen von $(t,t)^6$ sein, welche, wie der nächste Absatz zeigt, den Werth $\frac{1}{4}\left(j^2-\frac{i^3}{6}\right)$ besitzt.

168. *Die fünften und sechsten Ueberschiebungen.* Die fünften Ueberschiebungen sind durchwegs null, da ja $\varDelta$ und f nur vom vierten Grade sind und $(t,t)^5$ sein Zeichen ändert bei Vertauschung von t mit t'.

Es bleibt sonach nur noch $(t,t)^6$ zu berechnen. Wir bilden von

$$t_x^6 = (a\varDelta)\,a_x^3\,\varDelta_x^3$$

die sechste Polare und ersetzen y durch t:

$$(t,t)^6 = (a\varDelta)(at)^3(\varDelta t)^3 = -\,(at)^3(a\varDelta)(t\varDelta)^3.$$

Der Ausdruck rechts kann auch betrachtet werden als vierte Ueberschiebung von $\varDelta$ über $(f,t)^3 = (at)^3 a_x t_x^3$; daher hat man:

$$(t,t)^6 = -\,((f,t)^3,\varDelta)^4 = -\frac{1}{4}\,((i\varDelta - jf),\varDelta)^4 = \frac{1}{4}\left(j^2-\frac{i^3}{6}\right).$$

Wir werden alsbald sehen, dass die berechnete Grösse rechts nichts anderes ist als die Discriminante R der Form $f=a_x^4$, abgesehen von einem Zahlenfactor.

§ 16. Anwendung des Aronhold'schen Processes auf das Formensystem der Form vierten Grades.

169. *Wirkung des Processes auf die Grundformen des Systemes.* Wie die cubische Form eine Covariante Q gleichen Grades besitzt, so haben wir auch im System der biquadratischen Form eine Covariante, die Hesse'sche Form $\varDelta$, die gleichen Grades ist mit der Originalform f. Wir können daher in derselben Weise wie dort unter Einführung der Symbole $\varDelta$, symbolische Producte, welche Covarianten von $f=a_x^4$ repräsentiren, dem Aronhold'schen Processe unterwerfen, und so wichtige Aufschlüsse über die Eigenschaften und den inneren Zusammenhang der Formen des Systems erhalten.

Ist P irgend eine Covariante von $f=a_x^4$, so ist in unserm Falle der Aronhold'sche Process dargestellt durch:

$$\delta P = \sum \frac{\partial P}{\partial \bar{a}_i}\,\bar{\varDelta}_i, \qquad \text{(I)}$$

wobei $\bar{a}_i$ und $\bar{\Delta}_i$ die unsymbolischen Coefficienten von f resp. Δ bedeuten. Ersetzen wir nun in dieser Gleichung (I) die Covariante P der Reihe nach durch f, Δ, i, t, j, so erhalten wir:

$$\delta f = \Delta; \tag{1}$$

$$\delta\Delta = \delta(f, f)^2 = 2(f, \delta f)^2 = 2(f, \Delta)^2 = \frac{i}{3}\cdot f. \tag{2}$$

Wir haben also hier wiederum die wechselseitige Beziehung, die wir schon mehrmals bei analogen Untersuchungen betont haben. Ebenso wie δf auf Δ führt, so gelangt man umgekehrt durch $\delta\Delta$ wieder auf f zurück.

Es ist weiter:

$$\delta i = \delta(f, f)^4 = 2(f, \delta f)^4 = 2(f, \Delta)^4 = 2j; \tag{3}$$

$$\delta t = \delta(f, \Delta) = (\delta f, \Delta) + (f, \delta\Delta) = (\Delta, \Delta) + i\cdot(f, f) = 0. \tag{4}$$

Das letzte Resultat war a priori einzusehen, da t als erste Ueberschiebung von f und Δ eine Combinante dieser beiden Formen ist. (Vergl. § 6.) Die allgemeinste Combinante des Systemes f, Δ ist die Form

$$C = a_y^4 \Delta_x^4 - a_x^4 \Delta_y^4,$$

wie wir bei Gelegenheit der Definition von Combinanten § 6 erwähnt haben.

Da aber nach Gleichung Nr. 163 (I), t die einzige Elementarcovariante von C ist, so treten beide Combinanten t wie C gleichberechtigt im System auf. Endlich ist:

$$\delta j = \delta(f, \Delta)^4 = (\delta f, \Delta)^4 + (f, \delta\Delta)^4 = (\Delta, \Delta)^4 + \frac{i}{3}(f, f)^4 = \frac{i^2}{6} + \frac{i^2}{3} = \frac{i^2}{2}. \tag{5}$$

Damit ist an den Grundformen des Systemes die Wirkung des δ-Processes studirt. Man kann die eben gewonnenen Resultate wiederum verwenden, aus einfacheren Ueberschiebungen schwierigere zu berechnen. So erhalten wir z. B. den Werth von $(\Delta, \Delta)^4$, wenn wir

$$(f, \Delta)^2 = \frac{i}{6} f$$

dem δ-Process unterwerfen. Es ergiebt sich:



$$(\varDelta, \varDelta)^2 + \frac{i}{3}(f, f)^2 = \frac{j}{3}f + \frac{i}{6}\varDelta,$$

also

$$(\varDelta, \varDelta)^2 = \frac{1}{3}jf - \frac{1}{6}i\varDelta,$$

was mit dem früher gewonnenen Resultat, Nr. 158, (3), übereinstimmt.

170. *Die Combinanten der Form* $\varphi = kf + \lambda\varDelta$. Wir haben seinerzeit eine Form C als Combinante zweier binärer Formen χ und ψ definirt, sobald sie der Differentialgleichung

$$\delta C = \sum \frac{\partial C}{\partial \chi_i} \cdot \psi_i = 0$$

genügt. Ist nun P irgend eine Combinante von $f = a_x^4$ und $\varDelta = \varDelta_x^4$, also, wenn wir uns in P die Coefficienten von $\varDelta$ durch ihre Werthe in den Coefficienten von f ersetzt denken, eine Combinante von f, so besitzt die Form

$$\varphi = kf + \lambda\varDelta$$

eine entsprechende Combinante P_φ, welche man erhält, wenn man in P die Coefficienten a_i von f durch die Coefficienten $ka_i + \lambda\varDelta_i$ von φ ersetzt. Insbesondere entspricht der einzigen Fundamentalcombinante $t = (f, \varDelta)$ eine Form t_φ von φ, aus der alle Combinanten dieser Form φ entspringen. Die Berechnung derselben ist also zurückgeführt auf die Berechnung von t_φ. Nach den allgemeinen Entwicklungen in § 6 hat man aber:

$$t_\varphi = g^\varrho \cdot t. \qquad \text{(II)}$$

Hiebei ist ϱ eine noch zu bestimmende ganze Zahl; ferner ist

$$g = kB - \lambda A,$$

worin A und B die Coefficienten in der Gleichung

$$\varDelta_{kf+\lambda\varDelta} = Af + B\varDelta,$$

sind. Es handelt sich also zunächst darum, $\varDelta_{kf+\lambda\varDelta} = \varDelta_\varphi$ zu berechnen.

171. *Berechnung von* $\varDelta_\varphi$. Wir ermitteln diese Form direct durch Ueberschiebung. Man erhält:

$$\begin{aligned}\varDelta_\varphi &= (kf + \lambda\varDelta, kf + \lambda\varDelta)^2 \\ &= k^2 \cdot (f, f)^2 + 2k\lambda \cdot (f, \varDelta)^2 + \lambda^2 \cdot (\varDelta, \varDelta)^2 \\ &= k^2 \cdot \varDelta + \frac{i}{3} f \cdot k\lambda + \lambda^2\left(\frac{j}{3}f - \frac{i}{6}\varDelta\right),\end{aligned}$$

also:

$$\varDelta_\varphi = \varDelta\left\{k^2 - \frac{i}{6}\lambda^2\right\} + f\left\{\frac{k\lambda i}{3} + \frac{j}{3}\lambda^2\right\}.$$

Es ist sehr bemerkenswerth, dass die Coefficienten von $\varDelta$ und f auf der rechten Seite dieser Gleichung nichts anderes sind, als die

ersten Differentialquotienten der Form

$$g = k^3 - \frac{i}{2} k\lambda^2 - \frac{j}{3} \lambda^3 \tag{III}$$

nach k beziehungsweise λ. Die Differentiation ergiebt nämlich unmittelbar

$$\frac{1}{3} \frac{\partial g}{\partial k} = g_1 = \quad k^2 - \frac{i}{6} \lambda^2$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial g}{\partial \lambda} = g_2 = - \frac{k\lambda i}{3} - \frac{j}{3} \lambda^2.$$

Die Form g selbst aber ist eine cubische Resolvente der Gleichung vierten Grades $f = a_x^4 = 0$, auf welche die Lagrange'sche Methode der Auflösung dieser Gleichung direct führt*). Wir können also die Form $\varDelta_\varphi$ einfacher darstellen durch

$$\varDelta_\varphi = g_1 \varDelta - g_2 f = B\varDelta + Af,$$

und die Combinante t_φ durch:

$$t_\varphi = \left(k^3 - \frac{i}{2} k\lambda^2 - \frac{j}{3} \lambda^3\right) \cdot t.$$

Denn die Constante ϱ muss nothwendig den Werth 1 besitzen, da t nur vom dritten Grade in den Coefficienten von f und demnach t_φ auch nur vom dritten Grade in k und λ sein kann.

172. *Berechnung der Formen* i_φ und j_φ. Die letzten Betrachtungen haben uns veranlasst, die beiden Formen $\varDelta$ und t des Systemes von $\varphi = kf + \lambda\varDelta$ zu berechnen. Wir wollen zur Vervollständigung auch noch die beiden übrigen Formen i und j dieser Form φ ermitteln, und schlagen zu dem Zwecke wiederum den Weg der directen Ueberschiebung ein. Gemäss der Definition von i als vierte Ueberschiebung der Grundform über sich selbst wird:

$$i_\varphi = (kf + \lambda\varDelta, kf + \lambda\varDelta)^4 = k^2 (f, f)^4 + 2k\lambda (f, \varDelta)^4 + \lambda^2 (\varDelta, \varDelta)^4$$
$$= k^2 i + 2k\lambda j + \lambda^2 \frac{i^2}{6}.$$

Genau dieselbe Form erhält man als quadratische (also Hesse'sche) Covariante τ der cubischen Form g. Da nämlich

$$g = k^3 - \frac{i}{2} k\lambda^2 - \frac{j}{3} \lambda^3,$$

*) Sind $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ die Wurzeln von $f = 0$, dann ist jene Gleichung, welche die Grössen $y_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4$, $y_2 = x_1 x_3 + x_2 x_4$, $y_3 = x_1 x_4 + x_2 x_3$ zu Wurzeln hat, cubische Resolvente von f. Aus ihr geht durch lineare Transformation die Form g hervor.



so wird die Determinante der zweiten Differentialquotienten:

$$\frac{1}{2}\tau_g = \frac{1}{36}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial k^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial k\,\partial\lambda} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial k\,\partial\lambda} & \frac{\partial^2 g}{\partial\lambda^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k, & \frac{-i}{6}\lambda \\ \frac{-i}{6}\lambda, & -\left(\frac{ik}{6}+\frac{j}{3}\lambda\right) \end{vmatrix}$$

$$\tau_g = -\frac{1}{3}\left\{ik^2 + 2k\lambda j + \frac{i^2}{6}\lambda^2\right\};$$

daher

$$i_\varphi = -3\tau_g.$$

Wir erhalten endlich:

$$j_\varphi = (kf+\lambda\varDelta,\ g_1\varDelta - g_2 f)^4 = kg_1 j - kg_2 i + \lambda g_1\frac{i^2}{6} - \lambda g_2 j$$

$$= g_1\left(kj+\frac{\lambda i^2}{6}\right) - g_2(ki+\lambda j).$$

Auch dieser Ausdruck rechts lässt sich als cubische Covariante q der Form g herstellen; denn es ist

$$q_g = (g,\ \tau_g) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3g_1, & 3g_2 \\ -\frac{2}{3}(ik+\lambda j), & -\frac{2}{3}\left(kj+\frac{i\lambda}{6}\right) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}\left\{g_1\left(kj+\frac{i\lambda}{6}\right) - g_2(ik+\lambda j)\right\}.$$

Daher:

$$j_\varphi = -3(g,\ \tau_g) = -3q_g.$$

Setzt man in die Relation, welche zwischen den In- und Covarianten der cubischen Form existirt [vgl. Nr. 148 (I)]

$$q_g^2 = -\frac{1}{2}(\tau_g^3 + R_g g^2)$$

die Werthe q_g, τ_g, R_g, g ein, ausgedrückt in den Formen j und i, so erhält man nach leichter Umformung auch noch

$$i_\varphi^3 - 6j_\varphi^2 = g^2(i^3 - 6j^2)$$

eine Relation, welche nach Nr. 170 (II) diese Verbindung als Combinante charakterisirt. Das ganze Formensystem der Form φ ist also dargestellt durch:

$$\varphi = kf+\lambda\varDelta,\quad \varDelta_\varphi = g_1\varDelta - g_2 f,\quad t_\varphi = g\cdot t,$$

$$i_\varphi = -3\tau_g,\quad j_\varphi = -3q_g,$$

wobei $g = k^3 - \frac{ik\lambda^2}{2} - \frac{j}{3}\lambda^3$, und $g_1 = \frac{1}{3}\frac{\partial g}{\partial k}$, $g_2 = \frac{1}{3}\frac{\partial g}{\partial\lambda}$ ist.

§. 17. Die Gleichung vierten Grades.

173. *Die Discriminante von $f = a_x^4$.* Ehe wir uns mit der Auflösung der Gleichung vierten Grades und mit den Eigenschaften ihrer Wurzeln eingehender beschäftigen, wollen wir zunächst jene Invariante der Form vierten Grades berechnen, welche als Discriminante bezeichnet wird. Sie muss sich nach dem Vorausgegangenen rational durch i und j darstellen lassen, da diese beiden Formen die einzigen selbstständigen Invarianten des Systemes sind.

Gesetzt nun, die Form $f = a_x^4$ besitze zwei gleiche Wurzeln und sei dementsprechend dargestellt durch

$$f = a_x^4 = \alpha_x^2 \cdot p_x^2\,, \tag{1}$$

wo α_x der lineare Doppelfactor, und p_x^2 irgend eine quadratische Form ist, dann muss für diese Form die Discriminante identisch verschwinden. Es muss also in diesem Falle zwischen den beiden Fundamentalinvarianten i und j eine Relation bestehen, die sich von selbst einstellen muss, sobald wir i und j für $f = \alpha_x^2 \cdot p_x^2$ berechnen. Beide Formen werden in diesem Falle durch einen gewissen Parameter ϱ sich darstellen lassen, durch dessen Elimination sich die gewünschte Relation ergiebt.

Nun hat die zweite Ueberschiebung von $f = \alpha_x^2 \cdot p_x^2$ über α_x^2 den Werth:

$$(a\alpha)^2\, a_x^2 = \frac{1}{6}\,(p\alpha)^2 \cdot \alpha_x^2 = \varrho \cdot \alpha_x^2 \tag{2}$$

und daher erhalten wir, indem wir diese Gleichung einmal über $f = b_x^4$ schieben, als erste Ueberschiebung von f über α:

$$(ab)\,(a\alpha)^2\, a_x\, b_x^3 = -\,\varrho \cdot \alpha \cdot (f,\ \alpha)\,. \tag{3}$$

Die linke Seite enthält den Reducenten (ab) und muss daher auf eine Ueberschiebung von $\varDelta$ über α führen. In der That erhält man durch Anwendung des Identitätssatzes:

$$(ab)\,(a\alpha)^2\, a_x\, b_x^3 = (ab)\,(a\alpha)\, a_x\, b_x^2\,\{(b\alpha)\, a_x + (ab)\,\alpha_x\}\,,$$

oder, weil hier das erste Glied rechts durch Vertauschung von a mit b nur sein Zeichen ändert und sonach verschwindet:

$$(ab)\,(a\alpha)^2\, a_x\, b_x^3 = (ab)^2\,(a\alpha)\, a_x\, b_x^2\, \alpha_x = \alpha \cdot (\varDelta,\ \alpha)\,. \tag{4}$$

Subtrahirt man nun beide Gleichungen (3) und (4), so erhält man nach Absonderung des Factors α_x:

$$(\varDelta + \varrho \cdot f,\ \alpha) = 0\,. \tag{5}$$

Da nun die Invarianten i und j durch viermalige Ueberschiebung von $\varDelta$ und f über sich selbst und über einander entstehen, so brauchen

wir nur, um die gewünschten Relationen für i und j zu erhalten, die Gleichung (5) dreimal über Δ und über f, oder besser über die Combination $\Delta + \mu f$ zu schieben, wo μ jeden beliebigen Werth hat. Wir erhalten dann zunächst:

$$U = ((\Delta + \varrho f,\ \alpha),\ \Delta + \mu f)^3 = ((P,\ \alpha),\ Q)^3 = 0.$$

Ersetzen wir hier einen Moment α durch y und entwickeln das so sich ergebende Polarenglied: $(PQ)^3 P_y Q_x$ in eine Reihe, so kommt, wenn wir darin wiederum für y das Symbol α einführen:

$$U = 0 = ((\Delta + \varrho f,\ \Delta + \mu f)^3,\ \alpha) + \frac{1}{2}(\Delta + \varrho f,\ \Delta + \mu f)^4 \cdot \alpha,$$

oder, weil alle dritten Ueberschiebungen $(\Delta,\ \Delta)^3$, $(\Delta,\ f)^3$, $(f,\ f)^3$ verschwinden:

$$(\Delta + \varrho f,\ \Delta + \mu f)^4 = 0,$$

d. h.
$$\frac{i^2}{6} + (\varrho + \mu) j + \varrho \mu \cdot i = 0. \tag{6}$$

Da diese Identität für jeden Werth μ gilt, so müssen die Beziehungen bestehen

$$\frac{i^2}{6} + \varrho \cdot j = 0$$
$$i\varrho + j \quad = 0.$$

Durch Elimination des Parameters ϱ erhält man

$$R_f = j^2 - \frac{i^3}{6} = 0$$

und in dieser Relation muss die linke Seite als Discriminante der Form f angesehen werden, da diese Relation nur entstanden ist unter der Bedingung des Vorhandenseins einer Doppelwurzel; sie ist in der That auch vom Grade $2(n-1) = 6$ in den Coefficienten von f.

Anmerkung. Berechnet man die Discriminante R_g der cubischen Resolvente

$$g = k^3 - \frac{i}{2} k \lambda^2 - \frac{j}{3} \lambda^3$$

nach den Regeln der niederen Algebra (vgl. auch Bd. I Nr. 183), so ergiebt sich

$$R_g = \frac{1}{9}\left(j^2 - \frac{i^3}{6}\right).$$

Ebenso haben wir gesehen, dass die Invariante

$$(t,\ t)^6 = \frac{1}{4}\left(j^2 - \frac{i^3}{6}\right).$$

174. *Die Cayley'sche Auflösung der Gleichung vierten Grades.* Die invariantentheoretische Auflösung der Gleichung

$$f = \bar{a}_0 x_1^4 + 4\bar{a}_1 x_1^3 x_2 + 6\bar{a}_2 x_1^2 x_2^2 + 4\bar{a}_3 x_1 x_2^3 + \bar{a}_4 x_2^4 = 0$$

knüpft Cayley an die in Nr. 162 aufgestellte Relation

$$2t^2 = \frac{i}{2} f^2 \varDelta - \varDelta^3 - \frac{j}{3} f^3,$$

die wir auch in der Form schreiben können

$$-2t^2 = \varDelta^3 - \frac{i}{2} f^2 \varDelta - \frac{j}{3}(-f)^3.$$

Vergleicht man nun die rechte Seite dieser Relation mit der cubischen Resolvente

$$g = k^3 - \frac{i}{2} \lambda^2 k - \frac{j}{3} \lambda^3$$

der Gleichung $f = 0$, so erkennt man, dass dieselbe daraus hervorgeht, wenn man k durch $\varDelta$ und λ durch $-f$ ersetzt. Man hat also:

$$-2t^2 = g(\varDelta, -f)$$

oder, wenn k_1, k_2, k_3 die drei Wurzeln von $g = 0$ sind,

$$-2t^2 = (\varDelta + k_1 f)(\varDelta + k_2 f)(\varDelta + k_3 f). \qquad (1)$$

Ist nun f eine allgemeine Form ihres Grades, sind also ihre vier Wurzeln von einander verschieden, so ist die Discriminante R von f nicht null; folglich sind in diesem Falle keine zwei der drei Wurzeln k_1, k_2, k_3 einander gleich (da R auch Discriminante der Resolvente g ist); anderntheils können f und $\varDelta$ im Allgemeinen keinen Factor gemeinsam haben, wenn $R \gtrless 0$*).

Die drei Factoren der Gleichung (I) sind also in Bezug auf ihre linearen Factoren von einander verschieden, und da die linke Seite ein völliges Quadrat ist, so muss jeder der drei Factoren rechts gleichfalls das Quadrat einer Form zweiten Grades sein.

Wir können daher setzen

$$\left.\begin{aligned} \varDelta + k_1 f &= \varphi^2 \\ \varDelta + k_2 f &= \psi^2 \\ \varDelta + k_3 f &= \chi^2 \end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

wo φ, ψ und χ drei quadratische Formen sind.

Alsdann wird die Covariante

$$t = \frac{1}{\sqrt{-2}} \cdot \varphi \cdot \psi \cdot \chi.$$

Die drei quadratischen Formen φ, ψ, χ sind aber conjugirte Formen (vgl. Nr. 137); denn die Functionaldeterminanten je zweier derselben sind immer der dritten proportional. So ist z. B.

*) Vgl. auch Nr. 177, Anmerkung.

$$\begin{aligned}(\Delta + k_2 f,\ \Delta + k_3 f) &= (\Delta,\ \Delta) + (k_2 - k_3)(f,\ \Delta) + k_2 k_3 (f,\ f) \\ &= (k_2 - k_3) \cdot t \\ &= \frac{(k_2 - k_3)}{\sqrt{-2}} \cdot \varphi \cdot \psi \cdot \chi .\end{aligned}$$

Anderntheils ist

$$(\psi^2,\ \chi^2) = (\psi,\ \chi) \cdot \psi \cdot \chi .$$

Durch Comparation beider Gleichungen ergiebt sich

uns analog

$$\left.\begin{aligned}(\psi,\ \chi) &= \frac{k_2 - k_3}{\sqrt{-2}} \cdot \varphi \\ (\chi,\ \varphi) &= \frac{k_3 - k_1}{\sqrt{-2}} \cdot \psi \\ (\varphi,\ \psi) &= \frac{k_1 - k_2}{\sqrt{-2}} \cdot \chi\end{aligned}\right\} . \tag{3}$$

Die Covariante t ist also eine ganz specielle Form sechsten Grades, welche unter Adjunction der drei Wurzeln einer cubischen Gleichung in drei conjugirte quadratische Factoren gespalten werden kann.

175. Gerade dieser Umstand gestattet aber die Wurzeln der Gleichung $f = 0$ in einfacher Weise zu berechnen. Durch Subtraction je zweier der Gleichungen (2) erhalten wir nämlich

$$\left.\begin{aligned}(k_1 - k_2) f &= \varphi^2 - \psi^2 = (\varphi - \psi)(\varphi + \psi) \\ (k_2 - k_3) f &= \psi^2 - \chi^2 = (\psi - \chi)(\psi + \chi) \\ (k_3 - k_1) f &= \chi^2 - \varphi^2 = (\chi - \varphi)(\chi + \varphi)\end{aligned}\right\} . \tag{4}$$

Wir schliessen aus diesen Gleichungen (4), dass je eine Summe und Differenz je zweier solcher quadratischer Formen alle Wurzeln von f enthalten, dass daher die Differenzen

$$\varphi - \psi \quad \text{und} \quad \psi - \chi$$

oder

$$\psi - \chi \quad \text{und} \quad \chi - \varphi$$

oder

$$\chi - \varphi \quad \text{und} \quad \varphi - \psi$$

oder die entsprechenden Summenpaare stets einen gemeinsamen linearen Factor von f besitzen. Denn enthielten sie keinen solchen gemeinsamen Factor, so müsste sich einmal f darstellen lassen z. B. durch

$$(k_1 - k_2) f = (\varphi - \psi)(\varphi + \psi),$$

dann aber auch durch

$$\varrho \cdot f = (\varphi - \psi)(\varphi - \chi) .$$

Also müsste bis auf eine Constante $\chi = -\psi$ sein, und analog $\varphi = -\chi$, d. h. alle drei quadratischen Formen müssten übereinstimmen und demnach t Doppelwurzeln besitzen. Dann verschwindet aber die Discriminante von t, welche nur eine Potenz der Discriminante R von f sein kann,

wie wir in Nr. 167 gesehen haben. Nach unserer Voraussetzung ist aber R von null verschieden, und folglich haben in der That je zwei solche oben angeführte Summen- oder Differenzenpaare einen gemeinsamen Factor.

Nun hatten wir früher (Nr. 128) den Satz erhalten: Besitzen zwei quadratische Formen einen gemeinsamen linearen Factor, so enthält ihre Functionaldeterminante denselben quadratisch. Also ist in der Relation

$$\sqrt{-2}\cdot(\varphi-\psi,\ \varphi-\chi)=(k_3-k_1)\psi+(k_1-k_2)\chi+(k_2-k_3)\varphi$$

die rechte Seite das vollständige Quadrat des gesuchten linearen Factors von f. Wir können diese rechte Seite auch in die Determinantenform bringen

$$-D=\begin{vmatrix}1 & k_1 & \varphi\\ 1 & k_2 & \psi\\ 1 & k_3 & \chi\end{vmatrix}.$$

Um den Factor selbst zu erhalten, brauchen wir nur die erste Polare zu bilden; dann stellt

$$-D_y=\begin{vmatrix}1 & k_1 & \varphi_y\\ 1 & k_2 & \psi_y\\ 1 & k_3 & \chi_y\end{vmatrix}$$

für $y_2=1$ und $y=0$ einen linearen Factor von f dar. Nun hat bereits Euler gezeigt, dass, wenn $x_1=\sqrt{t}+\sqrt{u}+\sqrt{v}$ eine Lösung der Gleichung vierten Grades ist, die drei andern Lösungen daraus dadurch erhalten werden, dass man je zwei der drei Grössen $\sqrt{t}$, $\sqrt{u}$, $\sqrt{v}$ mit negativem Vorzeichen nimmt. Die vier linearen Factoren der Gleichung vierten Grades sind also:

$$\begin{vmatrix}1, & k_1, & (+\sqrt{\varDelta+k_1f})_y\\ 1, & k_2, & (+\sqrt{\varDelta+k_2f})_y\\ 1, & k_3, & (+\sqrt{\varDelta+k_3f})_y\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1, & k_1, & (+\sqrt{\varDelta+k_1f})_y\\ 1, & k_2, & (-\sqrt{\varDelta+k_2f})_y\\ 1, & k_3, & (-\sqrt{\varDelta+k_3f})_y\end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix}1, & k_1, & (-\sqrt{\varDelta+k_1f})_y\\ 1, & k_2, & (+\sqrt{\varDelta+k_2f})_y\\ 1, & k_3, & (-\sqrt{\varDelta+k_3f})_y\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1, & k_1, & (-\sqrt{\varDelta+k_1f})_y\\ 1, & k_2, & (-\sqrt{\varDelta+k_2f})_y\\ 1, & k_3, & (+\sqrt{\varDelta+k_3f})_y\end{vmatrix}.$$

Anmerkung. Eine zweite und dritte Methode der Auflösung einer Gleichung vierten Grades wird in den nächsten Paragraphen gegeben werden.

176. *Bedingung, dass $f=0$ drei gleiche Wurzeln enthält.* An die Auflösung der Gleichung vierten Grades knüpfen sich naturgemäss die

Fragen: Unter welchen Bedingungen wird es eintreten, dass zwei, drei, vier der eben ermittelten Wurzelgrössen übereinstimmen? Was den ersten und letzten Fall betrifft, so sind die Bedingungen hiefür bereits ermittelt.

Die Gleichung $f=0$ hat zwei gleiche Wurzeln, sobald die Discriminante

$$j^2 - \frac{i^3}{6} = 0.$$

Die Gleichung $f=0$ hat vier gleiche Wurzeln, wenn die Hesse'sche Form identisch verschwindet, also wenn

$$\varDelta = (ab)^2 a_x^2 b_x^2 = 0 \text{ (vgl. Nr. 55).}$$

Es bleibt also noch zu untersuchen, unter welcher Bedingung $f=0$ drei gleiche Wurzeln besitzt.

Zu dem Zwecke wählen wir $f = a_x^4$ in einer Normalform, in welcher von vorn herein drei Wurzeln als gleich angenommen sind, nämlich

$$f = 4\,x_1{}^3 x_2\,.$$

Die Coefficienten $a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ sind also der Reihe nach: 0, 1, 0, 0, 0. Trägt man die Werthe dieser Coefficienten in die Invarianten i und j ein, so findet sich:

$$i = 0, \quad j = 0.$$

Wir fragen uns nun, ob die beiden Bedingungen $i=0$, $j=0$ auch hinreichend sind, damit $f=0$ drei gleiche Wurzeln besitze. Da in Folge des Verschwindens dieser Invarianten auch die Discriminante $R=0$ wird, so hat f sicher zwei gleiche Wurzeln und kann also in diesem Falle in der Form dargestellt werden

$$f = a_0 x_1{}^4 + 4 a_1 x_1{}^3 x_2 + 6 a_2 x_1{}^2 x_2{}^2.$$

Bildet man aber für diese Form die Invariante i, so reducirt sie sich auf $a_2{}^2 = 0$, d. h. auch a_2 muss nach Voraussetzung verschwinden; dann ist aber f von der Form

$$f = a_0 x_1{}^4 + 4 a_1 x_1{}^3 x_2\,,$$

d. h. $f=0$ besitzt drei gleiche Wurzeln, und $j=0$, $i=0$ sind also die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür.

177. *Bedingung, dass $f = a_x^4$ ein vollständiges Quadrat ist.* Es kann nun endlich noch der Fall eintreten, dass f zwei Paare gleicher Wurzeln enthält, oder mit anderen Worten in das Quadrat einer Form zweiten Grades zerfällt. Um auch hiefür die Kriterien zu gewinnen, nehmen wir f in einer entsprechenden Normalform

$$f = c\, x_1{}^2 x_2{}^2$$

und bilden die Hesse'sche Covariante derselben. Sie wird (vgl. Nr. 54)

$$\Delta = \frac{1}{18} \begin{vmatrix} c x_2^2 & 2 c x_1 x_2 \\ 2 c x_1 x_2 & c x_1^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6} c^2 x_1^2 x_2^2 = \varrho \cdot f.$$

In diesem Falle ist sonach Δ proportional der Form f. Man kann auch sagen: Wenn f ein vollständiges Quadrat ist, dann bestehen zwischen den Coefficienten von f und Δ die Relationen:

$$\overline{a}_0 = \varrho \overline{\Delta}_0, \quad \overline{a}_1 = \varrho \overline{\Delta}_1, \quad \overline{a}_2 = \varrho \overline{\Delta}_2, \quad \overline{a}_3 = \varrho \overline{\Delta}_3, \quad \overline{a}_4 = \varrho \overline{\Delta}_4.$$

Wir fragen uns nun: Ist umgekehrt, wenn $f = \varrho \cdot \Delta$, diese Bedingung hinreichend, damit f zwei Paare gleicher Wurzeln enthält? Um die Frage zu entscheiden, bilden wir

$$(yx)^2 \cdot \Delta_x^4 = (yx)^2 (ab)^2 a_x^2 b_x^2 = (a_x b_y - b_x a_y)^2 a_x^2 b_x^2 = 2 \begin{vmatrix} f, & f_y \\ f_y, & f_{y^2} \end{vmatrix}.$$

Ist nun $x = \alpha$ irgend eine Wurzel von f, so verschwindet in der Gleichung:

$$(yx)^2 \Delta_x^4 = 2 \begin{vmatrix} f, & f_y \\ f_y, & f_{y^2} \end{vmatrix}, \tag{I}$$

wenn wir dieselbe für x eintragen, zunächst f selbst, dann aber auch Δ wegen der Proportionalität mit f. Sie reducirt sich also auf:

$$0 = f_y^2 \quad \text{oder} \quad f_y = 0,$$

d. h. auch die erste Polare von f verschwindet, wenn $x = \alpha$, für jeden Werth von y. Dies ist aber nur möglich, wenn in derselben

$$f_y = y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

die Differentialquotienten für $x = \alpha$ einzeln verschwinden. Dann aber ist diese Wurzel $x = \alpha$ eine Doppelwurzel. Wenn aber jede Wurzel α von f Doppelwurzel ist, so ist f ein vollständiges Quadrat.

Anmerkung. Aus der eben benutzten Relation (I) geht direct hervor, dass Δ und f keine Wurzeln gemein haben können, wenn $R \gtrless 0$. Denn ersetzen wir darin x der Reihe nach durch die vier Wurzeln $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ von f und multipliciren die vier Identitäten, so kommt:

$$\Delta(\alpha_1) \cdot \Delta(\alpha_2) \cdot \Delta(\alpha_3) \cdot \Delta(\alpha_4) = 16 \cdot \frac{f_y^2(\alpha_1) \cdot f_y^2(\alpha_2) \cdot f_y^2(\alpha_3) \cdot f_y^2(\alpha_4)}{(y\alpha_1)^2 \cdot (y\alpha_2)^2 \cdot (y\alpha_3)^2 \cdot (y\alpha_4)^2}$$

oder für $y_2 = 0$, $y_1 = 1$ erhalten wir (vgl. auch Bd. I Nr. 168, 173)

$$(-1)^{4 \cdot 4} R_{\Delta, f} = 16 \cdot \varrho \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=\alpha_1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=\alpha_2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=\alpha_3} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=\alpha_4} \right\}^2$$

oder

$$R_{\Delta, f} = 16 \cdot \varrho R_{f_1, f}^2 = \mu \cdot R^2, \quad \text{d. h.}$$

„die Resultante von Δ und f ist bis auf einen Zahlenfactor gleich dem Quadrat der Discriminante R von f.“

§ 18. Normalform von $f = a_x^4$; Transformation in die Normalform.

178. *Das Formensystem der Normalform.* Bei den Formen vierter Ordnung ist vorzugsweise ein Ausdruck derselben als canonische Form oder Normalform bezeichnet worden, nämlich jener, in welchem alle ungeraden Potenzen von x fehlen, also

$$f = x_1^4 + 6 m x_1^2 x_2^2 + x_2^4.$$

Wir studiren zunächst die algebraischen Ausdrücke des Systemes dieser Form, um alsdann umgekehrt aus dessen Eigenschaften die Mittel zu gewinnen, eine beliebige Form vierten Grades auf ihre Normalform zu transformiren.

Da die Coefficienten von f der Reihe nach die Werthe haben

$$1, \quad 0, \quad m, \quad 0, \quad 1,$$

so wird die Hesse'sche Covariante derselben repräsentirt durch

$$\varDelta = 2 \begin{vmatrix} x_1^2 + m x_2^2, & 2 m x_1 x_2 \\ 2 m x_1 x_2 & m x_1^2 + x_2^2 \end{vmatrix} = 2m(x_1^4 + x_2^4) + 2(1 - 3m^2) x_1^2 x_2^2.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält gleichfalls nur gerade Potenzen, also tritt auch $\varDelta$ in der Normalform auf. Die Invarianten

$$i = 2(\bar{a}_0 \bar{a}_4 - 4 \bar{a}_1 \bar{a}_3 + 3 \bar{a}_2^2), \; j = 6 \begin{vmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 \end{vmatrix}$$

erhalten für die canonische Form von f die Werthe:

$$i = 2(1 + 3m^2), \quad j = 6m(1 - m)^2.$$

Endlich die Functionaldeterminante $t = (f, \varDelta)$ ergiebt sich in der Form

$$t = \frac{1}{16} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varDelta}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varDelta}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x_1^3 + 3 m x_1 x_2^2, & x_2^3 + 3 m x_1^2 x_2 \\ m x_1^3 + \frac{1}{2}(1 - 3m^2) x_1 x_2^2, & m x_2^3 + \frac{1}{2}(1 - 3m^2) x_1^2 x_2 \end{vmatrix}$$

$$= (1 - 9m^2) x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4) = (1 - 9m^2) \cdot (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) x_1 x_2$$

$$= (1 - 9m^2) \varphi \cdot \chi \cdot \psi.$$

Die Covariante t zerfällt also unter Zugrundelegung der obigen Normalform von f nicht nur a priori in ihre drei conjugirten quadratischen Formen, sondern diese quadratischen Formen stellen sich hiebei selbst in der einfachsten Normalform ein; insbesondere reducirt sich φ auf das Product der Linearfactoren $x_1 \cdot x_2$. Dieser Umstand legt die Frage nahe, ob nicht umgekehrt durch die Transformation

$$y_1 = r_x$$
$$y_2 = s_x\,,$$

wobei r_x und s_x die Linearfactoren der Form φ einer in allgemeiner Darstellung gegebenen Form f sind, diese Form f auf die oben erwähnte Normalform gebracht werden kann.

179. *Transformation der Form f in die Normalform.* In der That erreichen wir durch diese Transformation das gewünschte Ziel. Zunächst geht aus der Annahme $\varphi = r_x \cdot s_x$ auch die Gestalt der beiden andern conjugirten Formen hervor, nämlich (vgl. Nr. 137)

$$\psi = r_x^2 - s_x^2\,,\ \chi = r_x^2 + s_x^2 \tag{1}$$

und wir wissen aus der Auflösung der Gleichung vierten Grades, dass, wenn wir setzen:

$$\varphi^2 = \varDelta + k_1 f, \tag{2}$$

die Quadrate von ψ und χ dargestellt sind durch

$$\psi^2 = \varDelta + k_2 f \tag{3}$$

$$\chi^2 = \varDelta + k_3 f, \tag{4}$$

wo k_1, k_2, k_3 die Wurzeln der cubischen Resolvente $g = 0$ sind. Nun können wir mit Hilfe der Identität

$$a_x\,(rs) = (as)\,r_x - (ar)\,s_x$$

den Ausdruck $f \cdot (rs)^4 = a_x^4\,(rs)^4 = [a_x\,(rs)]^4$ direct nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln und erhalten

$$f \cdot (rs)^4 = (as)^4\, r_x^4 - 4(as)^3\,(ar)\, r_x^3\, s_x + 6\,(as)^2\,(ar)^2\, r_x^2\, s_x^2 - 4(as)\,(ar)^3\, r_x\, s_x^3 + (ar)^4\, s_x^4\,.$$

Wir haben also nur zu zeigen, dass in Folge der Beziehungen (1) (2) (3) und (4) das zweite und vierte Glied dieses Ausdruckes rechts verschwindet; dann ist in der That f auf die gewünschte Normalform gebracht.

Zu dem Zwecke untersuchen wir die Ueberschiebungen $(\varphi,\ r_x^2)^2$ und $(\psi,\ r_x\, s_x)^2$. Beide sind null; denn nach Nr. 38 erhalten wir:

$$(\varphi,\ r_x^2)^2 = (r_x \cdot s_x,\ r_x \cdot r_x)^2 = (rr)\,(sr) = 0$$

und

$$(\psi,\ \varphi)^2 = (r_x^2 - s_x^2,\ r_x \cdot s_x)^2 = (rr)\,(rs) - (sr)\,(ss) = 0\,.$$

Daraus folgt aber unmittelbar, dass auch:

$$(\varphi^2,\ r_x^3 \cdot s_x)^4 = ((\varphi^2,\ r_x^2)^2,\ r_x s_x)^2 = 0 \tag{5}$$

und

$$(\psi^2,\ r_x^3 \cdot s_x)^4 = ((\psi^2,\ \varphi)^2,\ r_x^2)^2 \quad = 0 \tag{6}$$

ist, oder, indem wir beide Relationen combiniren, dass auch

$$(\varphi^2 - \psi^2,\ r_x^3 s_x)^4 = 0\,. \tag{7}$$

Nun ist aber wegen der Gleichungen (2) und (3)

$$\varphi^2 - \psi^2 = (k_1 - k_2) f;$$

also ist auch gemäss der Relation (7):

$$(k_1 - k_2)(f, r^3 s)^4 = (k_1 - k_2)(ar)^3 (as) = 0 \tag{8}$$

und ebenso folgt, wenn wir in (8) r mit s vertauschen,

$$(f, s^3 r)^4 = (ar)(as)^3 = 0.$$

Die Coefficienten des zweiten und vierten Gliedes in der binomischen Entwicklung von $f \cdot (rs)^4$ verschwinden also, und daher hat man in der That:

$$f \cdot (rs)^4 = (ar)^4 s_x^4 + 6 (ar)^2 (as)^2 r_x^2 s_x^2 + (as)^4 r_x^4. \tag{A}$$

Anmerkung über die Verwerthung der Normalform bei Auflöung der Gleichung vierten Grades. Die eben zum Abschluss gebrachten Untersuchungen geben eine weitere Methode, die Gleichung vierten Grades aufzulösen. Man berechnet zunächst die cubische Resolvente derselben

$$g = k^3 - \frac{i}{2} k - \frac{j}{3}$$

und bestimmt die drei Wurzeln $k_1\, k_2\, k_3$ dieser Gleichung. Irgend eine derselben liefert wegen der Relation

$$\Delta + k_1 f = \varphi^2$$

die quadratische Form $\varphi = \sqrt{\Delta + k_1 f}$; man setzt dieselbe gleich null und bestimmt ihre linearen Factoren r_x und s_x, mittelst welcher f in die Normalform (A) transformirt wird. Dieselbe enthält nur mehr gerade Potenzen und kann also durch Quadratwurzeln gelöst werden.

180. *Berechnung des Parameters m der Normalform aus der allgemeinen Form $f = a_x^4$.* Die Herstellung der Normalform von f kann auch noch in anderer Weise erreicht werden, indem wir direct den Parameter m berechnen. Man erhält denselben aus einer Gleichung dritten Grades, die man als eine zweite cubische Resolvente von $f = a_x^4$ auffassen kann. Sind nämlich i' und j' die aus $f = a_x^4$ direct gebildeten Invarianten der biquadratischen Form, so bestehen zwischen ihnen und den Invarianten

$$i = 2(1 + 3m^2), \quad j = 6m(1 - m^2) \tag{1}$$

der transformirten Form

$$f = x^4 + 6mx^2 y^2 + y^4$$

die Relationen:

$$\Delta^4 i' = i \quad \text{und} \quad \Delta^6 j' = j, \tag{2}$$

wenn Δ der Modul der Transformation ist, durch welche die Form $f = a_x^4$ übergeht in $f = x^4 + 6mx^2 y^2 + y^4$.

Bilden wir nun den Quotienten

$$\frac{i^3}{j^2} = \frac{\Delta^{12} i'^3}{\Delta^{12} j'^2} = \frac{i'^3}{j'^2}, \tag{3}$$

der somit vom Modul unabhängig ist, so gewinnen wir damit unter Benutzung der Relationen (1) eine Gleichung für den Parameter m, nämlich:

$$\frac{i'^3}{j'^2} = \frac{2}{9} \cdot \frac{(1+3m^2)^3}{m^2(1-m^2)^2}. \tag{4}$$

Der Ausdruck links ist eine bekannte Constante, und m lässt sich somit durch Auflösung einer cubischen Gleichung ermitteln.

Man nennt den Ausdruck $\frac{i^3}{j^2}$, da er, wie aus (3) erhellt, bei beliebiger linearer Transformation auch nicht einmal um eine Potenz des Moduls sich ändert, **absolute Invariante**.

181. *Berechnung des Moduls der Transformation aus dem Parameter m der Normalform.*

Sobald der Parameter m bestimmt ist, so können wir den Modul $\Delta = (rs)$ der Transformation

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r_1 x + r_2 y \\ x_2 &= s_1 x + s_2 y \end{aligned}\right\},$$

durch welche $f = a_x^4$ übergeht in

$$f = x^4 + 6mx^2y^2 + y^4,$$

berechnen. Denn es ist wegen (2) und (1)

$$\Delta^2 \cdot \frac{j'}{i'} = \frac{3m(1-m^2)}{1+3m^2}$$

oder

$$\Delta^2 = \frac{3m(1-m^2)}{1+3m^2} \cdot \frac{i'}{j'}. \tag{5}$$

Setzt man nun in Gleichung (4)

$$m^2 = \frac{3i'\varrho + 2j'}{3i'\varrho - 6j'},$$

so geht sie über in die cubische Resolvente g, nämlich:

$$g(\varrho) = \varrho^3 - \frac{i'}{2}\varrho - \frac{j'}{3} = 0.$$

Die Gleichung (5) aber geht durch dieselbe Substitution über in:

$$\Delta^2 = -\frac{\varrho}{2m}.$$

Man erhält also für das Quadrat des Moduls Δ drei Werthe. Dass sich nur das Quadrat desselben bestimmt, kann dadurch erklärt werden, dass die Normalform ungeändert bleibt, wenn man m durch $-m$ und gleichzeitig y durch $y\sqrt{-1}$ ersetzt. (Vergl. auch Clebsch, binäre Formen, Seite 168.)

182. *Rationale Transformation der biquadratischen Form.* Sowohl die Transformation mit Hilfe der linearen Factoren r_x, s_x von φ_x^2, als auch jene, die sich auf die directe Berechnung des Parameters m stützte, konnte nur auf irrationalem Wege, nämlich durch Lösung einer cubischen Resolvente hergestellt werden. Hermite hat im Crelle'schen Journal Bd. 52 eine rationale Methode angegeben, die wir im Folgenden klarlegen wollen. Bezeichnen wir den Quotienten $\frac{\varDelta}{f}$ mit y, so ist nach den Regeln der Differentialrechnung

$$dy = (f \cdot d\varDelta - \varDelta \cdot df) : f^2,$$

oder

$$f^2\,dy = \begin{vmatrix} f, & df \\ \varDelta, & d\varDelta \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} x_1 f_1 + x_2 f_2, & f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \\ x_1 \varDelta_1 + x_2 \varDelta_2, & \varDelta_1 dx_1 + \varDelta_2 dx_2 \end{vmatrix},$$

die Determinante rechts ist aber das Product

$$4 \begin{vmatrix} x_1, & x_2 \\ dx_1, & dx_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1, & f_2 \\ \varDelta_1, & \varDelta_2 \end{vmatrix},$$

dessen zweiter Factor die Functionaldeterminante $(f, \varDelta) = t$ ist. Wir haben also die Beziehung:

$$\frac{1}{4} f^2\,dy = t \cdot (x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1).$$

Quadriren wir auf beiden Seiten und multipliciren mit (-2), so folgt wegen der Identität

$$-2t^2 = \varDelta^3 - \frac{i}{2} \varDelta f^2 + \frac{j}{3} f^3$$

$$-\frac{1}{8} f^4 (dy)^2 = \left(\varDelta^3 - \frac{i\varDelta}{2} f^2 + \frac{j}{3} f^3\right)(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)^2.$$

Dividiren wir mit f^3 die ganze Gleichung und ziehen die Wurzel, so erhalten wir wegen $\frac{\varDelta}{f} = y$

$$\frac{dy\sqrt{-\frac{1}{8}}}{\sqrt{y^3 - \frac{i}{2} y + \frac{j}{3}}} = \frac{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}{\sqrt{\bar{a}_0 x_1^4 + 4\bar{a}_1 x_1^3 x_2 + \cdots \bar{a}_4 x_2^4}}.$$

Setzt man hier noch $y = \frac{j}{i} z$, so kommt:

$$\frac{1}{i}\sqrt{\frac{-j}{8}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{z}{2} + \frac{j^2}{i^3} z^3}} = \frac{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}{\sqrt{\bar{a}_0 x_1^4 + 4\bar{a}_1 x_1^3 x_2 \cdots \bar{a}_4 x_2^4}}.$$

Damit ist der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen rechts auf rationalem Wege in einen Ausdruck dritten Grades transformirt, der nur mehr einen Parameter, nämlich die absolute Invariante enthält.

183. *Das Doppelverhältniss der vier Wurzeln von* $a_x^4 = 0$. Wir haben im Vorhergehenden eine Invariante $\frac{i^3}{j^2}$ kennen gelernt, die sich bei linearer Transformation auch nicht einmal um einen Zahlenfactor ändert. Dieselbe Eigenschaft besitzt bekanntlich auch das Doppelverhältniss von vier Punkten, die man sich durch $a_x^4 = 0$ repräsentirt denken kann. Um nun den Zusammenhang der absoluten Invariante mit dem Doppelverhältniss zu studiren, wählen wir die Form vierter Ordnung in der Legendre'schen Normalform:

$$f = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2) = 1 - (1 + k^2) x^2 + k^2 x^4$$
$$= x_1^4 - (1 + k^2) x_1^2 x_2^2 + k^2 x_2^4,$$

deren Coefficienten der Reihe nach dargestellt sind durch

$$1, \quad 0, \quad \frac{-(1 + k^2)}{6}, \quad 0, \quad k^2.$$

Dann ist:

$$i = \frac{1}{6}(12k^2 + (1 + k^2)^2), \quad j = \frac{1}{36}(k^2 + 1)((k^2 + 1)^2 - 36k^2).$$

Demnach wird:

$$\frac{i^3}{j^2} = 6 \cdot \frac{(12k^2 + (1 + k^2)^2)^3}{((1 + k^2)^2 - 36k^2)^2 (k^2 + 1)^2}.$$

Dividirt man Zähler und Nenner mit k^6, so kommt:

$$\frac{i^3}{j^2} = 6 \cdot \frac{\left(12 + \left(k + \frac{1}{k}\right)^2\right)^3}{\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 \left(\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 - 36\right)^2}.$$

Substituirt man hier 12λ für $\left(k + \frac{1}{k}\right)^2$, so erhält man:

$$\frac{i^3}{j^2} = 6 \cdot \frac{(1 + \lambda)^3}{\lambda(\lambda - 3)^2} \tag{1}$$

Nun sind anderntheils die vier linearen Factoren der Form:

$$(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 - k^2 x_2^2) = 0$$

dargestellt durch:

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 - kx_2 = 0, \quad x_1 + kx_2 = 0,$$

also ihr Doppelverhältniss durch:

$$\varrho = \frac{1 + k}{1 - k} : \frac{-1 + k}{-1 - k} = \frac{1 + k}{1 - k} \cdot \frac{1 + k}{1 - k} = \frac{(1 + k)^2}{(1 - k)^2} = \frac{\left(k + \frac{1}{k}\right)^2}{\left(k - \frac{1}{k}\right)^2}.$$

Daher:

$$\varrho = \frac{3\lambda}{3\lambda - 1}, \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\varrho}{3(\varrho - 1)}.$$

Das Doppelverhältniss steht also in einem directen Zusammenhange

mit der absoluten Invariante, und zwar erhält man durch Substitution von

$$\lambda = \frac{\varrho}{3(\varrho - 1)}$$

in (1) die Beziehung:

$$\frac{i^3}{j^2} = 6 \cdot \frac{3\left(1 + \frac{\varrho}{3(\varrho-1)}\right)^3 (\varrho - 1)}{\varrho\left(\frac{\varrho}{3(\varrho-1)} - 3\right)} = 18 \cdot \frac{(4\varrho - 3)^3}{\varrho(9 - 8\varrho)^2}. \tag{2}$$

Es ergeben sich sonach aus (2) drei Werthe für ϱ resp. λ, und somit sechs Werthe für k wegen der Beziehung $\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = 12\lambda$.

§ 19. Ueber die Formen, für welche $(f, f)^4 = 0$.

184. *Einleitende Bemerkungen.* Wir haben gesehen, dass in dem Formensystem einer Form vierten Grades eine Covariante t auftritt, sechsten Grades in den Variabeln und dritten Grades in den Coefficienten, welche zwei bemerkenswerthe Eigenschaften besitzt: einmal, dass sie in drei conjugirte quadratische Factoren zerfällt, also durch Wurzelziehen auflösbar ist, sodann, dass ihre vierte Ueberschiebung über sich selbst identisch verschwindet. Es liegt die Frage nach dem Zusammenhange dieser beiden Eigenschaften nahe, und Clebsch hatte sich die Aufgabe gestellt, zu untersuchen, ob jede Form sechsten Grades, deren vierte Ueberschiebung über sich selbst verschwindet, in drei conjugirte quadratische Factoren zerfällt. Es zeigte sich (vgl. Clebsch, „Binäre Formen", § 111), dass in der That die eine Eigenschaft die andere involvirt, und somit jede derartige Gleichung sechsten Grades auflösbar ist.

Wir stellen uns hier nach dem Vorgange von Brioschi und Wedekind die allgemeine Frage: Welche Eigenschaften besitzt eine beliebige Form f n^{ten} Grades, für welche $(f, f)^4$ identisch verschwindet?

Hierbei muss natürlich der Grad n von $f > 3$ sein. Die Untersuchung wird ergeben, dass der Bedingung $(f, f)^4 = 0$ ausser den Formen mit $(n - 1)$fachem Factor nur ganz specielle Formen genügen, welche Klein mit den Namen Tetraeder, Octaeder und Ikosaeder belegt hat.

Von diesen Formen haben wir bereits in § 12 gesehen, wie sie sich, sobald sie in einer gewissen Normalform vorliegen, in einfacher Weise in quadratische Factoren spalten lassen.

185. *Die Coefficientenrelationen, die aus $(f, f)^4 = 0$ hervorgehen.* Die Identität $(f, f)^4 = 0$ liefert eine Reihe von Relationen für die

Coefficienten der Form f, die wir in erster Linie zu untersuchen haben, um die Eigenschaften solcher Formen f kennen zu lernen. Diese Relationen sind natürlich nicht alle von einander unabhängig.

Es sei:

$$f = C_0 x_1^n + \binom{n}{1} C_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} C_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + C_n x_2^n = a_x^n$$
$$C_k = a_1^{n-k} a_2^k,$$

dann ist:

$$\begin{aligned}(f, f)^4 &= (ab)^4 a_x^{n-4} b_x^{n-4} \\ &= (ab)^4 (a_1 x_1 + a_2 x_2)^{n-4} (b_1 x_1 + b_2 x_2)^{n-4} \\ &= (ab)^4 \sum_{\lambda, \mu} \binom{n-4}{\mu} \binom{n-4}{\lambda} (a_1 x_1)^{n-\lambda-4} (a_2 x_2)^\lambda (b_1 x_1)^{n-\mu-4} (b_2 x_2)^\mu \\ &= 0.\end{aligned}$$

Da diese Identität für jeden Werth von x gilt, so müssen die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x_2 für sich verschwinden. Greifen wir aus dieser Entwicklung den Coefficienten von x_2^ϱ heraus, wobei also $\varrho = \lambda + \mu$, oder $\mu = \varrho - \lambda$. Er ist dargestellt durch:

$$\begin{aligned}0 &= (ab)^4 \sum \binom{n-4}{\varrho - \lambda} \binom{n-4}{\lambda} a_1^{n-\lambda-4} a_2^\lambda b_1^{n-\varrho+\lambda-4} b_2^{\varrho-\lambda} \\ &= \sum 2 (a_1{}^4 b_2{}^4 - 4 a_1{}^3 a_2 b_1 b_2{}^3 \\ &\qquad + 3 a_1{}^2 a_2{}^2 b_1{}^2 b_2{}^2) \binom{n-4}{\varrho-\lambda} \binom{n-4}{\lambda} a_1^{n-\lambda-4} a_2^\lambda b_1^{n-\varrho+\lambda-4} b_2^{\varrho-\lambda},\end{aligned}$$

oder

$$0 = \sum \binom{n-4}{\varrho-\lambda} \binom{n-4}{\lambda} \left\{ C_\lambda C_{\varrho+4-\lambda} - 4 C_{\lambda+1} C_{\varrho+3-\lambda} + 3 C_{\lambda+2} C_{\varrho+2-\lambda} \right\}, \quad (1)$$

wobei die Summen über alle Werthe λ zu erstrecken sind, für welche die figurirten Zahlen noch Bedeutung haben. Hieraus gehen alle Relationen hervor, welchen die Coefficienten von $f = a_x^n$ genügen müssen, wenn wir der Reihe nach $\varrho = 0$ bis $\varrho = 2n - 8$ setzen. Ihre Anzahl ist also $2n - 7$.

Insbesondere erkennt man, dass die Coefficienten von Formen f mit n-fachen, oder $(n-1)$-fachen Wurzeln immer diese $(2n-7)$ Relationen befriedigen. Denn nehmen wir diese Formen in der Normalform, so kann man sie darstellen durch

$$\left.\begin{aligned} f &= x^n \\ \text{und} \qquad f &= x^{n-1} y \end{aligned}\right\}. \quad (2)$$

Im ersten Falle ist $C_0 = 1$, $C_1 = C_2 \cdots = C_n = 0$;
im zweiten Falle ist $C_1 = 1$, $C_0 = C_2 \cdots = C_n = 0$,

und diese Werthe der C_i befriedigen immer die Gleichungen (1). Die Formen (2) sind also selbstverständliche Formen, für welche $(f, f)^4 = 0$.

186. *Formen f mit zwei- und mehrfachen Wurzeln.* Nehmen wir nun an, dass die Form f eine ν-fache Wurzel, mindestens aber eine Doppelwurzel besitze. Man kann sie dann stets so transformiren, dass die ν ersten Coefficienten verschwinden. Wir dürfen also in diesem Falle f in einer Normalform zu Grunde legen, in welcher

$$C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = \cdots = C_{\nu-1} = 0, \quad \nu > 1. \tag{I}$$

Soll nun für diese Form f auch die Relation

$$(f, f)^4 = 0$$

bestehen, dann können wir zeigen, dass in diesem Falle im Allgemeinen alle weitern Coefficienten, C_ν, $C_{\nu+1} \cdots C_{n-2}$, gleichfalls verschwinden.

Zum Beweise genügt es, wenn wir zeigen, dass unter den Voraussetzungen:

$$(f, f)^4 = 0, \tag{A}$$

$$C_0 = C_1 = C_2 = \cdots = C_{\nu-1} = 0, \tag{B}$$

auch

$$C_\nu = 0$$

ist. Nehmen wir nämlich an $C_\nu \gtrless 0$, dann muss in jener von $2n-7$ Relationen, in welcher vermöge der Bedingungen (B) die Grösse C_ν^2 allein auftritt, ihr Zahlencoefficient identisch null sein. Es lässt sich aber zeigen, dass dieser $\gtrless 0$ ist und sonach die Annahme $C_\nu \gtrless 0$ falsch sein muss.

Ersetzen wir nämlich in der Relation (1) Nr. 185 ϱ durch $2\nu-4$, so geht sie über in

$$0 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=2\nu-4} \binom{n-4}{\lambda}\binom{n-4}{2\nu-4-\lambda}\left\{C_\lambda C_{2\nu-\lambda} - C_{\lambda+1} C_{2\nu-\lambda-1} + 3 C_{\lambda+2} C_{2\nu-\lambda-2}\right\}. \tag{II}$$

In jedem Gliede dieser Relation ist die Summe der Indices der Coefficienten gleich 2ν. Wenn daher der erste Factor eines jeden Gliedes einen Index besitzt, der grösser ist als ν, so enthält nothwendig der andere Factor C einen Index $< \nu$; diese Glieder verschwinden also wegen der Bedingungen (B) und es bleiben nur die Glieder C_ν^2 übrig. Solche Glieder treten aber in einer Relation nur drei auf, nämlich nur, wenn $\lambda = \nu$, dann wird der erste Term der Klammer C_ν^2, ferner wenn $\lambda = \nu - 1$, wobei der zweite, und endlich, wenn $\lambda = \nu - 2$, wobei der dritte Term in C_ν^2 übergeht.

Dabei ist für $\lambda = \nu$ der Zahlencoefficient von C_ν^2 dargestellt durch $\binom{n-4}{\nu}\binom{n-4}{\nu-4}$, und in den beiden andern Fällen durch

$$-4\binom{n-4}{\nu-1}\binom{n-4}{\nu-3}, \quad \text{resp. } 3\binom{n-4}{\nu-2}\binom{n-4}{\nu-2},$$

so dass die Coefficientenrelation (II) übergeht in:

$$C_\nu^2 \left\{ \binom{n-4}{\nu}\binom{n-4}{\nu-4} - 4\binom{n-4}{\nu-1}\binom{n-4}{\nu-3} + 3\binom{n-4}{\nu-2}\binom{n-4}{\nu-2} \right\} = 0.$$

Da wir nun angenommen hatten $C_\nu \gtrless 0$, so müsste der zweite Factor verschwinden. Das ist aber im Allgemeinen nicht der Fall, vielmehr besitzt derselbe den Werth

$$\frac{6(n-3)(n-2)\binom{n-4}{\nu-4}\binom{n-4}{\nu-2}}{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)},$$

wie wir sofort zeigen können.

Es ist nämlich:

$$\binom{m}{\lambda}\binom{m}{\lambda+4} - \binom{m}{\lambda+1}\binom{m}{\lambda+3} = \binom{m}{\lambda}\binom{m}{\lambda+3}\left\{\frac{m-\lambda-3}{\lambda+4} + 1 - \frac{m-\lambda}{\lambda+1} - 1\right\}$$

$$= \binom{m}{\lambda}\binom{m}{\lambda+3}(m+1)\left\{\frac{1}{\lambda+4} - \frac{1}{\lambda+1}\right\}.$$

$$= \frac{-3(m+1)}{(\lambda+4)(\lambda+1)}\binom{m}{\lambda}\binom{m}{\lambda+3}.$$

Ferner ist:

$$\binom{m}{\lambda+1}\binom{m}{\lambda+3} - \binom{m}{\lambda+2}^2 = \binom{m}{\lambda}\binom{m}{\lambda+2}\left\{\frac{m-\lambda-2}{\lambda+3} + 1 - \frac{m-\lambda-1}{\lambda+2} - 1\right\}$$

$$= \frac{-(m+1)}{(\lambda+3)(\lambda+2)}\binom{m}{\lambda+1}\binom{m}{\lambda+2}.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit -3 und addiren sie zur vorhergehenden, dann erhalten wir:

$$\binom{m}{\lambda}\binom{m}{\lambda+4} - 4\binom{m}{\lambda+1}\binom{m}{\lambda+3} + 3\binom{m}{\lambda+2}^2$$

$$= 3(m+1)\left\{\frac{\binom{m}{\lambda+1}\binom{m}{\lambda+2}}{(\lambda+3)(\lambda+2)} - \frac{\binom{m}{\lambda}\binom{m}{\lambda+3}}{(\lambda+1)(\lambda+4)}\right\}$$

$$= \frac{3(m+1)\binom{m}{\lambda}\binom{m}{\lambda+2}}{(\lambda+3)(\lambda+1)}\left\{\frac{m-\lambda}{\lambda+2} + 1 - \frac{m-\lambda-2}{\lambda+4} - 1\right\}$$

$$= \frac{6(m+1)(m+2)\binom{m}{\lambda}\binom{m}{\lambda+2}}{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)}.$$

Ersetzen wir hierin m durch $n-4$ und $\lambda+4$ durch ν, so geht diese Gleichung über in

$$\binom{n-4}{\nu-4}\binom{n-4}{\nu} - 4\binom{n-4}{\nu-3}\binom{n-4}{\nu-1} + 3\binom{n-4}{\nu-2}^2$$

$$= \frac{6(n-3)(n-2)\binom{n-4}{\nu-4}\binom{n-4}{\nu-2}}{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}, \tag{III}$$

was wir zu beweisen hatten. Die Grösse rechts ist stets von null verschieden, sobald $n > 3$, wie wir vorausgesetzt, und ν solche Werthe

hat, dass überhaupt dieser Relation noch eine Bedeutung zukommt. Dies trifft nicht mehr ein, wenn $\nu = 2, 3, n-2, n-3$; und diese Fälle sind noch speciell zu untersuchen.

Im Allgemeinen verschwindet der Zahlencoefficient von C_ν^2 nicht, folglich muss C_ν selbst verschwinden.

187. *Untersuchung dieser Grenzfälle.* Besitzt ν den Werth 2, dann kann wegen der figurirten Zahlen in der Relation

$$0 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=2\nu-4} \binom{n-4}{\lambda}\binom{n-4}{2\nu-4-\lambda}\left\{C_\lambda C_{2\nu-\lambda} - 4C_{\lambda+1}C_{2\nu-\lambda-1} + 3C_{\lambda+2}C_{2\nu-\lambda-2}\right\} \quad \text{(I)}$$

die Grösse λ den Werth 0 nicht übersteigen. Die Relation geht also, weil nach Voraussetzung $C_0 = C_1 = C_{\nu-1} = 0$, über in

$$0 = 3\binom{n-4}{0}\binom{n-4}{0}C_2^2 = 3C_2^2,$$

folglich:

$$C_2 = 0.$$

Besitzt ν den Werth 3, so kann λ die Werthe 0, 1, 2 annehmen. In der Relation verschwinden dann, weil nach Voraussetzung $C_0 = C_1 = C_2 = C_{\nu-1} = 0$ alle Glieder bis auf die Glieder C_3^2, deren eines für $\lambda = 1$ aus $3C_{\lambda+2}C_{2\nu-\lambda-2}$ und deren anderes aus $-4C_{\lambda+1}C_{2\nu-\lambda-1}$ für $\lambda = 2$ hervorgeht.

Der Zahlencoefficient von C_3^2 wird also:

$$3\binom{n-4}{1}\binom{n-4}{1} - 4\binom{n-4}{2}\binom{n-4}{0} = -3(n-4)(n-2).$$

Dieser Zahlencoefficient kann in der That verschwinden, wenn $n = 4$, oder $n = 2$ ist. Im ersten Falle ist aber der Coefficient C_3 bereits der vorletzte Coefficient C_{n-1}, von dem wir überhaupt nicht behauptet haben, dass er verschwinden muss, und im zweiten Falle existirt kein Coefficient C_3 mehr.

Besitzt ν den Werth $n-3$, so geht für diesen Fall die Relation (I) über in

$$0 = \sum \binom{n-4}{\lambda}\binom{n-4}{2n-10-\lambda}\left\{C_\lambda C_{2n-6-\lambda} - 4C_{\lambda+1}C_{2n-7-\lambda} + 3C_{\lambda+2}C_{2n-8-\lambda}\right\}.$$

Hierin muss $n-4 \geq \lambda \geq n-6$ sein, gemäss der beiden figurirten Zahlen $\binom{n-4}{\lambda}$ resp. $\binom{n-4}{2n-10-\lambda}$. Die Grösse λ kann also nur die Werthe $n-4$, $n-5$, $n-6$ annehmen, und da nach Voraussetzung alle Coefficienten von $C_{\nu-1} = C_{n-4}$ incl. abwärts verschwinden, so reducirt sich die Relation auf die beiden Glieder

$$-4\binom{n-4}{n-4}\binom{n-4}{n-6}C_{n-3}^2 + 3\binom{n-4}{n-5}\binom{n-4}{n-5}C_{n-3}^2 = 0,$$

oder, was dasselbe ist, auf:

$$\left\{-4\binom{n-4}{2} + 3\binom{n-4}{1}^2\right\}C_{n-3}^2 = 0.$$

Der Coefficient von C_{n-3}^2 verschwindet aber nur für $n = 4$ oder $n = 2$, wie wir soeben gesehen haben. Im ersten Falle ist aber ohnehin auch $C_{n-3} = C_1$ nach Voraussetzung null, und im zweiten Falle existirt C_{n-3} überhaupt nicht.

Besitzt endlich ν den Werth $n - 2$, so kann wegen der figurirten Zahlen in der Relation:

$$0 = \sum \binom{n-4}{\lambda} \binom{n-4}{2n-8-\lambda} \left\{ C_\lambda C_{2n-4-\lambda} - 4 C_{\lambda+1} C_{2n-5+\lambda} + 3 C_{\lambda+2} C_{2n-6-\lambda} \right\}$$

die Grösse λ von $n - 4$ nicht verschieden sein; und da alle Coefficienten von $C_{\nu-1} = C_{n-3}$ incl. abwärts verschwinden, so reducirt sich diese Relation auf

$$3 \binom{n-4}{n-4} \binom{n-4}{n-4} C_{n-2}^2 = 3 C_{n-2}^2 = 0,$$

d. h.

$$C_{n-2} = 0.$$

Es muss also auch dieser Coefficient nach unsern Voraussetzungen verschwinden, während C_{n-1} und C_n von null verschieden sein können. Ist dies aber der Fall, so reducirt sich f auf

$$f = x_2^{n-1}(C_{n-1} x_1 + C_n x_2) = \xi^{n-1} \eta;$$

f ist also dann eine der selbstverständlichen Formen.

188. *Formen f ohne mehrfache Wurzeln.* Wir sahen soeben, dass keine Form f mit mehrfachen Wurzeln existirt, abgesehen von den selbstverständlichen Formen, welche der Bedingung $(f, f)^4 = 0$ genügen. Es erübrigt also noch, die Formen mit einfachen Wurzeln zu untersuchen. Hiebei setzen wir f in einer Normalform voraus, in welcher

$$C_0 = 0, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \tag{1}$$

was unter Adjunction einer Wurzel von $f = 0$ immer zu erreichen möglich ist, ohne der Allgemeinheit der Form Eintrag zu thun. Es lässt sich alsdann zeigen:

> „Ist der Grad n der Form f von 4, 6 oder 12 verschieden, so verschwindet, sobald $(f, f)^4 = 0$ ist, unter der Voraussetzung (1) nicht nur C_2, sondern auch $C_3, C_4 \cdots C_n$, d. h. die Form f ist eine der selbstverständlichen Formen $f = x^{n-1} y$."

Zum Beweise zeigen wir wiederum, dass, wenn alle Coefficienten $C_3, C_4, \ldots C_{\nu-1}, \nu > 1$, verschwinden, auch der Coefficient C_ν verschwinden muss. Wir haben nur zu sorgen, dass in der allgemeinen Coefficientenrelation die Summe der Indices jedes Gliedes gleich $\nu + 1$ ist, damit stets ein Coefficient C_i, $i < \nu$, mit einem Coefficienten C_k, $k > \nu$, verbunden auftritt, abgesehen von den Gliedern $C_\nu \cdot C_1$.

Während alsdann die ersten Glieder nach Voraussetzung verschwinden müssen, werden zunächst die Grössen $C_\nu C_1 \gtrless 0$ sein, so dass, wenn gleichwohl die Relation $(f, f)^4 = 0$ bestehen soll, der Zahlencoefficient von $C_\nu C_1$ nicht von null verschieden sein kann. Damit nun aber die Summe der Indices gleich $\nu + 1$ sei, setzen wir in der allgemeinen Relation $\varrho = \nu - 3$; sie geht dann über in

$$0 = \sum \binom{n-4}{\nu-3-\lambda}\binom{n-4}{\lambda}\left\{C_\lambda C_{\nu+1-\lambda} - 4 C_{\lambda+1} C_{\nu-\lambda} + 3 C_{\lambda+2} C_{\nu-1-\lambda}\right\}$$

und reducirt sich gemäss den vorausgegangenen Bemerkungen auf

$$\binom{n-4}{\nu-4}\binom{n-4}{1} C_1 C_\nu - 4 \binom{n-4}{\nu-3}\binom{n-4}{0} C_1 C_\nu = 0, \tag{2}$$

welche zwei Glieder aus ihr für $\lambda = 1$ und $\lambda = 0$ entstehen.

Die Gleichung (2) geht aber wegen $C_1 = 1$ über in

$$\binom{n-4}{\nu-4}\left\{n - 4 - 4 \cdot \frac{n-\nu}{\nu-3}\right\} C_\nu = 0,$$

oder

$$\frac{n}{\nu-3} \cdot \binom{n-4}{\nu-4}\left\{\nu - 7 + \frac{12}{n}\right\} C_\nu = 0.$$

Verschwindet nun der Zahlencoefficient von C_ν nicht, so muss C_ν verschwinden. Dieser Zahlencoefficient kann aber nur dann gleich null werden, wenn n ein Theiler von 12 ist, also wenn n gleich 4, 6 oder 12 ist. Es können also ausser den selbstverständlichen Formen mit mehrfachen Wurzeln in der That Formen vierten, sechsten und zwölften Grades auftreten, welche der Bedingung $(f, f)^4 = 0$ genügen. Wir wollen daher im Folgenden diese speciellen Fälle $n = 4, 6, 12$ noch eingehender untersuchen.

189. *Die Formen des Tetraeders und Octaeders.* Wir setzen hier wie im Folgenden voraus, dass die Form vierten Grades f, welche der Bedingung

$$(f, f)^4 = 0$$

genügt, wiederum in einer Normalform gegeben sei, in welcher

$$C_0 = 0,\ C_1 = 1,\ C_2 = 0$$

ist. Dann liefert die Bedingung $(f, f)^4 = i = 0$ unmittelbar

$$C_0 C_4 - 4 C_1 C_3 + 3 C_2^2 = 0,$$

oder

$$-4 C_1 C_3 = 0,$$

also

$$C_3 = 0.$$

Die betreffende Form f hat daher die Gestalt:

$$f = y(4x^3 + C_4 y^3). \tag{1}$$

Ich möchte hiebei erwähnen, dass man gewöhnlich die Tetraederform in folgender Normalform

$$f = x^4 + 6m\,x^2y^2 + y^4$$

darstellt (vergl. Nr. 180), wobei m wegen $i = (f, f)^4 = 0$ vermöge Gleichung (4) Nr. 180 den Werth

$$m = \frac{1}{3}\sqrt{-3}$$

besitzt. Es ist dann

$$f = x^4 \pm 2\sqrt{-3}\cdot x^2y^2 + y^4. \tag{2}$$

Die Form (1) geht in die Form (2) über durch eine Transformation, deren Modul Δ der Gleichung

$$\Delta^2 = -\frac{\varrho}{2m},$$

genügt, wobei $\varrho = \varepsilon^k\sqrt[3]{-\frac{1}{3}j} = \varepsilon^k\sqrt[3]{-2C_4}$, und ε^k eine dritte Wurzel der Einheit ist. (Vergl. auch Nr. 181.)

Anmerkung. Das Product der beiden Formen

$$f = x^4 \pm 2\sqrt{-3}\cdot x^2y^2 + y^4$$

liefert die Würfelform $x^8 + 14x^4y^4 + y^8$. (Vergl. Nr. 141.)

Um die Coefficienten der Form sechsten Grades, welche der Bedingung $(f, f)^4 = 0$ genügt, zu berechnen, gehen wir wieder zurück auf die allgemeine Coefficientenrelation, die sich für $n = 6$ in der Form

$$0 = \sum\binom{2}{\varrho-\lambda}\binom{2}{\lambda}\left\{C_\lambda C_{\varrho+4-\lambda} - 4C_{\lambda+1}C_{\varrho+3-\lambda} + 3C_{\lambda+2}C_{\varrho+2-\lambda}\right\}$$

darstellt. Wir erhalten aus ihr vier Relationen, für $\varrho = 0, 1, 2, 3$, wobei λ entsprechend die Werthe 0; 0, 1; 0, 1, 2; 1, 2 annehmen kann. Es ergiebt sich, wenn wiederum $C_0 = 0$, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ gesetzt wird:

$$C_0C_4 - 4C_1C_3 + 3C_2^2 = 0, \tag{1}$$

also $\quad C_3 = 0;$

$$2\{C_0C_5 - 4C_1C_4 + 3C_2C_3\} + 2\{C_1C_4 - 4C_2C_3 + 3C_3C_2\} = 0, \tag{2}$$

also $\quad (-2\cdot 4 + 2)\,C_1C_4 = 0,$

d. h. $\quad C_4 = 0;$

$$\{C_0C_6 - 4C_1C_5 + 3C_2C_4\} + 4\{C_1C_5 - 4C_2C_4 + 3C_3^2\} + \{C_2C_4 - 4C_3^2 + 3C_4C_2\} = 0, \tag{3}$$

oder $\quad (-4 + 4)\,C_1C_5 = 0,$

d. h. C_5 braucht nicht zu verschwinden;

$$2\{C_1C_6 - 4C_2C_5 + 3C_3C_4\} + 2\{C_2C_5 - 4C_3C_4 + 3C_4C_3\} = 0, \tag{4}$$

d. h. $\quad C_6 = 0.$

Also hat das Octaeder die Form:

$$xy\,(x^4 + C_5 y^4) = f,$$

oder für $y_1 = \sqrt[4]{C_5}\, y$

$$f = \frac{1}{\varrho}\, x y_1\, (x^4 + y_1^4),$$

wo ϱ eine Constante ist. (Vergl. auch Nr. 138.)

190. *Die Ikosaederform.* In derselben Weise wie vorhin, berechnet man der Reihe nach die Coefficienten der Form $f = a_x^{12}$, welche der Bedingung $(f, f)^4 = 0$ genügt. Die allgemeine Coefficientenrelation wird hiebei

$$0 = \sum \binom{8}{\lambda}\binom{8}{\varrho-\lambda}\left\{C_\lambda C_{\varrho+4-\lambda} - 4\,C_{\lambda+1} C_{\varrho+3-\lambda} + 3\,C_{\lambda+2} C_{\varrho+2-\lambda}\right\}$$

und es genügt, wenn wir hieraus die zehn Relationen bilden, die sich für $\varrho = 0$ bis $\varrho = 9$ ergeben. Unter der Voraussetzung $C_0 = 0$, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ findet man alsdann:

Für $\varrho = 0$ ist der Coefficient von $C_1 C_3$ die Zahl $-\;4$, also $C_3 = 0$.
„ $\varrho = 1$ „ „ „ „ $C_1 C_4$ „ „ -24, „ $C_4 = 0$
„ $\varrho = 2$ „ „ „ „ $C_1 C_5$ „ „ -48, „ $C_5 = 0$
„ $\varrho = 3$ „ „ „ „ $C_1 C_6$ „ „ 0, „ $C_6 \lesseqgtr 0$
„ $\varrho = 4$ „ „ „ „ $C_1 C_7$ „ „ 168, „ $C_7 = 0$
„ $\varrho = 5$ „ „ „ „ $C_1 C_8$ „ „ 336, „ $C_8 = 0$
„ $\varrho = 6$ „ „ „ „ $C_1 C_9$ „ „ 344, „ $C_9 = 0$
„ $\varrho = 7$ „ „ „ „ $C_1 C_{10}$ „ „ 192, „ $C_{10} = 0$.

Für $\varrho = 8$ ergiebt sich die Relation:

$$(8 \cdot 8 - 4)\, C_1 C_{11} + \{28^2 - 4 \cdot 56^2 + 3 \cdot 70^2\}\, C_6^2 = 0$$
$$= 60\,\{C_1 C_{11} + 49 C_6^2\} = 0,$$

oder

$$C_{11} + 49 C_6^2 = 0.$$

Der Coefficient C_{11} ist also linear von C_6^2 abhängig. Für $\varrho = 9$ erhält man endlich:

$$8\, C_1 C_{12} = 0, \quad \text{also} \quad C_{12} = 0.$$

Die Ikosaederform ist demnach dargestellt durch:

$$f = 12 C_1 x^{11} y + 12 \cdot 11 \cdot 7\, C_6^2 x^6 y^6 - 49 \cdot 12 C_6^2 x y^{11},$$

oder wegen $C_1 = 1$

$$\frac{1}{12} f = xy\,(x^{10} + 11 \cdot 7\, C_6\, x^5 y^5 - 49 C_6^2\, x y^{10}).$$

Setzen wir hierin noch $y_1 = \sqrt[5]{7\, C_6} \cdot y$, so erhalten wir die bekannte Form:

$$\frac{\sqrt[5]{7C_0}}{12}\cdot f = xy_1(x^{10} + 11\,x^5y_1{}^5 - y_1{}^{10}).$$

Vergleiche auch Nr. 142, Anmerkung.

191. *Allgemeine Betrachtungen über die regulären Körper.* Wir haben somit gesehen, dass die Formen

$$f = xy\,(x^{10} + 11x^5y^5 - y^{10})$$
$$f = xy\,(x^4 + y^4)$$
$$f = x^4 \pm 2\,i\sqrt{3}\,x^2y^2 + y^4$$

und die daraus durch lineare Transformation hervorgehenden Formen die einzigen sind, für welche $(f, f)^4$ identisch verschwindet. Das Formensystem dieser Formen reducirt sich nach den in § 20 zu entwickelnden Gesetzen direct auf die drei Covarianten f, $(f, f)^2 = H$, $((f, f)^2, f) = T$ und eine Invariante A. Da nun T eine schiefe Covariante, so muss, weil sich das Quadrat derselben stets durch gerade Formen ausdrücken lässt, und aus Gründen der Homogeneität in den Variabeln für das Ikosaeder eine lineare Relation zwischen f^5, H^3, T^2, für das Octaeder eine ebensolche zwischen f^4, H^3, T^2, und für das Tetraeder eine solche zwischen f^3, H^3, T^2 bestehen. In allen drei Gleichungen treten natürlich noch gewisse Potenzen der Invariante A auf, damit auch die Homogeneität in den Coefficienten gewahrt bleibt*).

Denken wir uns nun jede der Relationen mit H^3 dividirt, so sind

$$\frac{Cf^5}{H^3},\quad \frac{C_1f^4}{H^3},\quad \frac{C_2f^3}{H^3}$$

Formen nullten Grades in den Variabeln, und wenn C, C_1, C_2 geeignete Potenzen der betreffenden Invarianten, auch nullten Grades in den Coefficienten. Man nennt diese Formen von der Dimension null in den Variabeln und Coefficienten die P a r a m e t e r des I k o s a e d e r s, resp.

*) Zu den regulären Körpern gelangt man auch, wenn man diese Relationen als Definitionsgleichungen auffasst. Halphen hat gezeigt (siehe „Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables", Paris 1883): Die Formen, welche der Gleichung

$$c_1 f^\lambda + c_2 H^\nu + c_3 T^\mu = 0$$

genügen, sind ausser den allgemeinen cubischen und biquadratischen Formen noch die regulären Körper und die aus diesen Formen durch die Substitution $x_1 = \varphi(y)$, $x_2 = \psi(y)$ hervorgehenden Formen. Er nennt die cubischen, biquadratischen und regulären Formen zum Unterschied von den übrigen „primitive Formen". Diese primitiven Formen, sowie die aus ihnen durch die erwähnte Transformation hervorgehenden genügen auch den Gleichungen:

$$(f, T)^2 = 0,\quad (T, H)^2 = 0,\quad (H, f)^2 = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$(f, T) = \varrho_1 H^\lambda,\quad (T, H) = \varrho_2\cdot f^\mu,\quad (H, f) = \varrho_3\cdot T^\nu. \qquad \text{(II)}$$

Octaeders oder Tetraeders und bezeichnet sie mit ϱ. Man könnte ebenso den andern Quotienten $\frac{T^2}{H^3}$ als Parameter einführen; denn vermöge der linearen Relation ist der eine bekannt, wenn der andere Quotient gegeben ist.

Der Parameter ϱ wird jedesmal null, wenn f verschwindet; denn H und f können im Allgemeinen keinen Factor gemeinschaftlich haben, da ja sowohl die Discriminante von f als auch die Resultante von H und f eine Potenz der einzigen im System nicht verschwindenden Invariante A sein müssen.

Wenn es also gelingt, diese Functionen

$$\frac{Cf^5}{H^3} = \varrho, \quad \frac{C_1 f^4}{H^3} = \varrho, \quad \frac{C_2 f^3}{H^3} = \varrho$$

umzukehren, also $x = \frac{x_1}{x_2}$ in Function von ϱ darzustellen, etwa

$$x = \frac{x_1}{x_2} = \vartheta(\varrho),$$

so ist damit auch unmittelbar die Auflösung des Ikosaeders, Octaeders und Tetraeders gegeben. Die Functionen $\vartheta(\varrho)$ nennt Klein die Irrationalitäten des Ikosaeders, Octaeders und Tetraeders. Die Berechnung der Ikosaederirrationalität verlangt die Auflösung einer Gleichung sechzigsten Grades, und ihre Darstellung ist nur auf transcendentem Wege möglich. Dagegen können die beiden andern durch Wurzelziehen hergestellt werden; wir wollen uns daher mit der Berechnung derselben nun beschäftigen und zwar einmal für die Normalformen des Octaeders und Tetraeders, dann aber auch für die allgemeinen Formen sechsten beziehungsweise achten Grades.

192. *Berechnung der Octaederirrationalität für die Normalform.* Die Covariante H der Form

$$f = xy(x^4 + y^4)$$

besitzt den Werth

$$H = x^8 + 14x^4y^4 + y^8. \quad \text{(Vgl. Nr. 189, Anm.)}$$

Der Octaederparameter ist also, wenn wir die Invariante C_1 in die Grösse ϱ hereinziehen, dargestellt durch

$$\frac{x^4y^4(x^4+y^4)^4}{(x^8+14x^4y^4+y^8)^3} = \varrho.$$

Die Grösse $\varrho = \frac{x}{y}$ genügt also einer Gleichung vierundzwanzigsten Grades. Um sie zu lösen, dividiren wir zunächst Nenner und Zähler der linken Seite mit $x^{12}y^{12}$ und erhalten, wenn wir im Zähler noch quadriren:

$$\frac{\left(\frac{x^4}{y^4} + 2 + \frac{y^4}{x^4}\right)^2}{\left(\frac{x^4}{y^4} + 14 + \frac{y^4}{x^4}\right)^3} = \varrho,$$

oder, wenn wir nun $\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} = \eta - 14$ (I)

setzen: $(\eta - 12)^2 = \varrho \cdot \eta^3.$ (II)

Hieraus lässt sich η berechnen. Die Gleichung (I) liefert alsdann eine quadratische Gleichung für $\frac{x^4}{y^4} = \xi^4$, so dass sich endlich ξ in der Form darstellt

$$\xi = \varepsilon^k \sqrt[4]{\frac{\eta_i - 14 \pm \sqrt{\eta_i^2 - 28\eta_i + 192}}{2}} = \vartheta(\varrho), \qquad \text{(III)}$$

wobei ε^k eine der vier Wurzeln $\pm\sqrt{\pm i}$ und η_i eine der drei Wurzeln von (II) ist.

193. *Berechnung der Tetraederirrationalität für die Normalform.* Wir bezeichnen das Tetraeder

$$f = x^4 \pm 2i\sqrt{3}\,x^2y^2 + y^4$$

mit u, wenn das obere Vorzeichen, mit v, wenn das untere Vorzeichen gemeint ist. Die Hesse'sche Form H von u fällt dann mit v, und umgekehrt die Hesse'sche Form H von v mit u bis auf eine Constante zusammen. Die Gleichung für die Tetraederirrationalität ist also dargestellt durch

$$\frac{u^3}{v^3} = \varrho,$$

oder

$$\frac{u}{v} = \frac{(x^4 + 2i\sqrt{3}\,x^2y^2 + y^4)}{(x^4 - 2i\sqrt{3}\,x^2y^2 + y^4)} = \sqrt[3]{\varrho}.$$

Hieraus folgt, wenn ε die dritte Wurzel der Einheit bezeichnet, nach bekannten Proportionsgesetzen:

$$\frac{\varepsilon u - \varepsilon^2 v}{\varepsilon^2 u - \varepsilon v} = \frac{\varepsilon\sqrt[3]{\varrho} - \varepsilon^2}{\varepsilon^2\sqrt[3]{\varrho} - \varepsilon}. \qquad (1)$$

Weil aber $\varepsilon - \varepsilon^2 = i\sqrt{3},$

so geht die linke Seite der Gleichung (1) über in

$$-\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}\right)^2.$$

Demnach erhält man:

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \pm\sqrt{-\frac{\varepsilon\sqrt[3]{\varrho} - \varepsilon^2}{\varepsilon^2\sqrt[3]{\varrho} - \varepsilon}},$$

oder nach bekannten Methoden

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{1 \pm \sqrt{-\frac{\varepsilon\sqrt[3]{\varrho} - \varepsilon^2}{\varepsilon^2\sqrt[3]{\varrho} - \varepsilon}}}{-1 \pm \sqrt{-\frac{\varepsilon\sqrt[3]{\varrho} - \varepsilon^2}{\varepsilon^2\sqrt[3]{\varrho} - \varepsilon}}}.$$

Die Tetraederirrationalität ist also schliesslich dargestellt durch:

$$\xi = \frac{x}{y} = \pm \sqrt{\frac{\pm\sqrt{\varepsilon^2\sqrt[3]{\varrho} - \varepsilon} \pm \sqrt{-\varepsilon\sqrt[3]{\varrho} + \varepsilon^2}}{\pm\sqrt{-\varepsilon\sqrt[3]{\varrho} + \varepsilon^2} \mp \sqrt{\varepsilon^2\sqrt[3]{\varrho} - \varepsilon}}} = \vartheta(\varrho).$$

194. *Auflösung der allgemeinen Octaedergleichung.* Es sei nun eine Form

$$f = \bar{a}_0 x_1^6 + 6\bar{a}_1 x_1^5 x_2 + \cdots \bar{a}_6 x_2^6$$

gegeben, welche die Eigenschaft besitzt, dass

$$(f, f)^4 = 0$$

ist. Wir bilden den zugehörigen Octaederparameter

$$\frac{C f^4}{H^3} = \varphi(x) = \varrho \cdot$$

Die gebrochene Function $\varphi(x)$ ist vom nullten Grade in x, und wenn $C = (f, f)^6$, auch vom nullten Grade in den Coefficienten. Bei einer linearen Transformation dieses Parameters hebt sich, da im Nenner und Zähler gleichviel Klammerfactoren sich befinden, die Transformationsdeterminante weg.

Denkt man sich daher die Transformation von f in die Normalform ausgeführt, wobei $f(x)$ in $f'(y)$, $H(x)$ in $H'(y)$, $\varphi(x)$ in $\varphi'(y)$ und C in C' übergeht, so besteht direct die Gleichung

$$\varphi(x) = \varphi'(y) = \varrho. \tag{1}$$

Die Grösse y ist die Octaederirrationalität, $y = \vartheta(\varrho)$, oder auch

$$y = \vartheta(\varphi(x)). \tag{2}$$

Ersetzen wir nun die Variable x durch einen festen numerischen Werth ξ, dem der Werth η von y entsprechen möge, so geht diese Gleichung über in:

$$\eta = \vartheta(\varphi(\xi)). \tag{3}$$

Ist insbesondere α eine Wurzel der Gleichung $\varphi(\xi) = \varrho = 0$, so ist der dem α entsprechende Werth von y dargestellt durch

$$\beta = \vartheta(\varphi(\alpha)). \tag{4}$$

Da nun $\varphi'(y)$ durch lineare Transformation aus $\varphi(x)$ hervorgegangen ist, so entspricht demnach dem Werthe

$$\xi + \lambda\alpha \quad \text{der Werth} \quad \eta + \lambda\beta$$

und die Gleichung (1) geht durch Substitution dieser entsprechenden Werthe über in

$$\varphi(\xi + \lambda\alpha) = \varphi'(\eta + \lambda\beta) \tag{5}$$

oder

$$\frac{C \cdot f^4(\xi + \lambda\alpha)}{H^3(\xi + \lambda\alpha)} = \frac{C' \cdot f'^4(\eta + \lambda\beta)}{H'^3(\eta + \lambda\beta)}.$$

Es müssen demnach Zähler und Nenner beiderseits einander proportional sein, d. h. es müssen die Gleichungen bestehen:

$$C \cdot f^4(\xi + \lambda\alpha) = m \cdot C' \cdot f'(\eta + \lambda\beta)$$
$$H^3(\xi + \lambda\alpha) = m \cdot H'^3(\eta + \lambda\beta).$$

Hieraus folgt durch Vergleichung der Coefficienten von λ^1

$$C \cdot f^3(\xi) \cdot f_\alpha(\xi) = m \cdot C' \cdot f'^3(\eta) \cdot f'_\beta(\eta)$$
$$H^2(\xi) H_\alpha(\xi) = m \cdot H'^2(\eta) \cdot H'_\beta(\eta).$$

Dividirt man die beiden Gleichungen, so kommt:

$$C \cdot f^3(\xi) \cdot f(\xi)_\alpha \cdot H'^2(\eta) H'_\beta(\eta) - C' \cdot f'^3(\eta) f'_\beta(\eta) \cdot H^2(\xi) H_\alpha(\xi) = 0. \quad (6)$$

Hierin ist ξ eine Constante, etwa $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$. Berechnet man zu diesem Werthe von ξ die Grösse η vermöge $\eta = \vartheta(\varphi(\xi))$, so liefert, weil auch $\beta = \vartheta(\varphi(\alpha)) = \vartheta(0)$ eine völlig bekannte Grösse, die Relation (6) eine lineare Bestimmungsgleichung für die Wurzel α der Gleichung $\varphi(x) = 0$, deren Wurzeln mit den Wurzeln von $f(x) = 0$ übereinstimmen.

Es ist also auf diese Weise möglich, die Wurzeln der allgemeinen Octaedergleichung rational durch die Wurzeln der Normalform und bekannte Grössen darzustellen.

Anmerkung. Nach Art der Gleichung (6) lassen sich auch die Wurzeln der allgemeinen Ikosaederform durch die Wurzeln der Normalform und bekannte Grössen ausdrücken.

195. *Auflösung der Gleichung vierten Grades.* Ist die gegebene Gleichung vierten Grades $f = 0$ von vornherein eine Tetraedergleichung, d. h. genügt f der Bedingung $(f, f)^4 = (ab)^4 = i = 0$, so kann man genau das nämliche Verfahren zur Auflösung derselben einschlagen, das wir vorhin bei der Octaedergleichung verfolgten.

Man kann indess auch die Auflösung einer beliebigen Gleichung vierten Grades

$$f = a_x^4 = 0$$

mit Hilfe der Tetraederirrationalität bewerkstelligen. Der Gedanke, der uns hierbei leitet, entspringt aus der Thatsache, dass man, von einer Originalform f ausgehend, stets zwei Tetraederformen sich verschaffen kann, nämlich

$$F = \Delta + \lambda_1 f, \quad F_1 = \Delta + \lambda_2 f,$$

in denen Δ das bekannte Symbol für die Hesse'sche Covariante und

λ_1 und λ_2 die Wurzeln der Gleichung*)

$$i_{\varDelta+\lambda f} = \frac{i^2}{6} + 2\lambda j + i\lambda^2 = 0 \tag{1}$$

bedeuten.

Da nun F und F_1 Tetraederformen sind, so müssen sie sich durch lineare Transformation in die Formen $u = y_1^4 + 2\sqrt{-3}\cdot y_1^2 y_2^2 + y_2^4$ und $v = y_1^4 - 2\sqrt{-3}\, y_1^2 y_2^2 + y_2^4$ bringen lassen. Alsdann ist:

$$\varDelta + \lambda_1 f = r \cdot u \tag{2}$$

$$\varDelta + \lambda_2 f = s \cdot v, \tag{3}$$

wobei r und s noch zu ermittelnde Constante sind. Zu ihrer Berechnung können wir unter anderm die Hesse'schen Formen von (2) und (3) benutzen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \varDelta_{\varDelta+\lambda_1 f} &= r^2 \cdot (u, u)^2 \\ &= r^2 \cdot \frac{48\sqrt{-3}}{72} \cdot v = r^2 \cdot \frac{2\sqrt{-3}}{3} \cdot v. \end{aligned}$$

Es ist aber nach Nr. 171

$$\varDelta_{\varDelta+\lambda_1 f} = \left(\lambda_1^2 - \frac{i}{6}\right)\varDelta + \left(\frac{j}{3} + \frac{i}{3}\lambda_1\right)\cdot f. \tag{4}$$

Demnach hat man:

$$\left(\lambda_1^2 - \frac{i}{6}\right)\left\{\varDelta + \frac{1}{3}\cdot\frac{j+\lambda_1 i}{\lambda_1^2 - \frac{i}{6}} f\right\} = \frac{2r^2\sqrt{-3}}{3}\cdot v.$$

Diese Gleichung ist eine Identität; es muss also insbesondere

$$\varDelta + \frac{1}{3}\cdot\frac{j+\lambda_1 i}{\lambda_1^2 - \frac{i}{6}} f = \varDelta + \lambda_2 f$$

und

$$\left(\lambda_1^2 - \frac{i}{6}\right) s = \frac{2r^2\sqrt{-3}}{3} \tag{5}$$

sein, vermöge der Gleichung (3). Ersetzt man in (5) die Grösse $\frac{i}{6}$ durch $\lambda_1\lambda_2$, was nach Gleichung (1) erlaubt ist, so kommt:

$$\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) s = r^2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{-3}.$$

Entsprechend ergiebt sich bei Bildung der Hesse'schen Form von Gleichung (3)

$$\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) r = s^2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{-3}. \tag{6}$$

*) Man bemerke, dass die Discriminante dieser Gleichung auch die Discriminante der biquadratischen Form $f = a_x^4$ selbst ist. (Vgl. Nr. 173.)

Aus diesen beiden letzten Gleichungen folgt durch Division:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{r^3}{s^3}$$

und damit ist der Quotient $\frac{r}{s}$ bis auf eine dritte Wurzel der Einheit vollständig bestimmt.

Behufs Auflösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades verfahren wir nun ganz analog wie bei Auflösung der allgemeinen Octaedergleichung.

Wir lösen zuerst die Tetraederform $\varDelta + \lambda_1 f$, deren Hesse'sche Form durch $\lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2) \{\varDelta + \lambda_2 f\}$ dargestellt ist. Es ist alsdann wie dort:

$$C \cdot \left(\frac{\varDelta + \lambda_1 f}{\varDelta + \lambda_2 f}\right)^3 = \varphi(x) = \varrho, \tag{7}$$

wobei nun $C = j_{\varDelta + \lambda_1 f} : (\lambda_1 - \lambda_2)\, \lambda_1$ ist. Wegen der Gleichungen (2) und (3) erhält man sonach auch:

$$\frac{C \cdot r^3}{s^3} \cdot \frac{u^3(y)}{v^3(y)} = \varphi(y) = \varrho \cdot$$

Die Tetraederirrationalität ist

$$y = \vartheta(\varrho) = \vartheta(\varphi(x)).$$

Jedem Werth ξ von x entspricht ein Werth η von y. Ist insbesondere α eine Wurzel der Gleichung $\varphi(x) = \varrho = 0$, so entspricht ihr ein Werth

$$\beta = \vartheta(\varphi(0)).$$

Die lineare Gleichung zwischen α und β erhält man wie früher, nur dass man hier einfacher die erste Polare von $\frac{u}{v}$ statt von $\frac{u^3}{v^3}$ nehmen kann. Sie geht wie früher wegen

$$\left(\frac{\varDelta + \lambda_1 f}{\varDelta + \lambda_2 f}\right)^3 = \frac{r^3}{s^3} \cdot \frac{u^3}{v^3}$$

aus der ersten Polare

$$\left\{\frac{\varDelta(\xi) + \lambda_1 f(\xi)}{\varDelta(\xi) + \lambda_2 (f\xi)}\right\}_\alpha = \varepsilon^{\varkappa} \sqrt[3]{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \left\{\frac{u(\eta)}{v(\eta)}\right\}_\beta$$

hervor, wobei $\varepsilon^{\varkappa}$ eine dritte Wurzel der Einheit ist. Die sich hieraus ergebende Wurzel α ist eine Wurzel der Gleichung $\varDelta + \lambda_1 f = 0$. Dagegen erhält man für $\varrho = C$, also $\beta = \vartheta(\varphi(C))$ die Wurzeln der Gleichung $f = 0$; denn wenn f verschwindet, geht (7) in die Relation

$$C = \varrho$$

über.

Durch die eben entwickelte Methode für die Auflösung der Gleichung vierten Grades könnte man demnach, sobald man im Besitze von Tafeln für die Tetraederirrationalität

$$y = \vartheta(\varrho)$$

wäre, die Wurzeln jeder biquadratischen Gleichung durch zweimaliges Aufschlagen der Tafel und sonst rationales Rechnen ermitteln.

Dritter Theil.

Systeme einzelner und simultaner Formen höheren Grades.

§ 20. Ueberschiebung von Systemen.

196. *Begriff des Systemes.* Wenn wir eine Anzahl symbolischer Ausdrücke in ihrer Gesammtheit bezeichnen wollen, so werden wir dasselbe kurz mit dem Namen „System von Formen“ belegen. Der Begriff eines Formensystems ist damit in seinen weitesten Grenzen gegeben. Die Formen desselben können einzelne symbolische Producte sein mit oder ohne Zahlenfactoren. Sie können aber auch ganze Aggregate symbolischer Producte repräsentiren; nur wollen wir in diesem Falle voraussetzen, dass alle Glieder des Aggregates die gleiche Anzahl von Symbolen der etwa auftretenden Formen enthalten. Das ganze System kann alle Covarianten und Invarianten eines simultanen Systems binärer Formen $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$ umfassen; es kann sich aber auch auf irgend eine durch gewisse Eigenschaften definirte Gruppe derselben beschränken. Dabei ist nicht nothwendig, dass alle Co- und Invarianten eines solchen Systems von einander unabhängig sind; doch werden wir im allgemeinen wenigstens die Annahme machen, dass keine eine ganze Function von andern Formen des Systemes ist.

197. *Ueberschiebung zweier Systeme.* Denken wir uns nun zwei solche Formensysteme mit je einer endlichen Anzahl von Formen gegeben, einmal das System

$$A_1 \overset{a_1}{(x)}, \quad A_2 \overset{a_2}{(x)}, \quad A_3 \overset{a_3}{(x)} \ldots A_r \overset{a_r}{(x)}, \tag{I}$$

sodann ein zweites System

$$B_1 \overset{b_1}{(x)}, \quad B_2 \overset{b_2}{(x)}, \quad B_3 \overset{b_3}{(x)} \ldots B_s \overset{b_s}{(x)}, \tag{II}$$

wobei mit $A_i(x)$, $B_i(x)$ irgend welche symbolische Producte oder ganze Aggregate von solchen bezeichnet sind, und die darüber geschriebenen Zahlen a_i, b_i ihren Grad in x ausdrücken.

Wir stellen uns die Aufgabe, beide Systeme übereinander zu schieben. Wie wir früher die Ueberschiebung zweier Formen dadurch bildeten, dass wir an dem Product derselben alle möglichen Faltungen des betreffenden Ueberschiebungsgrades ausführten, so werden wir auch jetzt eine Ueberschiebung der beiden Systeme erhalten, indem wir irgend ein Product aus den Formen des Systemes (I) mit einem Product von Formen des Systemes (II) falten.

Sei

$$U = A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_r^{\alpha_r}$$

ein Product aus den Formen des ersten,

$$V = B_1^{\beta_1} B_2^{\beta_2} \ldots B_s^{\beta_s}$$

ein Product aus den Formen des zweiten Systemes, wobei die Exponenten α_i, β_i irgend welche ganze Zahlen, Null nicht ausgeschlossen, bedeuten.

Das Product U ist in x vom Grade

$$a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \cdots a_r \alpha_r;$$

das Product V vom Grade

$$b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + \cdots b_s \beta_s.$$

Um eine beliebige Ueberschiebung $(U, V)^\nu$ zu bilden, haben wir (vgl. Nr. 38) das Product $U \cdot V$ auf alle möglichen Arten ν mal zu falten und die erhaltene Summe von symbolischen Producten durch die Anzahl ihrer Glieder zu dividiren. Jedes dieser Glieder besitzt einmal die alten, von vornherein dem ganzen Aggregat gemeinschaftlichen Klammerfactoren, die ja an der Faltung nicht betheiligt sind, dann aber auch ν neue Klammerfactoren, in deren jedem ein Symbol des Systemes der $A_i(x)$ mit einem Symbol des Systemes der $B_i(x)$ verbunden ist; ausserdem enthalten diese Glieder im Allgemeinen noch Factoren erster Art. Ist der Grad eines Gliedes der Ueberschiebung in den Factoren erster Art aus dem Systeme (I) noch ϱ, und ebenso in den Factoren erster Art aus dem Systeme (II) noch σ, dann müssen für jedes Glied und damit auch für die ganze Ueberschiebung $(U, V)^\nu$ die Gleichungen bestehen:

$$a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 \cdots + a_r \alpha_r = \varrho + \nu \tag{1}$$

$$b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + b_3 \beta_3 \cdots + b_r \beta_r = \sigma + \nu. \tag{2}$$

Ist umgekehrt ein Zahlensystem α_i, β_i, ν gegeben, das diese Gleichungen befriedigt, so können wir uns auch dazu eine Ueberschiebung der Producte U und V verschaffen. Denn durch die Exponenten α_i ist das Product U, durch die Exponenten β_i das Product

V eindeutig bestimmt, und zwei solche Producte haben nur Eine Ueberschiebung vom Grade ν.

198. *Umgrenzung der zu betrachtenden Ueberschiebungen.* Die beiden Systeme können natürlich auf diese Weise zu unzähligen Ueberschiebungen Veranlassung geben. Denn die beiden Gleichungen (1) und (2) sind lineare diophantische Gleichungen mit den Unbekannten α_i, β_i, ν, und zwar solche (vgl. Bd. I, Nr. 187), die immer positive ganzzahlige Lösungen besitzen. Jeder Ueberschiebung entspricht aber eine solche Lösung, und umgekehrt sahen wir soeben, gehört jeder positiven ganzzahligen Lösung eine und nur eine Ueberschiebung zu. Von dieser unendlich grossen Anzahl von Ueberschiebungen interessiren uns aber nun jene, durch welche wesentlich neue Formen entstehen. Es werden nämlich wie früher bei der Systembildung einfacher Formen die Ueberschiebungen in zwei Gruppen zu theilen sein: in eine erste Gruppe von Ueberschiebungen, bei denen die Faltung des Productes $U \cdot V$ kein zerfallendes Glied liefert, und in eine zweite, welche solche Glieder enthalten. Hierbei nennen wir ein Glied G ein zerfallendes, wenn man dasselbe in zwei Theile G_1 und G_2 spalten kann, von denen der eine, also auch der andere, ein Glied einer früheren, niedrigeren Ueberschiebung ist, oder auch ein Product ursprünglicher Formen. Die Ueberschiebungen der zweiten Gruppe aber können keine wesentlich neuen Formen liefern, da sich ja nach den allgemeinen Sätzen in § 3 jede solche Ueberschiebung durch dieses Glied und niedrigere Ueberschiebungen, also durch Bekanntes ausdrücken lässt. (Siehe als Beisp. etwa Nr. 211.) Wir beschränken uns also auf das Studium der ersten Ueberschiebungsgruppe, deren Formen wir in diesem Paragraphen mit C_i bezeichnen werden. Von diesen Formen werden wir in der Folge vier Lehrsätze aufstellen, mit deren Hilfe die Endlichkeit des Formensystems einer binären Form sich einfach beweisen lässt. Hiebei bezeichnen wir als Form C_i nur ein einziges übrigens willkürliches Glied der betreffenden Ueberschiebung, die nach unsern allgemeinen Ueberschiebungssätzen durch ein solches Glied vollständig definirt ist.

199. *Erster Lehrsatz:* „Ist das System der Formen A_i sowohl als auch das System der Formen B_i ein endliches, so ist auch das durch Ueberschiebung entstandene System der Formen C_i endlich."

Der Beweis wird mit Hilfe des im ersten Bande dieser Vorlesungen § 15 bewiesenen Satzes erbracht, wonach ein simultanes System linearer diophantischer Gleichungen nur eine endliche Zahl einfacher Lösungen besitzt. Wir sahen nämlich soeben, dass jeder

Lösung der beiden diophantischen Gleichungen (1) und (2) Nr. 197 eine und nur eine Ueberschiebung entspricht. Können wir also zeigen, dass jeder zusammengesetzten Lösung eine Ueberschiebung mit zerfallenden Gliedern zugehört und umgekehrt, dann können die Ueberschiebungen mit nicht zerfallenden Gliedern, also unsere Formen C_i, nur den einfachen Lösungen entsprechen. Diese sind aber nur in endlicher Zahl vorhanden, also auch die Formen C_i.

Angenommen aber, die Ueberschiebung $(U, V)^\nu$ enthalte ein Glied

$$G = G_1 \cdot G_2,$$

wobei G_1 und G_2 Glieder niedrigerer Ueberschiebungen vom Grade ν_1 bezw. ν_2 sind, so dass $\nu = \nu_1 + \nu_2$, dann lässt sich zu jedem der beiden Glieder je eine Lösung $L_1 = (\alpha_i^{(1)}, \beta_i^{(1)}, \nu_1)$, beziehungsweise $L_2 = (\alpha_i^{(2)}, \beta_i^{(2)}, \nu_2)$ angeben, welche diese niedrigeren Ueberschiebungen völlig bestimmen. Dabei ist alsdann, wenn $L = (\alpha_i, \beta_i, \nu)$ die Lösung ist, durch welche die Ueberschiebung mit dem Gliede $G = G_1 \cdot G_2$ erhalten wurde:

$$\begin{aligned} \nu &= \nu_1 + \nu_2 \\ \alpha_i &= a_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} \\ \beta_i &= \beta_i^{(1)} + \beta_i^{(2)}, \end{aligned}$$

d. h. die Lösung L lässt sich zusammensetzen aus den Lösungen L_1 und L_2. Umgekehrt: Entsprechen den Lösungen L_1 und L_2 bezw. die Ueberschiebungen $(U_1, V_1)^{\nu_1}$ und $(U_2, V_2)^{\nu_2}$, so entspricht der zusammengesetzten Lösung $L = L_1 + L_2$ nothwendig die Ueberschiebung:

$$(U_1 U_2, \ V_1 V_2)^{\nu_1 + \nu_2}$$

und diese enthält zerfallende Glieder. Denn unter den Gliedern, die aus dem Producte

$$U_1 \, U_2 \, V_1 \, V_2$$

hervorgehen, indem man dasselbe auf alle möglichen Arten $(\nu_1 + \nu_2)$-mal faltet, treten auch Producte von Gliedern auf, die entstehen, wenn man erst $U_1 V_1$ ν_1-mal und dann $U_2 V_2$ ν-mal faltet, die also Glieder der niedrigeren Ueberschiebungen

$$(U_1, \ V_1)^{\nu_1} \quad \text{und} \quad (U_2, \ V_2)^{\nu_2}$$

darstellen. Es können also in der That die Ueberschiebungen ohne zerfallende Glieder nur den einfachen Lösungen entsprechen, und deren Anzahl ist eine endliche.

200. *Definition eines vollständigen Systemes.* Wir nennen nun ein System von Formen A_i ein vollständiges, sobald aus einer einzelnen Form oder einem Producte derselben durch Faltung keine wesentlich neue Form entstehen kann, sondern immer nur Formen, welche ganze rationale Functionen der A_i sind.

Solche vollständige Systeme sind die bereits früher aufgestellten Systeme der Form zweiter, dritter oder vierter Ordnung. Jede Ueberschiebung $(U, U')^\nu$ zweier Producte U und U' der Formen A_i ist also darstellbar in der Form

$$(U, U')^\nu = F(A_1, A_2, \ldots A_r) = F(A_i),$$

wo F eine ganze rationale Function der Formen A_i bedeutet. So ist z. B. für die Form vierter Ordnung

$$(f^{\alpha_1} \cdot \varDelta^{\alpha_2} \cdot t^{\alpha_3} \cdot i^{\alpha_4} \cdot j^{\alpha_5},\ f^{\beta_1} \cdot \varDelta^{\beta_2} \cdot t^{\beta_3} \cdot i^{\beta_4} \cdot j^{\beta_5})^\nu = F(f, \varDelta, t, i, j).$$

201. *Zweiter Lehrsatz.* Sind die Systeme (A) und (B) vollständige Formensysteme mit den Formen

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_r \tag{I}$$

$$B_1, B_2, B_3, \ldots B_s, \tag{II}$$

gelten also für diese die Bedingungen

$$(U, U')^\nu = F(A_i) \tag{1}$$

$$(V, V')^\nu = \Phi(B_i), \tag{2}$$

dann führt wiederum die Ueberschiebung derselben auf ein drittes System selbstständiger Formen

$$C_1, C_2, C_3, \ldots C_p, \tag{III}$$

zu welchem selbstverständlich als nullte Ueberschiebungen auch die Formen der beiden ersten Systeme gehören.

Von diesem System können wir behaupten:

„Das System der Formen C_i ist ein vollständiges, sobald die ursprünglichen Systeme (A) und (B), aus denen dasselbe durch Ueberschiebung entstanden ist, vollständig sind."

Unsere Aufgabe besteht darin, den Nachweis zu führen, dass auch für das System der Formen C_i, wie für die beiden ursprünglichen Systeme, die Gleichung besteht

$$(\Gamma, \Gamma')^\nu = \Psi(C_i), \tag{3}$$

wenn Γ und Γ' beliebige Producte der C_i sind.

Nun entsteht jede dieser Ueberschiebungen (3) durch Faltung der in Γ enthaltenen Formen C_i mit jenen, die sich in Γ' befinden. Diese Formen C_i sind aber aus Producten U_i der Formen A_i durch Faltung mit Producten V_i der Formen B_i hervorgegangen. Also kann man sich auch die Form Ψ direct durch Faltung eines Productes $U \cdot V$ entstanden denken, wobei einmal Faltungen an den Factoren A_i von U, sodann Faltungen an den Factoren B_i von V und endlich Faltungen der Factoren A_i mit Factoren B_i auszuführen sind. Bezeichnen wir das durch Faltungen der ersten Art aus U entstehende Product mit $\overline{U}$, das durch Faltungen der zweiten Art aus V entstehende mit

$\overline{V}$, dann entsteht Ψ aus dem Producte $\overline{U} \cdot \overline{V}$ durch Faltungen der dritten Art, und kann somit als Glied der Ueberschiebung

$$(\overline{U},\ \overline{V})^{\varrho}, \quad \varrho < \nu,$$

angesehen werden. Daher lässt sich Ψ durch diese und niedrigere Ueberschiebungen dieser Art nach § 3 Nr. 44 darstellen, d. h. es ist

$$(\Gamma,\ \Gamma')^{\nu} = \sum (\overline{U},\ \overline{V})^{\varrho_i}.$$

Da aber $\overline{U}$ durch Faltung von Formen A_i, $\overline{V}$ durch Faltung von Formen B_i entstanden ist, so kann nach Voraussetzung

$$\left.\begin{aligned} \overline{U} &= \sum (U'',\ U')^{\nu} = F(A_i) \\ \overline{V} &= \sum (V'',\ V')^{\mu} = \Phi(B_i) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

gesetzt werden, und demnach ist

$$(\Gamma,\ \Gamma')^{\nu} = \sum (F(A_i),\ \Phi(B_i))^{\varrho_i};$$

weil aber die Functionen F und Φ rational und ganz in den Formen A_i bezw. B_i sind, also

$$\begin{aligned} F &= \sum A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_r^{\alpha_r} = \sum U \\ \Phi &= \sum B_1^{\beta_1} B_2^{\beta_2} \ldots B_s^{\beta_s} = \sum V, \end{aligned}$$

und weil die Ueberschiebung von Summen gleich der Summe der Ueberschiebungen ihrer Posten ist, so wird endlich

$$(\Gamma,\ \Gamma')^{\nu} = \sum (U,\ V)^{\varrho_i}. \tag{5}$$

Die Ueberschiebungen $(U,\ V)^{\varrho_i}$ sind aber nun entweder Ueberschiebungen der ersten Gruppe, d. h. (vergl. Nr. 198) sie enthalten keine zerfallenden Glieder und wir können sie direct durch die Formen C_i ersetzen, oder aber sie enthalten zerfallende Glieder $G_i = G_1 \cdot G_2$; dann ersetzen wir sie zunächst nach Nr. 44 durch $G_1 \cdot G_2$ plus Glieder niedrigerer Ueberschiebungen $(U,\ V)^{\lambda}$, wo $\lambda < \varrho_i$. Gleichzeitig führen wir alsdann auch für die Factoren G_1 wie G_2 die ihnen einzeln entsprechenden niedrigeren Ueberschiebungen nach demselben Satze Nr. 44 ein. Damit ist eine erste Reduction der rechten Seite der Gleichung hergestellt. Diese Reduction werden wir nöthigenfalls so lange fortsetzen, bis nur mehr nullte Ueberschiebungen, d. i. Producte der C_i auftreten. Die rechte Seite der letzten Gleichung lässt sich also in der That auf eine Function der Formen C_i successive reduciren und die Behauptung:

$$(\Gamma,\ \Gamma')^{\nu} = \Psi(C_i)$$

ist sonach erwiesen.

202. *Definition relativ vollständiger Systeme.* Es kann nun aber auch der Fall eintreten, dass durch Faltung des Productes U der Formen A_i, die einem bestimmten Systeme (I) angehören, Formen $\overline{U}$ entstehen, welche der Gleichung

$$\overline{U} = F(A_i) + \sum G \cdot W \qquad (1)$$

genügen. Dabei ist $F(A_i)$ wieder eine ganze rationale Function der A_i, $\sum G \cdot W$ aber ein Aggregat von symbolischen Producten, deren jedes mindestens einen aus mehreren von vornherein bezeichneten Klammerfactoren G (oder auch ein Product solcher) zum Factor besitzt. Diese Gruppe von Klammerfactoren G nennen wir „Moduln" (vergl. Nr. 43) des Formensystemes (A), und sagen alsdann:

„Das Formensystem (A) ist relativ vollständig in Bezug auf die Moduln G."

Wir drücken dies durch die Gleichung (1) aus oder auch durch die Congruenz:

$$\overline{U} \equiv F(A_i) \text{ mod. } G. \qquad (2)$$

So bilden z. B. im Formensystem der Form vierter Ordnung $f = a_x^4$ die Formen

$$f = a_x^4, \qquad t = (ab)^2 (ca) a_x b_x^2 c_x^3$$
$$\Delta = (ab)^2 a_x^2 b_x^2, \quad j = (ab)^2 (bc)^2 (ca)^2$$

für sich ein relativ vollständiges System modulo $(ab)^4$, insofern alle aus dem Product

$$f^\lambda \cdot \Delta^\mu \cdot t^\nu \cdot j^\sigma = \Gamma$$

durch Faltung entstehenden Formen ganze Functionen dieser vier Formen sind bis auf Glieder mit dem Factor $(ab)^4$. Wir drücken dies aus durch

$$\overline{\Gamma} = (\Gamma, \Gamma')^\nu = F(f, \Delta, t, j) + \sum (ab)^4 W,$$

oder

$$\overline{\Gamma} = (\Gamma, \Gamma')^\nu \equiv F(f, \Delta, t, j) \text{ mod. } (ab)^4.\text{*)}$$

203. *Dritter Lehrsatz.* Sind nun zwei Systeme (A) und (B) gegeben, deren jedes relativ vollständig mod. G ist, dann können wir wiederum durch Ueberschiebung derselben ein drittes System (C) erhalten. Von diesem System gilt der Satz:

„Das System der Formen C_i ist relativ vollständig in Bezug auf die Moduln G, sobald es auch die beiden ursprünglichen

*) Es dürfte hiebei die selbstverständliche Bemerkung erlaubt sein, dass, wenn $i = (ab)^4$ identisch null ist, dieses relativ vollständige System zu einem absolut vollständigen wird. (Vergl. auch Nr. 209.)

Systeme (A) und (B) sind, aus denen das System (C) durch Ueberschiebung entstanden ist."

Wir haben wiederum, wenn Γ und Γ' zwei beliebige Producte der Formen C_i sind, die Richtigkeit der Gleichung:

$$(\Gamma,\ \Gamma')^\nu = \Psi(C_i) + \sum W \cdot G,$$

nachzuweisen. Der Beweis gestaltet sich analog wie der des zweiten Lehrsatzes. Zunächst schliessen wir ganz in derselben Weise wie dort, dass sich die Form $(\Gamma,\ \Gamma')^\nu$ als Glied der Ueberschiebung

$$(\bar{U},\ \bar{V})^\varrho,\quad \varrho < \nu,$$

darstellen lässt, wobei $\bar{U}$ und $\bar{V}$ Formen sind, die aus U resp. V durch Faltung der Formen A_i resp. B_i entstehen. Es lässt sich demnach $(\Gamma,\ \Gamma')^\nu$ wiederum durch eine Summe von Ueberschiebungen vom Typus $(\bar{U},\ \bar{V})^\varrho$ darstellen, so dass man hat

$$(\Gamma,\ \Gamma')^\nu = \sum (\bar{U},\ \bar{V})^{\varrho_i},$$

Nun ist aber nach Voraussetzung

$$\bar{U} = F(A_i) + \sum G \cdot W$$

$$\bar{V} = \Phi(B_i) + \sum G \cdot W',$$

also wird

$$(\Gamma,\ \Gamma')^\nu = \sum \left(F(A_i) + \Sigma G \cdot W,\ \ \Phi(B_i) + \Sigma G \cdot W'\right)^{\varrho_i},$$

oder nach Nr. 32, (β)

$$= \sum \left(F(A_i),\ \Phi(B_i)\right)^{\varrho_i} + \sum \left(F(A_i),\ \Sigma G \cdot W'\right)^{\varrho_i}$$

$$+ \sum \left(\Sigma G \cdot W,\ \ \Phi(B_i)\right)^{\varrho_i} + \sum \left(\Sigma G \cdot W,\ \ \Sigma G \cdot W'\right)^{\varrho_i}.$$

Der erste Term rechts reducirt sich in derselben Weise wie früher auf $\sum (U,\ V)^{\varrho_i}$; die übrigen Terme auf Formen, welche die Moduln G, die ja als Klammerfactoren nicht gefaltet werden können, zu Factoren haben. Daher können wir die letzte Gleichung schreiben

$$(\Gamma,\ \Gamma')^\nu = \sum (U,\ V)^{\varrho_i} + \sum G \cdot Q.$$

Die Ueberschiebungen $(U,\ V)^{\varrho_i}$ führen aber entweder wieder auf Formen C_i oder sind Ueberschiebungen mit zerfallenden Gliedern G_i und wir können alsdann genau wie in Nr. 201 die allmähliche Reduction auf Formen C_i vornehmen. Also ist in der That

$$(\Gamma,\ \Gamma')^\nu \equiv \Psi(C_i) \text{ mod. } G.$$

204. *Vierter Lehrsatz.* Von den Moduln, in Bezug auf welche ein erstes System (A) relativ vollständig ist, können einige als Klammerfactoren von Formen B_i eines zweiten Systemes (B) auftreten. Wir wollen diese Moduln mit H, die übrigen des Systemes (A) mit G bezeichnen. Es möge nun das System (A) der Gleichung genügen:

$$\overline{U} = F(A_i) + \sum H \cdot W + \sum G \cdot W'. \tag{1}$$

Nehmen wir alsdann an, dass im System (B), das wir gleichfalls relativ vollständig mod. G voraussetzen, zu jedem der Moduln H eine entsprechende Form B_i vorhanden sei, die neben Factoren erster Art nur diesen Modul als Klammerfactor hat, dann genügt System (B) immer noch der Gleichung

$$\overline{V} = \Phi(B_i) + \sum G \cdot W'', \tag{2}$$

wobei allerdings unter den Klammerfactoren von W'' auch Moduln H vorhanden sein können, die wir jedoch hier neben den Moduln G nicht weiter hervorheben wollen.

Durch Ueberschiebung beider Systeme (A) und (B) entsteht ein drittes System (C). Von ihm gilt der Satz:

> „Genügt das System (A) der Gleichung (1), das System (B) aber, das je eine Covariante besitzen möge, die je einem Modul H von (A) entspricht, der Gleichung (2), so genügt auch das System (C) der Gleichung
>
> $$(\Gamma, \Gamma')^{\nu} = F(C_i) + \sum G \cdot W''',$$
>
> d. h. es ist relativ vollständig modulo G."

Ehe ich den Beweis antrete, will ich den Fall durch ein Beispiel illustriren. Im System der Form $f = a_x^6$ bilden, wie wir demnächst sehen werden, die drei Formen

$$f = a_x^6, \quad H = (ab)^2 a_x^2 b_x^2, \quad t = (ab)^2 (ca) a_x^3 b_x^4 c_x^5$$

für sich ein in Bezug auf die beiden Moduln $(ab)^4$ und $(ab)^6$ relativ vollständiges System (A), d. h. es ist:

$$\overline{U} = F(f, H, t) + \sum (ab)^4 \cdot W + \sum (ab)^6 . W'.$$

Stellen wir diesem System (A) das volle System (B) der biquadratischen Covariante $k = (f, f)^4 = (ab)^4 a_x^2 b_x^2$ von f gegenüber

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = k, \quad B_2 = (k, k)^2, \quad B_3 = (k, k)^4 \\ B_4 = (k, (k, k)^2), \quad B_5 = ((k, k)^2, k)^2 \end{array}\right\}, \tag{B}$$

so ist dasselbe gerade ein System mit einer Form (nämlich der Grundform $B_1 = k$ selbst), die den Modul $(ab)^4$ besitzt, und das im übrigen,

wie der nächste Paragraph schon lehren wird, relativ vollständig ist modulo $(ab)^6$. Durch Ueberschiebung beider Systeme entsteht das System (C), welches der Gleichung genügt:

$$(\Gamma, \Gamma')^\nu = F(C_i) + \sum (ab)^6 \cdot W'''.$$

Wir werden sehen, dass dieses System (C) zusammen mit der Invariante $(ab)^6$ selbst, gerade das volle System von $f = a_x^6$ bildet.

Der Beweis unseres Satzes gestaltet sich nun wie die beiden vorhergehenden. Es ist wiederum zunächst:

$$(\Gamma, \Gamma')^\nu = \sum (\bar{U}, \bar{V})^{\varrho_i}, \quad \varrho_i \leqq \nu$$
$$= \sum (F(A_i) + \Sigma H \cdot W + \Sigma G \cdot W, \; \Phi(B_i) + \Sigma G \cdot W'')^{\varrho_i},$$

oder:

$$(\Gamma, \Gamma')^\nu = \sum \Big(F(A_i), \Phi(B_i)\Big)^{\varrho_i} + \sum \Big(H \cdot W, \; \Phi(B_i)\Big)^{\varrho_i} + \sum G \cdot Q. \quad (3)$$

Hierin führt der erste Term rechts in bekannter Weise auf Formen C_i; der dritte besitzt nur Formen, welche Moduln G zu Factoren haben. Es erübrigt also nur die Discussion des zweiten Termes. Nun kann $H \cdot W$ als Glied der Ueberschiebung $(B_i, U_1)^\lambda$ erhalten werden, eben weil der Modul H auch einer Form B_i als Klammerfactor angehört (vergl. Nr. 45), und lässt sich folglich durch solche Ueberschiebungen darstellen. Man kann daher statt des zweiten Termes auch schreiben:

$$\sum \sum \Big((B_i, \bar{U}_1)^{\lambda_k}, \; \Phi(B_i)\Big)^{\varrho_i}.$$

Die Glieder dieser Ueberschiebungen entstehen durch Faltung aus Producten

$$B_i \cdot \bar{U}_1 \cdot \Phi(B_i),$$

also aus Producten, die eine Form B_i mehr als das ursprüngliche $\bar{V}$ und demnach eine Form A_i weniger als das ursprüngliche Product $\bar{U}$ in der Gleichung $(\Gamma, \Gamma')^\nu = \sum (\bar{U}, \bar{V})^{\varrho_i}$ enthalten. Ersetzen wir nun das gegenüber $\bar{U}$ reducirte Product $\bar{U}_1$ durch seinen Werth $F_1(A_i) + \sum H \cdot W_1 + \sum G \cdot W_1'$, wobei in jedem dieser drei Terme eine Form A_i weniger betheiligt ist als in (1), so gelangen wir genau durch dieselben Schlüsse wie bisher zu einer abermaligen Reduction des zweiten Termes in (3), indem derselbe hiedurch auf Producte zurückgeführt wird, die aus

$$B_k \cdot B_i \cdot \bar{U}_2 \cdot \Phi(B_i)$$

durch Faltung entstehen. Hierin besitzt das Product $\bar{U}_2$ abermals einen Factor A_i weniger als $\bar{U}$. Durch fortgesetzte Wiederholung dieses Verfahrens wird schliesslich der Ausdruck

$$\sum\left(H\cdot W,\ \Phi(B_i)\right)^{\varrho_i}$$

in (3) auf eine Summe von symbolischen Producten reducirt, die nur mehr durch Faltung von Producten der B, also durch Faltung einer Grösse $\overline{V}$ entstehen. Dies liefert aber nach (2):

$$\overline{V}=\Phi(B_i)+\sum G\cdot W'',$$

oder, weil die Formen B_i zu den Formen C_i gehören:

$$\overline{V}=\Phi(C_i)+\sum G\cdot W''.$$

Somit ist auch dieser Term $\equiv\Phi(C_i)$ mod. G und damit die ganze rechte Seite der Gleichung (3), was zu beweisen war.

§ 21. Beweis für die Endlichkeit des Formensystems einer binären Form.

205. *Gedankengang des Beweises.* Der soeben bewiesene Satz bildet nun die Grundlage des von Gordan zum ersten Male im 69. Bande des Borchardt'schen Journals bewiesenen Fundamentalsatzes:

> „Jede binäre Form besitzt ein endliches System von Covarianten, durch welche sich alle unendlich vielen übrigen rational und ganz darstellen lassen."

Ehe wir hier zum Beweise schreiten, will ich versuchen, dessen Gedankengang klar zu legen.

Denken wir uns sämmtliche Covarianten von $f=a_x^n$ gefunden und in den Symbolen $a, b, c\ldots$ der Form f dargestellt. Jedes dieser symbolischen Producte können wir nach § 1, Nr. 11 so umformen, dass die in ihm zumeist auftretende Potenz eines Klammerfactors, etwa des Factors (ab), eine **gerade** ist. Ist dann g die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl, so können wir sämmtliche Covarianten von f in folgende g Klassen eintheilen, wobei die späteren Klassen alle Covarianten der früheren umfassen. Die erste Klasse enthält alle Covarianten mit dem zumeist auftretenden Klammerfactor $(ab)^0$; wir bezeichnen sie als System $(A^{(0)})$ und erkennen, dass es nur aus der Originalform $f=a_x^n$ allein bestehen kann.

Die zweite Klasse enthält alle Covarianten, deren zumeist auftretender Klammerfactor höchstens $(ab)^2$ ist; wir bezeichnen sie als System $(A^{(1)})$.

Das System $(A^{(2)})$ wird sodann alle Covarianten umfassen, deren zumeist auftretender Klammerfactor höchstens $(ab)^4$ ist etc., und endlich das System $(A^{(g)})$ alle Covarianten von f überhaupt, da ja keine

Covariante einen höheren Klammerfactor als $(ab)^{2g}$ besitzen kann, insoferne eben $2g = n$, oder $n - 1$ ist. Jedes solche System $(A^{(k)})$ ist relativ vollständig in Bezug auf den Modul $(ab)^{2k+2}$, und alle höheren Potenzen von (ab). Denn durch Faltung eines Productes von Formen $A_i^{(k)}$ können nur symbolische Producte entstehen, deren zumeist auftretender Klammerfactor $(ab)^{2\varrho}$, $\varrho \overline{\overline{<}} k$, ist, und symbolische Producte mit dem Factor $(ab)^{2\varrho}$, $\varrho > k$.

Da nun aber das System $(A^{(k)})$ sämmtliche Covarianten enthalten soll, deren zumeist auftretender Klammerfactor höchstens $(ab)^{2k}$ ist, so kann die erste Sorte von Producten nur wieder auf Formen $A_i^{(k)}$ führen, und es ist demnach in der That:

$$U^{(k)} \equiv F(A_i^{(k)}) \text{ mod. } (ab)^{2k+2},\ (ab)^{2k+4} \text{ etc.},$$

und insbesondere

$$U^{(g)} \equiv F(A_i^{(g)}) \text{ mod. } (ab)^{2g+1},$$

wobei $(A^{(g)})$ das volle System von $f = a_x^n$.*)

Hiebei ist das erste System $(A^{(0)})$ endlich; denn es besteht aus der Form f allein. Gelingt es uns nun durch Ueberschiebung des Systemes $(A^{(0)})$ mit einem andern gleichfalls endlichen Systeme $(B^{(0)})$ das System $(A^{(1)})$ zu erhalten, und weiter durch Ueberschiebung des Systemes $(A^{(1)})$, das nun nothwendig nach Nr. 199 gleichfalls endlich ist, mit einem endlichen System $(B^{(1)})$ das System $(A^{(2)})$ zu erzeugen etc. etc., so ist der Beweis der Endlichkeit geliefert. Solche brauchbare Systeme $(B^{(k)})$ liefert aber sofort der bereits in Nr. 43 geschilderte Process, und ich gehe nun dazu über, diese Bildsysteme aufzustellen.

206. *Aufstellung der Bildsysteme* $(B^{(k)})$. Es sei $A_i^{(k)}$ irgend eine Form des Systemes $(A^{(k)})$; sie sei durch eine gewisse Anzahl Faltungen

---

*) *Beispiel.* Bei Formen vierter Ordnung besteht das System $(A^{(0)})$ aus der Form

$$f = a_x^4;$$

das System $(A^{(1)})$ aus den Formen:

$$f,\ \varDelta,\ t,\ j;$$

das System $(A^{(2)})$ aus den Formen:

$$f,\ \varDelta,\ t,\ j,\ i,$$

und es ist:

$$U^{(0)} \equiv F(f) + \sum (ab)^2 \cdot W$$

$$U^{(1)} \equiv F(f,\ \varDelta,\ t,\ j) + \sum (ab)^4 \cdot W \qquad \text{(vergl. Nr. 202)}$$

$$U^{(2)} \equiv F(f,\ \varDelta,\ t,\ j,\ i).$$

aus einer Potenz $f^\varrho = a_x^n \cdot b_x^n \cdot c_x^n \cdots r_x^n$ gewonnen worden. Nehmen wir nun genau dieselben Faltungen an der ϱ^{ten} Potenz der Covariante $\varphi = (ab)^{2k+2} a_x^{n-2k-2} b_x^{n-2k-2}$ vor, was (vergl. Nr. 43) auf mehrere Weisen möglich ist, so entsteht wiederum eine Covariante von f, die wir mit $B_i^{(k)}$ bezeichnen. Wir sagen: die Form $B_i^{(k)}$ ist nach dem Modell $A_i^{(k)}$ aus der Covariante $\varphi = (f, f)^{2k+2}$ gebildet worden. Auf dieselbe Weise können wir nach jeder Form des Systemes $(A^{(k)})$ ein Bild herstellen, so lange der Grad der Covariante φ grösser oder gleich n ist, und wir nennen alsdann die Gesammtheit dieser Formen ein System $(B^{(k)})$. Nur wenn der Grad $2n - 4k - 4$ dieser Form φ kleiner wird als n, kann diese Operation unausführbar werden, da alsdann φ^ϱ möglicher Weise nicht mehr die nöthige Anzahl Factoren erster Art besitzt, durch deren Faltung das Bild $B_i^{(k)}$ nach dem Muster von $A_i^{(k)}$ entstehen soll. In diesem Falle aber nehmen wir alsdann die vollen Systeme der Formen niedrigerer Ordnung, also der Formen $(n-1)^{\text{ten}}$, $(n-2)^{\text{ten}}$ etc. Grades zum Muster für die Bildung des Systemes $(B^{(k)})$. Da wir die Endlichkeit des Systemes einer Form n^{ter} Ordnung beweisen wollen, so dürfen wir die vollen Systeme der Formen niedrigerer Ordnung als endliche annehmen, wie wir dies ja auch in der That bei Formen ersten bis vierten Grades gesehen haben.

Um zu wiederholen: Ist $k \leq \frac{n}{4} - 1$, so stellen wir das System $(B^{(k)})$ nach dem Modelle der vorhin Nr. 205 definirten Systeme $(A^{(k)})$ an der Form $\varphi = (f, f)^{2k+2}$ her. Alle spätern Systeme $(B^{(k)})$ haben die vollen Systeme $(\bar{A}^{(k)})$ der Formen niedrigeren Grades zum Muster, die wir als endliche Systeme voraussetzen. Die Systeme $(A^{(k)})$ von $k = 0$ bis $k \leq \frac{n}{4} - 1$ genügen, wie wir in Nr. 205 gesehen, der Congruenz:

$$\bar{U}^{(k)} \equiv F(A_i^{(k)}) \text{ mod. } (ab)^{2k+2}, \ (ab)^{2k+4}, \text{ etc.}; \tag{1}$$

die späteren Systeme $(\bar{A}^{(k)})$ aber, als endliche Systeme, der Gleichung

$$\bar{U}^{(k)} = F(\bar{A}_i^{(k)}). \tag{2}$$

207. *Eigenschaft der Bildsysteme* $(B^{(k)})$. Während so die Modellsysteme, wenn sie nicht a priori endlich sind, der Congruenz (1) genügen, befriedigen sämmtliche Bildsysteme die Congruenz:

$$\bar{U}^k \equiv F(A_i^{(k)}) \text{ mod. } (ab)^{2k+4}, \ (ab)^{2k+6} \ldots \tag{3}$$

Dies erkennt man für die Systeme $(B^{(k)})$, $k > \frac{n}{4} - 1$, unmittelbar. Denn ihre Modellsysteme genügen der Gleichung (2), d. h. zwischen

den Formen des Systemes und einer Form $\bar{U}^{(k)}$, die aus ihnen durch Faltung entsteht, besteht die Relation:

$$\bar{U}^{(k)} - F(A_i^{(k)}) = 0.$$

Jedes Bild derselben ausgeführt an $\varphi = (f, f)^{2k+2}$ genügt alsdann nach Nr. 43, (3) der Relation:

$$\bar{V}^{(k)} - F(B_i^k) \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{2k+4},$$

d. h. es ist:

$$\bar{V}^{(k)} \equiv F(B_i^k) \text{ mod. } (ab)^{2k+4}.$$

Für die übrigen Systeme $(B^{(k)})$ von $k = 0$ bis $k \leqq \frac{n}{4} - 1$ ergiebt sich die Richtigkeit unserer Behauptung auf folgendem Wege. Wir schreiben wieder die Congruenz (1), welcher ihre Modelle genügen, in der Gleichungsform:

$$\bar{U}^{(k)} - F(A_i^{(k)}) - \sum (ab)^{2k+2}\, W - \sum (ab)^{2k+4}\, W' - \cdots = 0, \quad (4)$$

und erkennen in ihr eine Relation von symbolischen Producten, deren Glieder sich weder gegenseitig aufheben, noch einzeln verschwinden. Von einer solchen Relation haben wir in Nr. 43 gezeigt, dass ihr Bild hergestellt an der Form $\varphi = (f, f)^{2k+2}$ sich darstellen lässt durch symbolische Producte, die mindestens $(ab)^{2k+4}$ als Klammerfactor besitzen.

Nun ist das Bild von $\bar{U}^{(k)}$ die Form $\bar{V}^{(k)}$, das Bild von $F(A_i^{(k)})$ die Function $F(B_i^{(k)})$; dabei seien die Formen $B_i^{(k)}$, die ja auf verschiedene Arten nach dem Modell $A_i^{(k)}$ hergestellt werden können, so gewählt, dass die Bilder des dritten Termes $\sum (ab)^{2k+2}\, W$, und auch der späteren, die Form annehmen

$$\sum (ab)^{2k+2} (a a_1)^{2k+2}\, W, \text{ etc.}; \quad (5)$$

dies ist immer möglich, weil ebenso wie der dritte Term in (4) durch mindestens $(2k+2)$-malige Faltung aus $f^\varrho = a_x^n b_x^n c_x^n \cdots r_x^n$, auch das Bild durch mindestens $(2k+2)$-malige Faltung aus

$$\varphi^\varrho = (ab)^{2k+2} a_x^{n-2k-2} b_x^{n-2k-2} \cdot (a_1 b_1)^{2k+2} a_{1x}^{n-2k-2} b_{1x}^{n-2k-2}$$

entstehen muss. Allein alle symbolischen Producte, wie sie in der Summe (5) auftreten, lassen sich durch andere Producte darstellen, die mindestens den Factor $(ab)^{2k+4}$ besitzen, wie wir in Nr. 98 ausführlich gezeigt haben. Es ist also für $k \leqq \frac{n}{4} - 1$ zunächst:

$$\overline{V}^{(k)} - F(B_i^{(k)}) - \sum (ab)^{2k+2} (aa_1)^{2k+2} \overline{W} - \sum (ab)^{2k+4} (aa_1)^{2k+4} \overline{W}' \cdots$$
$$\equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{2k+4},$$

oder weil vom dritten Terme links incl. ab alle Producte den nämlichen Modul $(ab)^{2k+4}$ als Factor besitzen:

$$\overline{V}^{(k)} \equiv F(B_i^{(k)}) \text{ mod. } (ab)^{2k+4},\ (ab)^{2k+6} \text{ etc.}$$

208. *Rückblick.* Wir haben so die Gesammtheit aller Covarianten von f in doppelter Weise eingetheilt: Einmal in Systeme $(A^{(k)})$ relativ vollständig modulo $(ab)^{2k+2}$, $(ab)^{2k+4}$, etc. Dann in Systeme $(B^{(k)})$, welche die gleiche Anzahl von Formen enthalten, wie das entsprechende Modell $(A^{(k)})$, welche ferner relativ vollständig sind modulo $(ab)^{2k+4}$, $(ab)^{2k+6} \ldots$ etc., und welche endlich jedesmal mindestens eine Form enthalten, die den niedrigsten Modul $(ab)^{2k+2}$ des Modellsystemes $A^{(k)}$ zum Factor hat. Denn $(B^{(k)})$ hat immer die jeweilige Form $\varphi = (f, f)^{2k+2}$ als Originalform. Je zwei Systeme $(A^{(k)})$ und $(B^{(k)})$ sind also gerade zwei Systeme, wie sie der vierte Lehrsatz Nr. 204 voraussetzt und durch Ueberschiebung derselben entsteht sonach ein relativ vollständiges Covariantensystem von f, das als niedrigsten Modul den Modul $(ab)^{2k+4}$ besitzt, d. h. das System $(A^{(k+1)})$ der Form f. Und darin liegt der Hauptschritt des Beweises für den an die Spitze dieses Paragraphen gestellten Lehrsatzes.

209. *Beweis der Endlichkeit des Formensystemes.* Nachdem wir nun gesehen haben, wie durch die Hilfssysteme $(B^{(k)})$ aus einem Systeme $(A^{(k)})$ das nächst höhere System $(A^{(k+1)})$ vermittelst Ueberschiebung erzeugt wird, erübrigt uns nur mehr, dass wir uns von der Endlichkeit der einzelnen relativ vollständigen Systeme $(A^{(k)})$ überzeugen. Daraus folgt dann von selbst die Endlichkeit des Systemes $(A^{(\varrho)})$, d. i. des vollen Systemes von f. Nun besteht aber das System $(A^{(0)})$ aus der Form f allein und demnach das Bildsystem $(B^{(0)})$ aus $\varphi = (ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}$ allein; durch ihre Ueberschiebungen entsteht das System $(A^{(1)})$, das somit endlich ist, weil es die Systeme $(A^{(0)})$ und $(B^{(0)})$ waren. Nach dem Muster $(A^{(1)})$ bilden wir $(B^{(1)})$; es enthält dieselbe endliche Anzahl von Formen wie $(A^{(1)})$ und durch Ueberschiebung beider entsteht das endliche System $(A^{(2)})$ etc. etc. So gelangen wir schliesslich zum vollen System $(A^{(\varrho)})$, von dem wir nun erkennen, dass es in der That endlich sein muss. In diesem Systeme $(A^{(\varrho)})$ treten freilich im Allgemeinen noch viele überflüssige Formen auf, d. h. solche, die sich rational und ganz durch die übrigen des Systemes ausdrücken lassen. Dieselben zu erkennen bleibt immer eine der Hauptaufgaben bei der wirklichen Systembildung. Sollte eine



Form $f = a_x^n$ so beschaffen sein, dass $(f, f)^{2k+2+2\varrho}$, $\varrho = 1, 2, \ldots$ identisch verschwindet, dann bildet natürlich bereits das System $(A^{(k+1)})$ das vollständige System von f. (Vergl. die Systeme der regulären Körper § 19).*)

§ 22. Das Formensystem der Form fünfter Ordnung.

210. *Aufstellung der Systeme* $(A^{(k)})$ *und* $(B^{(k)})$. Die eben entwickelte Theorie wollen wir nunmehr durch die Aufstellung des Formensystemes einer Form fünfter Ordnung erläutern. Das Formensystem $A^{(0)}$ ist dargestellt durch die Form

$$(A^{(0)}) \qquad f = a_x^5;$$

das Formensystem $(B^{(0)})$ durch die Form

$$(B^{(0)}) \qquad \varphi = (ab)^2 a_x^3 b_x^3 = (f, f)^2.$$

Die Ueberschiebung beider Systeme liefert das System $(A^{(1)})$. Die Formen dieses Systemes sind also enthalten in dem Ausdruck

$$U = \left(f^\alpha, ((f, f)^2)^\beta\right)^\lambda.$$

Es handelt sich nun zunächst darum, jene Ueberschiebungen auszuscheiden, welche zerfallende oder reducible Glieder enthalten. Hieher gehören in erster Linie alle jene, für welche $\lambda > 1$ ist, welche Werthe auch $\alpha > 0$, $\beta > 0$ haben mögen. Denn diese Ueberschiebungen enthalten Glieder mit den Klammerfactoren $(ab)^2 (ac)^2$. Solche symbolische Producte sind aber bereits (nach Nr. 98) $\equiv 0$ mod. $(ab)^4$.

λ kann also nur den Werth 1 besitzen; in diesem Falle darf aber wiederum α oder β nicht grösser als 1 sein, da ja alsdann schon f und φ allein den zur einmaligen Faltung nöthigen Factor erster Art liefern, während die übrigen Factoren f und φ nur multiplicativ zum Faltungsglied hinzutreten und so dieses Glied zu einem zerfallenden Gliede machen würden.

Die einzige neue Form, welche sonach durch die Ueberschiebung der Systeme $(A^{(0)})$ und $(B^{(0)})$ entsteht, ist die Form

*) Im 100. Bande des Crelle'schen Journals hat neuerdings auch Herr Mertens einen Beweis für die Endlichkeit des Formensystems erbracht. Indem er voraussetzt, dass das System S der Form $p = a_x^n$ endlich sei, bildet er zunächst das simultane System von p und einer linearen Form α_{1x}. Mit Hilfe von diophantischen Gleichungen zeigt er, das dieses System eine endliche Anzahl von Formen B enthält, welche in den Coefficienten von p und α_1 vom gleichen Grade sind. Nun identificirt er die Form $f = A_x^{n+1}$ mit $p \cdot \alpha_1 = p_x^n \cdot \alpha_{1x}$, indem er α_1 als den einen und p_x^n als das Product $\alpha_{2x}\alpha_{3x} \cdots \alpha_{n+1,x}$ der übrigen linearen Factoren von f betrachtet.

$$t = (f, (f, f)^2) = (ab)^2 (ca) a_x^2 b_x^3 c_x^4$$

und das System $(A^{(1)})$ besteht somit aus den drei Formen

$$f, \quad (f, f)^2, \quad (f, (f, f)^2).$$

Dies galt schon bei den Formen dritten und viertes Grades und gilt auch noch bei höheren Formen. Für die regulären Körper ist das System $(A^{(1)})$, abgesehen von einer Invariante, das volle System.

Nach diesem Modelle wäre nun an der Form

$$i = (ab)^4 a_x b_x = (f, f)^4$$

das System $(B^{(1)}) \equiv 0 \text{ mod.} (ab)^5$ zu bilden. Da jedoch i bereits eine Form zweiter Ordnung ist, so muss man das System einer Form $f = a_x^2$ zum Muster nehmen, das nur aus den Formen a_x^2 und $(ab)^2$ besteht. Demnach enthält $(B^{(1)})$ die beiden Formen

$$(B^{(1)}) \qquad i, \quad (i, i)^2 = (ab)^4 (cd)^4 (ac)(bd) = A.$$

Dieses System ist $\equiv 0 \text{ mod.} (ab)^5$. Durch Ueberschiebung desselben mit $(A^{(1)})$ erhält man somit das vollständige System $(A^{(2)})$ der Form $f = a_x^5$.

211. *Ueberschiebung der Systeme* $(A^{(1)})$ *und* $(B^{(1)})$. Unsere nächste Aufgabe besteht nun wiederum darin, aus den Ueberschiebungen $(U, V)^\lambda$ jene auszuscheiden, welche zerfallende Glieder enthalten. Zu dem Zwecke untersuchen wir zuerst die Ueberschiebungen einzelner Formen aus beiden Systemen, sodann die Ueberschiebungen von Producten U mit Producten V. Wir beginnen mit den Ueberschiebungen:

$$(f^\mu, i^\varrho)^\lambda.$$

Ist hier $\mu = 1$, so ergeben sich von $\lambda = 1$ bis $\lambda = 5$ Ueberschiebungen ohne zerfallende Glieder, nämlich die Formen

$$(f, i), \quad (f, i)^2, \quad (f, i^2)^3, \quad (f, i^2)^4, \quad (f, i^3)^5,$$

wovon man sich leicht überzeugt, wenn man das Product

$$f \cdot i^\varrho$$

bezw. 1, 2, 3, 4, 5-mal auf alle möglichen Arten faltet.

Bei sechsmaliger Faltung des Productes

$$f^2 \cdot i^3 = c_x^5 \cdot d_x^5 \cdot (ab)^4 a_x b_x \cdot (a_1 b_1)^4 a_{1x} b_{1x} \cdot (a_2 b_2)^4 a_{2x} b_{2x}$$

entstehen dagegen zerfallende Glieder; so z. B. wenn man die vier ersten Factoren c_x mit den vier Factoren $a_x b_x a_{1x} b_{1x}$, und zwei Factoren d_x mit $a_{2x} b_{2x}$ faltet. Das so entstehende Glied der Ueberschiebung $(f^2, i^3)^6$ ist nichts anderes als das Product zweier Glieder niedriger Ueberschiebungen, nämlich der Ueberschiebungen

$$(f, i^2)^4 \quad \text{und} \quad (f, i)^2.$$

Ganz ebenso zeigt man, dass die Ueberschiebungen

$$(f^2, i^4)^7, \quad (f^2, i^4)^8, \quad (f^2, i^5)^9$$

zerfallende Glieder enthalten. Dagegen liefert die Ueberschiebung

$$(f^2, i^5)^{10},$$

wie man leicht wieder durch den Faltungsprocess erkennt, keine zerfallenden Glieder; sie ist eine Invariante vom Grade 12 in den Coefficienten von f.

Wenn man nun weitere Potenzen von i mit f^3, f^4, ... etc. zur Faltung bringt, so sieht man, dass immer Glieder hiebei gebildet werden können, welche diese Invariante zum Factor haben. Wir erhalten sonach von dieser Seite aus keine neuen Formen mehr.

Die Ueberschiebungen $(\varphi^\mu, i^\varrho)^\lambda$. Nicht zerfallende Glieder enthalten die Ueberschiebungen:

$$(\varphi, i), \quad (\varphi, i)^2, \quad (\varphi, i^2)^3, \quad (\varphi, i^2)^4, \quad (\varphi, i^3)^5, \quad (\varphi, i^3)^6,$$

wie man wieder unmittelbar aus den entsprechenden Faltungsprocessen erkennt. Hiebei liefert die letzte Ueberschiebung eine Invariante vom Grade 8 in den Coefficienten von f.

Bei allen weitern Ueberschiebungen von Potenzen der Form φ mit Potenzen von i kann man sich stets durch Faltung Glieder verschaffen, welche diese Invariante zum Factor haben, so dass die Reihe der Formen, die hier entstehen konnten, ebenfalls abgeschlossen ist.

Die Ueberschiebungen $(t^\mu, i^\varrho)^\lambda$. Hier enthalten alle ungeraden Ueberschiebungen von t über i, i^2, i^3, i^4, i^5, ausgenommen die neunte Ueberschiebung, stets reducible Glieder.

Denn setzen wir einen Augenblick

$$i = (ab)^4 a_x b_x = i_x^2$$
$$t = (cd)^2 (ce) c_x^2 d_x^3 e_x^4,$$

so tritt bei diesen ungeraden Ueberschiebungen stets ein Glied auf mit den Faltungen

$$(ci)(ce) i_x c_x.$$

Dieser Theil des Gliedes kann aber nach dem Productsatz in die Form gebracht werden:

$$(ci)(ce) i_x c_x = \frac{1}{2} \{ (ci)^2 e_x + (ce)^2 i_x^2 - (ie)^2 c_x^2 \},$$

und wenn man daher die rechte Seite für die linke in das betreffende Glied substituirt, so spaltet es sich in drei zerfallende Glieder.

Dagegen tritt bei den geraden Ueberschiebungen kein solches Glied auf, weil hiebei jedesmal alle Factoren erster Art i_x, und ebenso keines bei der neunten Ueberschiebung, weil hier alle Factoren erster Art t_x aufgebraucht werden.

Wir erhalten sonach aus den Ueberschiebungen mit t_x^9 die Formen

$$(t, i)^2, \quad (t, i^2)^4, \quad (t, i^3)^6, \quad (t, i^4)^8, \quad (t, i^5)^9.$$

Weitere Ueberschiebungen brauchen hier nicht mehr untersucht zu werden, da das Quadrat der Form t, welche ja Functionaldeterminante ist, durch niedrigere Formen sich ausdrücken lässt.

212. *Die Ueberschiebungen von Producten von Formen.* Es erübrigt also nur noch die Ueberschiebungen der Form i^ϱ über das Product der Formen

$$f^\alpha \cdot \varphi^\beta \cdot t^\gamma$$

zu studiren.

Hiebei kann aber, da i quadratisch ist, also bei Faltung sich seine Linearfactoren höchstens auf zwei Formen vertheilen lassen, stets einer der Exponenten gleich null genommen werden. Von den sich so ergebenden drei verschiedenen Producten

$$t^\gamma \cdot \varphi^\beta, \quad f^\alpha \cdot \varphi^\beta, \quad f^\alpha \cdot t^\gamma$$

können die beiden ersten unberücksichtigt bleiben, da sie je eine Form geraden und je eine ungeraden Grades enthalten und somit stets die Linearfactoren von i^ϱ bei Faltung zunächst auf alle Factoren erster Art von φ vertheilt werden können, so dass eine Potenz der Invariante $(\varphi, i^3)^6$ als Factor auftritt.

Sonach bleiben nur noch die Ueberschiebungen

$$(f^\alpha \cdot t^\gamma, i^\varrho)^\lambda$$

zu studiren. Dabei muss 2ϱ sowohl als λ den Grad 9 von t übersteigen, da ja sonst a priori zerfallende Glieder in der Ueberschiebung auftreten, nämlich die bereits in das System aufgenommenen Ueberschiebungen von t über i^ϱ.

Setzen wir in erster Linie $\alpha = \gamma = 1$. Die Ueberschiebungen

$$(f \cdot t, i^5)^{10}, \quad (f \cdot t, i^6)^{11}, \quad (f \cdot t, i^6)^{12}, \quad (f \cdot t, i^7)^{13}$$

enthalten Glieder, welche in Producte von Gliedern zerfallen, die bereits betrachteten Ueberschiebungen angehören. Um nur ein Beispiel anzuführen: die Ueberschiebung $(f \cdot t, i^6)^{11}$ enthält ein Glied, in welchem die sechs Factoren erster Art von i^3 mit sechs Factoren von t zur Faltung kommen, während von den übrigen sechs Factoren fünf mit f gefaltet werden. Dieses Glied ist also ein Product zweier Glieder,

welche den Ueberschiebungen

$$(t,\ i^3)^6,\ \text{bezw.}\ (f,\ i^3)^5$$

angehören.

Dagegen liefert die Ueberschiebung

$$(f\cdot t,\ i^7)^{14}$$

eine neue Invariante, die wir mit R bezeichnen wollen. Ueberschiebungen höherer Potenzen von f und t brauchen nicht betrachtet zu werden; denn jede solche Ueberschiebung enthält immer Glieder, die R als Factor haben.

213. *Ueberblick über das vollständige Formensystem von $f = a_x^5$.* Wir haben somit das ganze Formensystem der Form fünfter Ordnung aufgestellt. Es besteht aus den 23 Formen:

1) $f,\ \varphi = (f, f)^2,\ t = (f, (f, f)^2),\ i = (f, f)^4,\ A = (i, i)^2$

2) $(f, i)^1,\ (f, i)^2,\ (f, i^2)^3,\ (f, i^2)^4,\ (f, i^3)^5$

3) $(\varphi, i)^1,\ (\varphi, i)^2,\ (\varphi, i^2)^3,\ (\varphi, i^2)^4,\ (\varphi, i^3)^5,\ (\varphi, i^3)^6$

4) $(t, i)^2,\ (t, i^2)^4,\ (t, i^3)^6,\ (t, i^4)^8,\ (t, i^5)^9$

5) $(f^2, i^5)^{10},\ (f\cdot t, i^7)^{14}.$

Es ist freilich noch nicht gezeigt, dass nicht einige dieser Formen durch die übrigen sich rational und ganz ausdrücken lassen; doch darf die Annahme gemacht werden, dass dieses System nicht mehr weiter reducibel ist, da alle bisherigen diesbezüglichen Untersuchungen keine gegentheiligen Resultate zu Tage gefördert haben.

Unter diesen 23 Formen befinden sich drei fundamentale Invarianten, nämlich:

$$(i,\ i)^2,\ (\varphi,\ i^3)^6,\ (f^2,\ i^5)^{10},$$

vom beziehungsweise vierten, achten und zwölften Grade in den Coefficienten. Hiezu tritt noch die Invariante

$$(f\cdot t,\ i^7)^{14}.$$

Sie ist vom Grade 18 in den Coefficienten und hat die Eigenschaft, bei der Transformation

$$x_1 = y_1,\quad x_2 = -\,y_2,$$

deren Modul $\Delta = -1$ ist, das Zeichen zu ändern. Denn das symbolische Product

$$\left(f\cdot (f,\ (f,\ f)^2),\ i^7\right)^{14}$$

enthält 90 Buchstaben, 70 herrührend von i^7, und viermal je fünf herrührend von f; dieselben vertheilen sich sonach auf 45 Klammerfactoren, und da bei dieser Transformation jeder solcher Klammerfactor sein Zeichen ändert, so ändert dasselbe die ganze Form, d. h. sie ist eine „schiefe Invariante“ (vergl. Nr. 8).

214. *Uebernommene Formen.* Die Formen $(f, f)^2$, $(f, (f, f)^2)$, $(f, f)^4$, welche in diesem Systeme auftreten, haben wir bereits auch im System der Form vierten Grades vorgefunden, und es ist die Frage, ob sich unter den Covarianten der Form fünften Grades nicht auch eine Covariante

$$j = (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2 a_x b_x c_x \tag{1}$$

befindet, welche der Invariante

$$j = (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2 \tag{2}$$

der Form vierten Grades entspricht. Erinnern wir uns, dass die Invariante j unsymbolisch die Form hatte:

$$j = 6 \begin{vmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

so können wir nunmehr für die Form fünften Grades die analoge Determinante bilden:

$$j = 6 \begin{vmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 & \bar{a}_5 \\ -x_2^3 & x_1 x_2^2 & -x_1^2 x_2 & x_1^3 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Setzt man hierin statt der wirklichen Coefficienten die symbolischen, so erhält man in derselben Weise, wie wir früher die Determinante (3) in (2) umgeformt hatten, für die Determinante (4) das symbolische Product (1).

Diese Covariante j befindet sich aber nicht unmittelbar im System, und es ist die nächste Frage, welche Stellung sie zu ihm einnimmt. Zu dem Zwecke werden wir sie so umformen, dass sie den Factor $(ac)^4$ erhält, was nach Nr. 98 stets möglich ist. Es ist:

$$a_x (bc) = b_x (ac) - c_x (ab),$$

also

$$j = (ab)^2 (ac)^3 (bc) b_x^2 c_x - (ab)^3 (ac)^2 (bc) b_x c_x^2.$$

Vertauscht man im zweiten Terme b mit c, so kommt:

$$j = 2 (ab)^2 (ac)^3 (bc) b_x^2 c_x.$$

Vertauscht man hierin a mit c und nimmt die halbe Summe der so entstehenden Ausdrücke, so erhalten wir endlich

$$j = -(ac)^4 (ab) (cb) b_x^3.$$

Das symbolische Product rechts wird aber durch die Ueberschiebung erhalten:

$$((ac)^4 a_x c_x, b_x^5)^2 = (i, f)^2,$$

d. h. j ist bis auf den Factor -1 nichts anderes, als die bereits im Systeme aufgenommene Ueberschiebung $(f, i)^2$.

Wir erkennen also die bemerkenswerthe Thatsache, dass sämmtliche Formen

$$f, \quad \Delta, \quad t, \quad i, \quad j \tag{1}$$

des vollständigen Systemes vierter Ordnung ihre entsprechenden Formen im System von $f = a_x^5$ besitzen, wobei die gegenseitige Beziehung durch die je zwei solchen Formen gemeinschaftlichen charakteristischen Klammerfactoren hergestellt ist. Wir nennen diese Formen

$$f, \quad (f, f), \quad (f, (f, f)^2), \quad (f, f)^4, \quad -(f, i)^2 \tag{2}$$

übernommene Formen. Sie gehen aus dem Systeme (1) einfach dadurch hervor, dass man die Formen desselben jedem Symbole entsprechend mit je einem Factor erster Art multiplicirt. Diese merkwürdige Thatsache wiederholt sich indessen später nicht mehr; das System der Form fünften Grades kann nicht mehr in das System der Form sechsten Grades in dieser Weise übernommen werden.

215. *Zweite Definition der Form j.* Es möge gleich an dieser Stelle eine die Form j geradezu definirende Eigenschaft derselben erwähnt werden. Wenn man nämlich die Ueberschiebungen von f mit j bildet, so zeigt sich, dass die dritte Ueberschiebung $(f, j)^3$ identisch verschwindet. Denn man hat:

$$(f, j)^3 = -(ab)^3 (bi)^2 a_x^2 .$$

Setzt man hierin

$$a_x (bi) = b_x (ai) - i_x (ab),$$

so kommt:

$$-(ab)^3 (bi) (ai) a_x b_x + (ab)^4 (bi) a_x i_x = (f, j)^3 .$$

Beide Terme links verschwinden; der erste, weil er bei Vertauschung von a mit b nur sein Zeichen ändert; der zweite, weil er nichts anderes darstellt, als die erste Ueberschiebung der quadratischen Form $i = (ab)^4 a_x b_x$ über sich selbst. Es ist also in der That:

$$(f, j)^3 = 0 .$$

Durch diese Eigenschaft ist aber j vollständig charakterisirt, d. h. ist ψ eine beliebige cubische Form, so beschaffen, dass

$$(f, \psi)^3 = 0,$$

dann ist stets:

$$\psi = j,$$

bis auf einen constanten Factor.

Ist nämlich

$$(f, \psi)^3 = a_x^2 (a\psi)^3 = a_x^2 (a_1 \psi_2 - \psi_1 a_2)^3 = 0$$

so müssen die Coefficienten von x einzeln verschwinden, d. h. es müssen die Gleichungen bestehen:

$$a_1^2 (a_1 \psi_2 - \psi_1 a_2)^3 = \overline{a}_0 \overline{\psi}_3 - 3\overline{a}_1 \overline{\psi}_2 + 3\overline{a}_2 \overline{\psi}_1 - \overline{a}_3 \overline{\psi}_0 = 0$$
$$a_1 a_2 (a_1 \psi_2 - \psi_1 a_2)^3 = \overline{a}_1 \overline{\psi}_3 - 3\overline{a}_2 \overline{\psi}_2 + 3\overline{a}_3 \overline{\psi}_1 - \overline{a}_4 \overline{\psi}_0 = 0$$
$$a_2^2 (a_1 \psi_2 - \psi_1 a_2)^3 = \overline{a}_2 \overline{\psi}_3 - 3\overline{a}_3 \overline{\psi}_2 + 3\overline{a}_4 \overline{\psi}_1 - \overline{a}_5 \overline{\psi}_0 = 0.$$

Bestimmt man hieraus die Verhältnisse der ψ_i und trägt deren Werthe in

$$\psi = \overline{\psi}_0 x_1^3 + 3\overline{\psi}_1 x_1^2 x_2 + 3\overline{\psi}_2 x_1 x_2^2 + \overline{\psi}_3 x_2^3$$

ein, so erhält man gerade die Covariante j.

Anmerkung. Alle Formen, welche den Factor $(aj)^3$ besitzen, verschwinden identisch, denn sie können durch Ueberschiebung mit $(f, j)^3 = (aj)^3 a_x^2$ entstanden gedacht werden. Der Klammerfactor $(aj)^3$ ist demnach Reducent.

216. *Ersetzung der Formen des Systemes durch eines ihrer Glieder.* Während nun die übernommenen Formen bereits einen einfachen symbolischen Ausdruck besitzen, der für die weiteren Rechnungen tauglich ist, sind die meisten der übrigen Formen des Systemes durch ein Aggregat symbolischer Producte dargestellt, das die symbolische Rechnung sehr erschweren würde. Es ist daher angezeigt, hier von dem Satze Gebrauch zu machen, dass sich jede Ueberschiebung durch eines ihrer Glieder und niedrigere Ueberschiebungen darstellen lässt. Indem wir alsdann von den niedrigeren Ueberschiebungen, als bekannten Bildungen, absehen, können wir direct das betreffende Glied, das ja alle charakteristischen Merkmale der Ueberschiebung besitzt, welcher es angehört, an Stelle der Ueberschiebung selbst in das Formensystem einfügen. Insbesondere wollen wir nun im Folgenden die quadratischen und linearen Covarianten, sowie die Invarianten durch eines ihrer Glieder ersetzen, soweit die betreffenden Ueberschiebungen nicht ohnehin schon durch ein einfaches symbolisches Product dargestellt sind.

217. *Die drei quadratischen Covarianten.* Als erste quadratische Covariante erhielten wir:

$$i = i_x^2 = (ab)^4 a_x b_x.$$

Zu einer zweiten giebt die Hesse'sche Form τ der cubischen Covariante j Veranlassung:

$$\tau = \tau_x^2 = (jj_1)^2 j_x j_{1x}.$$

Diese Form τ lässt sich auch noch in anderer Weise darstellen. Es ist:

$$(f, (j, i))^3 = (a_x^5, (ji) j_x^2 i_x)^3 = a_x^2 (aj)^2 (ai) (ji). \qquad (1)$$

Setzt man nach dem Identitätssatze:

$$a_x(ji) = -i_x(aj) + j_x(ai) \tag{2}$$

und führt diesen Werth von $a_x\,(ji)$ in (1) ein, so kommt, da der erste Term wegen des Reducenten $(aj)^3$ null ist:

$$(f,\ (ji))^3 = a_x j_x\,(aj)^2\,(ai)^2.$$

Der Ausdruck rechts kann als zweite Ueberschiebung von

$$a_x^3\,(ai)^2 \quad \text{über} \quad j_x^3$$

angesehen werden, oder auch, weil $a_x^3\,(ai)^2 = -j_x^3$, als zweite Ueberschiebung von $-j_x^3$ über j_x^3. Es ist also:

$$(f,\ (j,\ i))^3 = -(jj_1)^2 j_x j_{1x} = -\tau.$$

Die dritte quadratische Covariante endlich, die wir mit in unsere nächsten Betrachtungen hereinziehen, ist die Functionaldeterminante von i und τ, nämlich

$$\vartheta = (i,\ \tau) = (i\tau)\,i_x\tau_x.$$

Es fragt sich nun, in welchem Zusammenhange τ und ϑ mit den beiden andern im Systeme auftretenden quadratischen Covarianten $(\varphi,\ i^2)^4$ und $(\varphi,\ i^3)^5$ stehen.

Was die Covariante τ betrifft, so erkennt man sie leicht als ein Glied der Ueberschiebung $(\varphi,\ i^2)^4$. Denn da $j = -(ai)^2 a_x^3$, so ist

$$\tau = (jj')^2 j_x j'_x = ((ai)^2 a_x^3,\ (bi')^2 b_x^3)^2 = (ab)^2 (ai)^2 (bi')^2\,a_x\,b_x.$$

Der Term rechts kann aber durch viermalige Faltung des Productes

$$\varphi\cdot i^2 = (ab)^2 a_x^3 b_x^3\cdot i_x^2\cdot i_x'^2$$

erhalten werden, wodurch die Behauptung erwiesen ist.

Ganz ebenso ist ϑ ein Glied der Covariante $(\varphi,\ i^3)^5$. Denn

$$(i,\ \tau) = (i_x''^2,\ (ab)^2 (ai)^2 (bi')^2\,a_x\,b_x) = -(ab)^2 (ai)^2 (bi')^2 (ai'')\,b_x\,i''_x.$$

Der Ausdruck rechts geht durch fünfmalige Faltung aus dem Product

$$(ab)^2\,a_x^3\,b_x^3\cdot i_x^2\cdot i_x'^2\cdot i_x''^2$$

hervor, ist also in der That ein Glied von $(\varphi,\ i^3)^5$.

218. *Die fundamentalen Invarianten.* Wir hatten im Systeme zunächst drei gerade fundamentale Invarianten erhalten; es waren dies die Formen

$$(i,\ i)^2,\quad (\varphi,\ i^3)^6,\quad (f^2,\ i^5)^{10}.$$

Die erste derselben behalten wir im Folgenden bei und bezeichnen sie mit

$$A_{ii} = A = (i,\ i)^2.$$

An Stelle der zweiten setzen wir die zweite Ueberschiebung von i über τ, d. i. die Invariante

$$B = (i,\ \tau)^2.$$

Sie ist gleichfalls vom achten Grade in den Coefficienten und man erkennt sie als ein Glied der Ueberschiebung $(\varphi, i^3)^6$. Denn es ist

$$(i, \tau)^2 = (i_x''^2, (ab)^2 (ai)^2 (bi')^2 a_x b_x)^2 = (ab)^2 (ai)^2 (bi')^2 (ai'') (bi''),$$

ein Term, der auch durch sechsmalige Faltung aus $(ab)^2 a_x^3 b_x^3 \cdot i_x^2 i_x'^2 i_x''^2$ erhalten wird. Die dritte Invariante des Systemes ersetzen wir durch die Discriminante von j, oder (was das nämliche ist) durch die Discriminante von τ; wir erhalten

$$(\tau, \tau)^2 = C.$$

Ihren Zusammenhang mit $(f^2, i^5)^{10}$ werden wir später kennen lernen. (Vgl. Nr. 226). Da τ vom sechsten Grade ist in den Coefficienten von f, so ist C vom zwölften Grade wie $(f^2, i^5)^{10}$.

219. *Die vier linearen Covarianten.* Wir hatten im System als einfachste lineare Covariante erhalten:

$$(f, i^2)^4 = (a_x^5, i_x^2 \cdot i_x'^2)^4 = (ai)^2 (ai')^2 a_x. \tag{1}$$

Wir bezeichnen sie im Folgenden mit α, und man erkennt aus dem Factor $(ai)^2$, dass α betrachtet werden kann als zweite Ueberschiebung von $j = -(ai)^2 a_x^3$ über i, d. h. man hat:

$$\alpha = -(ji)^2 j_x.$$

Als zweite lineare Covariante trat im Systeme die Form $(f^3, i)^5$ auf. Wir ersetzen sie durch

$$\beta = (i, \alpha). \tag{2}$$

Beide Formen stimmen überein, denn man hat einestheils:

$$(i, \alpha) = (i_x^2, (i'a)^2 (i''a)^2 a_x) = (ia) (i'a)^2 (i''a)^2 i_x$$

und anderntheils

$$-(f, i^3)^5 = (i^3, f)^5 = (i_x^2 i_x'^2 i_x''^2, a_x^5)^5 = (ia) (i'a)^2 (i''a)^2 i_x.$$

Die dritte lineare Covariante γ wird von der Ueberschiebung

$$(t, i^4)^8 = ((ab)^2 (ca) a_x^2 b_x^3 c_x^4, i_{1x}^2 i_{2x}^2 i_{3x}^2 i_{4x}^2)^8$$

geliefert. Wir benutzen von ihr nämlich das Glied

$$\gamma = (ab)^2 (ac) (ai_1)^2 (bi_2)^2 b_x (ci_3)^2 (ci_4)^2.$$

Führen wir rechts das Symbol $\alpha_x = (ci_3)^2 (ci_4)^2 c_x$ ein, so geht γ über in

$$\gamma = (ab)^2 (a\alpha) (ai_1)^2 (bi_2)^2 b_x.$$

Das symbolische Product rechts ist aber nichts anderes als die erste Ueberschiebung von

$$\tau = (jj')^2 j_x j_x' = (ab)^2 (ai)^2 (bi')^2 a_x b_x$$

über α_x;

daher können wir die lineare Covariante γ darstellen durch

$$\gamma = (\tau, \alpha). \tag{3}$$

Was endlich die vierte lineare Covariante $(t, i^5)^9$ betrifft, welche im Systeme auftritt, so ersetzen wir sie zunächst durch ihr Glied:

$$(ab)^2 (ac)(ia)^2 (i_1 b)^2 (i_2 c)^2 (i_3 c)^2 (i_4 b) i_{4x} = G.$$

Vermöge der Identität: $(ac) i_{4x} = (i_4 c) a_x - (i_4 a) c_x$ geht dasselbe über in:

$$G = (ab)^2 (ia)^2 (i_1 b)^2 (i_2 c)^2 (i_3 c)^2 (i_4 c)(i_4 b) a_x$$
$$- (ab)^2 (ia)^2 (i_1 b)^2 (i_4 a)(i_4 b) \cdot (i_2 c)^2 (i_3 c)^2 c_x = G_1 - G_2.$$

Der Term G_2 besitzt den Factor $\alpha_x = (i_2 c)^2 (i_3 c)^2 c_x$, während sein anderer Factor nichts anderes ist als die Invariante

$$B = (\tau, i)^2 = ((ab)^2 (ai)^2 (b i_1)^2 a_x b_x, i_{4x}^2)^2.$$

Wir können daher von diesem Terme $G_2 = B \cdot \alpha$, als einem Producte bekannter Formen, absehen, und nunmehr G_1 als die einzuführende lineare Invariante δ definiren:

$$\delta = (ab)^2 (ia)^2 (i_1 b)^2 (i_2 c)^2 (i_3 c)^2 (i_4 c)(i_4 b) a_x.$$

Berücksichtigen wir, dass $(i_2 c)^2 (i_3 c^2)(i_4 c) i_{4x} = \beta_x$, so können wir diese Covariante δ (vom Vorzeichen abgesehen) auch darstellen durch

$$\delta = (ab)^2 (ia^2)(i_1 b)^2 (b\beta) a_x$$
$$= ((ab)^2 (ia)^2 (i_1 b)^2 b_x a_x, \beta_x) = ((j j_1)^2 j_x j_{1x}, \beta_x),$$

oder endlich durch

$$\delta = (\tau, \beta).^{*)} \tag{4}$$

220. *Die schiefe Invariante.* Wir greifen aus der Ueberschiebung $(f \cdot t, i^7)^{14}$, welche wir als schiefe Invariante erkannt haben, jenes Glied heraus, welches durch viermalige Faltung von a_x^5 mit $i_1{}^2$, also durch Bildung von α, sodann durch weitere achtmalige Faltung von $b_x^2 c_x^3 d_x^4$ mit $i_2{}^4$, also durch Bildung von γ, und endlich durch zweimalige Faltung von $\alpha \cdot \gamma$ mit i_3 entsteht. Dieses Glied

$$R = (i_x^2, \alpha_x \gamma_x)^2 = (i_x^2, (\tau\alpha)\tau_x \cdot \alpha_x)^2$$

oder

$$R = (i\tau)(\tau\alpha)(i\alpha) \tag{5}$$

führen wir als schiefe Invariante an Stelle von $(f \cdot t, i^7)^{14}$ in das System ein.

Wir können das symbolische Product (5) noch in verschiedener Weise durch Ueberschiebung erzeugen; so ist

$$(i\tau)(\tau\alpha)(i\alpha) = -((\tau\alpha)\tau_x, (i\alpha) i_x) = -(\gamma, \beta) = (\beta\gamma) \tag{6}$$
$$= -(\tau\alpha)(\tau\beta)$$

---

*) Clebsch führt in seinen „Binären Formen" als vierte lineare Covariante die Form (ϑ, α) ein.

oder

$$(i\tau)(\tau\alpha)(i\alpha) = ((i\alpha)(i\tau)\tau_x, \alpha_x) = -(\delta, \alpha) = (\alpha\delta) \tag{7}$$

oder

$$(i\tau)(\tau\alpha)(i\alpha) = ((i\tau)i_x\tau_x, \alpha_x^2)^2 = (\vartheta, \alpha^2)^2. \tag{8}$$

221. *Tabelle der wichtigsten Formen.* Ehe wir nun zu Anwendungen übergehen, wollen wir noch einmal jene Formen zusammenstellen, die wir in den folgenden Untersuchungen vorzugsweise benutzen werden. Es sind dies

1) die übernommenen Formen

$$f = a_x^5 \qquad t = (ab)^2(ca)a_x^2 b_x^3 c_x^4$$
$$\varphi = (ab)^2 a_x^3 b_x^3 \qquad -j = (ai)^2 a_x^3,$$
$$i = (ab)^4 a_x b_x$$

2) die Covarianten:

$$\tau = (jj_1)^2 j_x j_{1x} = -(f, (j, i))^3$$
$$\vartheta = (i\tau)\, i_x \tau_x$$
$$\alpha = (ai)^2(ai_1)^2 a_x = -(ji)^2 j_x$$
$$\beta = (i\alpha)\, i_x$$
$$\gamma = (\tau\alpha)\,\tau_x$$
$$\delta = (\tau\beta)\,\tau_x,$$

3) die Invarianten:

$$A = (i, i)^2, \quad B = (i, \tau)^2, \quad C = (\tau, \tau)^2,$$
$$R = (\beta\gamma) = (\alpha\delta) = (\vartheta\alpha)^2 = (i\tau)(\tau\alpha)(i\alpha) = -(\tau\alpha)(\tau\beta).$$

Hiezu treten noch

4) drei Hilfsinvarianten

$$M = (i\alpha)^2 = (\beta\alpha)$$
$$N = (\tau\alpha)^2 = (\gamma\alpha)$$
$$P = (\tau\beta)^2 = (\delta\beta),$$

welche bezw. vom 12., 16. und 20. Grade in den Coefficienten sind, während A, B, C bezw. die Grade 4, 8, 12 besitzen. Wir werden die Darstellung der Formen M, N, P durch die drei Fundamentalinvarianten in den folgenden Paragraphen kennen lernen.

§ 23. Relationen zwischen den In- und Covarianten der Form fünften Grades.

222. *Die Quadrate der linearen Covarianten* β, γ, δ. Die im vorigen Paragraphen eingeführten linearen Covarianten β, γ, δ haben wir in Functionaldeterminantenform dargestellt; ihre Quadrate müssen

sich also durch einfachere Formen ausdrücken lassen. In der That, erhebt man zunächst die Identität

$$(i i_1)\, \alpha_x = (\alpha i_1)\, i_x - (\alpha i)\, i_{1x}$$

in das Quadrat, so erhält man:

$$(i i_1)^2 \cdot \alpha^2 = (\alpha i_1)^2 \cdot i + (\alpha i)^2 \cdot i_1 - 2\, (\alpha i_1)(\alpha i)\, i_{1x}\, i_x$$

oder:

$$A \cdot \alpha^2 = 2M \cdot i - 2\beta^2. \tag{1}$$

Ebenso findet man unter Benutzung der Identitäten

$$(\tau\tau_1)\, \alpha = (\alpha\tau_1)\, \tau_x - (\alpha\tau)\, \tau_{1x}$$

$$(\tau\tau_1)\, \beta = (\beta\tau_1)\, \tau_x - (\beta\tau)\, \tau_{1x}$$

die Relationen:

$$C \cdot \alpha^2 = 2N \cdot \tau - 2\gamma^2 \tag{2}$$

$$C \cdot \beta^2 = 2P \cdot \tau - 2\delta^2. \tag{3}$$

223. *Die simultanen Invarianten der vier linearen Covarianten.* Die vier linearen Formen α, β, γ, δ liefern ferner sechs simultane Invarianten:

$$(\beta\alpha), \quad (\gamma\alpha), \quad (\delta\beta); \quad (\delta\alpha), \quad (\delta\gamma), \quad (\gamma\beta).$$

Die drei ersten derselben haben wir bereits als Hilfsinvarianten M N, P eingeführt; die Formen $(\delta\alpha)$ und $(\gamma\beta)$ stimmen mit $-R$ überein; es bleibt also nur noch die Form $(\delta\gamma)$ zu berechnen. Nun ist:

$$(\delta,\, \gamma) = (\tau\beta)(\tau\gamma) = ((\tau\gamma)\, \tau_x\,,\ \beta)$$

$$= ((\tau_1\alpha)(\tau\tau_1)\, \tau_x\,,\ \beta)\,. \tag{1}$$

Gemäss dem Identitätssatze ist aber

$$(\tau_1\alpha)\, \tau_x - (\tau\alpha)\, \tau_{1x} = -(\tau\tau_1)\, \alpha_x\,.$$

Vertauscht man also in (1) τ mit τ_1 und nimmt die halbe Summe, so kommt:

$$(\delta\gamma) = \left(-\frac{1}{2}\, (\tau\tau_1)^2\, \alpha_x\,,\ \beta_x\right) = \frac{1}{2}\, M \cdot C\,. \tag{2}$$

Damit ist auch die sechste dieser simultanen Invarianten auf bekannte Formen reducirt. Es tritt an uns nunmehr die Aufgabe heran, die hiebei benutzten Hilfsinvarianten M, N, P als ganze Functionen der drei Fundamentalinvarianten darzustellen. Was die letzte dieser drei Formen betrifft, so können wir sie unmittelbar auf die beiden andern reduciren. Denn überschiebt man die Relation (1) Nr. 222 zweimal über τ, so findet man unmittelbar:

$$P = \frac{1}{2}\left\{2BM - AN\right\}\cdot \tag{3}$$

Demnach bleibt uns nur mehr die Aufgabe, M und N als Functionen von A, B und C darzustellen.

224. *Berechnung der Form N.* Das Princip, das uns bei Aufstellung von Relationen leitet, lässt sich dahin formuliren: Ein und dieselbe Form in zweifacher Weise durch Ueberschiebung darzustellen. Nun war N definirt durch

$$N = (\tau\alpha)^2 = (jj_1)^2 (j_1\alpha)(j\alpha). \tag{1}$$

Es handelt sich also nur darum, das symbolische Product $(jj_1)^2(j_1\alpha)(j\alpha)$ durch Ueberschiebung anderer Formen zu gewinnen. Der symbolische Factor $(j\alpha)$ veranlasst uns, die erste Ueberschiebung von j über $\alpha = -(ji)^2 j_x$ zu berechnen.

Man erhält:

$$\begin{aligned}(j,\ \alpha) &= -j_x^2 (jj_1)(j_1 i)^2 \\ &= -j_x (jj_1)(j_1 i)\{j_{1x}(ji) - i_x (jj_1)\} \\ &= -j_x j_{1x} (jj_1)(j_1 i)(ji) + j_x i_x (jj_1)^2 (j_1 i).\end{aligned}$$

Der erste Term rechts ist null; denn er ändert durch Vertauschung von j mit j_1 nur sein Zeichen. Der zweite Term ist aber nichts anderes, als $-\vartheta$; denn man hat:

$$-\vartheta = (\tau,\ i) = ((jj_1)^2 j_x j_{1x},\ i_x^2) = j_x i_x (jj_1)^2 (j_1 i).$$

Daher hat man zunächst die Relation

$$(j,\ \alpha) = -\vartheta. \tag{2}$$

Ueberschiebt man aber diese Gleichung zweimal über sich selbst, so kommt:

$$(j\alpha)(j_1\alpha)(jj_1)^2 = (\vartheta,\ \vartheta)^2. \tag{3}$$

Es ist aber nach der Theorie der quadratischen Formen

$$2(\vartheta,\ \vartheta)^2 = A_{ii} A_{\tau\tau} - A_{i\tau}^2 = AC - B^2 \tag{4}$$

und demnach durch Comparation von (1), (3) und (4)

$$N = \frac{1}{2}(AC - B^2).$$

225. *Hilfssatz zur Berechnung von M.* Es erübrigt noch, die Form M zu berechnen; zu dem Zwecke beweisen wir zuerst die Hilfsrelation

$$(f,\ \tau)^2 = -\left\{\frac{2}{3} Aj + i\alpha\right\},$$

indem wir von einem der symbolischen Producte rechts, etwa von Aj, ausgehen und dasselbe geeignet umformen. Es ist

$$-\frac{2}{3} Aj = -\frac{2}{3}(ab)^4 (ai)(bi) \cdot j_x^3.$$

Gemäss dem Identitätssatze ist

$$(ab)^3 j_x^3 = (aj)^3 b_x^3 - 3(aj)^2 (bj) b_x^2 a_x + 3(aj)(bj)^2 b_x a_x^2 - (bj)^3 a_x^3,$$

also, da der erste und letzte Term rechts wegen des Reducenten $(aj)^3$ verschwinden:

$$-\frac{2}{3}Aj = \left\{2(ab)(aj)^2(bj)b_x^2 a_x - 2(ab)(aj)(bj)^2 b_x a_x^2\right\}(ai)(bi)$$
$$= 2(ab)(aj)(bj)(ai)(bi)b_x a_x\{(aj)b_x - (bj)a_x\}$$
$$= 2(ab)^2(aj)(bj)j_x \cdot (ai)(bi)b_x a_x .$$

Unter Benutzung des Productsatzes

$$(ai)(bi)a_x b_x = \frac{1}{2}\left\{(ai)^2 b_x^2 + (bi)^2 a_x^2 - (ab)^2 i_x^2\right\}$$

geht das letzte symbolische Product über in

$$-\frac{2}{3}Aj = (ab)^2(aj)(bj)(ai)^2 b_x^2 j_x$$
$$+ (ab)^2(aj)(bj)(bi)^2 a_x^2 j_x - (ab)^4(aj)(bj)j_x \cdot i .$$

Die beiden ersten Terme rechts repräsentiren die nämliche Form; der zweite Term zerfällt in $(i, j)^2 \cdot i = -\alpha \cdot i$. Demnach wird

$$-\frac{2}{3}Aj = 2(ai)^2(ab)^2(aj)(bj)b_x^2 j_x + i\cdot\alpha .$$

Der symbolische Factor $(ai)^2$ des ersten Termes rechts veranlasst uns, da ja $(ai)^2 a_x^3 = -j_x^3$ das Symbol $j_1' = -(ai)^2 a_1$, $j_2' = -(ai)^2 a_2$ einzuführen. Dadurch wird

$$-\frac{2}{3}Aj = -2(j'b)^2(j'j)(bj)b_x^2 j_x + i\alpha$$
$$= -\{(j'b)j_x - (jb)j_x'\}(j'b)(j'j)(bj)b_x^2 + i\alpha$$
$$= -(j'j)^2(j'b)(bj)b_x^3 + i\alpha$$
$$= (f,\ (jj')^2 j_x j_x')^2 + i\alpha ,$$

oder, weil ja $\tau = (jj')^2 j_x j_x'$:

$$(f,\ \tau)^2 = -\left\{\frac{2}{3}Aj + i\alpha\right\}. \tag{1}$$

226. *Berechnung der Form M.* Schiebt man nun diese Relation

$$-3(a\tau)^2 a_x^3 = 2Aj + 3i\alpha$$

dreimal über die Form

$$(j,\ i) = (ji)j_x^2 i_x ,$$

so entsteht links:

$$-3(a\tau)^2(ji)(aj)^2(ai) = +3(a\tau)(aj)^2(ai)\{(ai)(\tau j) + (ja)(\tau i)\} ,$$

d. i., weil wegen $(aj)^3 a_x^2 = 0$ der zweite Term rechts verschwindet:

$$= 3(a\tau)(\tau j)(aj)^2(ai)^2 = -3(ai)^2(aj)^2(a\tau)(j\tau)$$
$$= -3((ai)^2(aj)^2 a_x j_x ,\ \tau_x^2)^2 .$$

Nun ist aber $-(ai)^2 a_x^3 = j$; daher lässt sich diese Ueberschiebung auch schreiben

$$= + 3((jj_1)^2 j_x j_{1x}, \tau)^2 = 3(\tau, \tau)^2 = 3C. \tag{1}$$

Auf der rechten Seite erhalten wir durch die dreimalige Ueberschiebung: 1) das Glied

$$(2Aj, (j, i))^3 = 2A \cdot (j_1 i)(jj_1)^2 (ji) = 2A \cdot (\tau, i)^2 = 2A \cdot B, \tag{2}$$

2) das Glied

$$(3i_1 \cdot \alpha, (ji) j_x^2 i_x)^3 = (ji)(i_1 j)^2 (\alpha i) + 2(ji)(\alpha j)(i_1 j)(i_1 i).$$

Der zweite Term rechts ist null; denn er ändert durch Vertauschung von i mit i_1 nur sein Zeichen. Der erste Term kann aber dargestellt werden durch

$$\begin{aligned}(ji_1)^2 (ji)(\alpha i) &= ((ji_1)^2 j_x, (\alpha i) i_x) \\ &= (-\alpha_x, (\alpha i) i_x) \\ &= -(\alpha i)^2 = -M. \end{aligned} \tag{3}$$

Die gesuchte Relation wird demnach

$$3C = 2AB - M.$$

Fassen wir die bisher gewonnenen Resultate zusammen, so erhalten wir:

$$(\tau\alpha)^2 = N = \frac{1}{2}(AC - B^2) \tag{4}$$

$$(i\alpha)^2 = M = 2AB - 3C \tag{5}$$

$$(\tau\beta)^2 = P = \frac{1}{4}(9AB^2 - A^2C - 12BC). \tag{6}$$

Die Gleichung (5) lehrt auch, dass wir berechtigt waren, $(\tau, \tau)^2 = C$ an Stelle von $(f^2, i^5)^{10}$ einzuführen. Denn $(i\alpha)^2$ ist das Glied

$$G = ((ai_1)^2 (ai_2)^2 a_x \cdot (bi_3)^2 (bi_4)^2 b_x, i_{5x}^2)^2$$

dieser Ueberschiebung $(f^2, i^5)^{10}$.

227. *Die Ueberschiebungen der quadratischen Formen i, τ, ϑ.* Eine weitere Reihe von Relationen, deren wir später bedürfen, liefern die gegenseitigen Ueberschiebungen der quadratischen Formen des Systemes, sowie die Ueberschiebungen dieser Formen über die vier linearen Formen. Sie sind leicht zu ermitteln, da die simultanen Systeme dieser Formen niedrigern Grades nach den früheren Entwicklungen bekannt sind. Es ist überhaupt, wie wir schon bisher sehen konnten, nützlich, das Studium der Systeme höherer Formen dadurch zu vereinfachen, dass man insbesondere die Ueberschiebungen der linearen und quadratischen Formen des Systemes in den Vordergrund stellt.

Die drei quadratischen Formen des Systemes waren i, τ, ϑ.

Da ϑ Functionaldeterminante der beiden ersten Formen ist, so haben wir nach der Theorie der quadratischen Formen unmittelbar folgende Relationen (vgl. Nr. 127):

$$(i,\ \vartheta) = \frac{1}{2}\left\{B \cdot i - A \cdot \tau\right\} \tag{1}$$

$$(\tau,\ \vartheta) = \frac{1}{2}\left\{C \cdot i - B \cdot \tau\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}(i,\ \vartheta)^2 &= A_{i\vartheta} = 0\\ (\tau,\ \vartheta)^2 &= A_{\tau\vartheta} = 0\end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

$$-\ 2\vartheta^2 = A\tau^2 - 2Bi\tau + Ci^2. \tag{3}$$

Aus der letzten dieser Relationen geht ohne weiteres die Beziehung hervor, welche zwischen dem Quadrat der schiefen Invariante R und den übrigen fundamentalen Invarianten besteht. Denn es war

$$R = (\vartheta,\ \alpha^2)^2.$$

Ersetzt man also in dieser Relation x durch α, so kommt:

$$-2R^2 = A\,N^2 - 2BMN + CM^2. \tag{4}$$

228. *Die Ueberschiebungen von ϑ über α, β, γ, δ.* Von den Ueberschiebungen der quadratischen Formen i, τ, ϑ will ich, soweit wir sie nicht ohnehin schon berechnet haben, noch jene Formen ermitteln, welche sich bei einmaliger Ueberschiebung der Form ϑ über α, β, γ, δ ergeben. Alle weiteren Ueberschiebungen mögen der selbstständigen Uebung zugewiesen sein.

Um nun aber $(\vartheta,\ \alpha)$, $(\vartheta,\ \beta)$, $(\vartheta,\ \gamma)$, $(\vartheta,\ \delta)$ zu berechnen, benutzen wir einfach die schon bei Gelegenheit der quadratischen Formen gegebene Reihenentwicklung [vgl. Nr. 125 (2)]:

$$\vartheta_x\vartheta_y = (i\tau)\,i_x\tau_y - \frac{B}{2}\,(xy) = (i\tau)\,i_y\tau_x - \frac{B}{2}\,(yx).$$

Wir ersetzen in diesen Gleichungen x resp. y der Reihe nach durch α, β, γ, δ und erhalten nach einfacher Umformung:

$$(\vartheta,\alpha) = (i\tau)(i\alpha)\,\tau_x - \frac{B}{2}\,\alpha = -(\tau\beta)\,\tau_x - \frac{B}{2}\,\alpha = -\,\delta - \frac{B}{2}\,\alpha \tag{1}$$

$$\begin{aligned}(\vartheta,\beta) &= (i\tau)(i\beta)\,\tau_x - \frac{B}{2}\,\beta = (i\tau)(ii_1)(i_1\alpha)\,\tau_x - \frac{B}{2}\,\beta\\ &= \frac{A}{2}\,(\tau\alpha)\,\tau_x - \frac{B}{2}\,\beta = +\,\frac{A}{2}\,\gamma - \frac{B}{2}\,\beta\end{aligned} \tag{2}$$

$$(\vartheta,\gamma) = (i\tau)(\tau\gamma)\,i_x + \frac{B}{2}\,\gamma = (i\tau)(\tau\tau_1)(\tau_1\alpha)\,i_x + \frac{B}{2}\,\gamma = -\,\frac{C}{2}\,\beta + \frac{B}{2}\,\gamma \tag{3}$$

$$(\vartheta,\delta) = (i\tau)(\tau\delta)\,i_x + \frac{B}{2}\,\delta = (i\tau)(\tau\tau_1)(\tau_1\beta)\,i_x + \frac{B}{2}\,\delta = +\,\frac{AC}{4}\,\alpha + \frac{B}{2}\,\delta. \tag{4}$$

In ähnlicher Weise erhält man unter Benutzung dieser vier Relationen die Ueberschiebungen von ϑ über Producte der linearen Covarianten.

Damit will ich diese Untersuchungen vorläufig abschliessen. Wir werden im folgenden Paragraphen noch eine Reihe anderer Ueberschiebungen berechnen, so weit wir derselben zur Lösung der dort gestellten Aufgabe bedürfen. Insbesondere werden wir an geeigneter Stelle die Ueberschiebungen von f über die linearen Covarianten α, β, γ, δ durch Formen des Systemes und durch Ueberschiebungen derselben darstellen.

§ 24. Typische Darstellung der Form fünften Grades.

229. *Begriff der typischen Darstellung.* Unter typischer Darstellung einer Form $f = a_x^n$ versteht man im Allgemeinen eine derartige Darstellung derselben, dass die Coefficienten Invarianten und die beiden Variabeln irgend zwei Covarianten des Systemes sind. Der neue Ausdruck für f ist alsdann der unveränderliche Typus für alle Formen, die aus f durch lineare Transformation hervorgehen; und umgekehrt: Haben zwei Formen f die nämliche typische Form, so können sie stets durch lineare Transformation in einander übergeführt werden.

Für Formen ungeraden Grades kann die typische Darstellung unter anderm auf folgendem Wege erreicht werden. Dieselben besitzen im allgemeinen Falle und wenn $n > 3$ stets mindestens zwei lineare Covarianten α_x und β_x mit nicht verschwindender Determinante $(\alpha\beta)$, wie Clebsch (vgl. „Binäre Formen" § 90, Seite 357) gezeigt hat, und diese werden als neue Variable für die typische Darstellung benutzt. Erhebt man nämlich die Identität:

$$a_x(\alpha\beta) = \alpha_x(a\beta) - \beta_x(a\alpha)$$

auf die n^{te} Potenz, so kommt:

$$a_x^n \cdot (\alpha\beta)^n = \alpha_x^n (a\beta)^n - \binom{n}{1}\alpha_x^{n-1}\beta_x(a\beta)^{n-1}(a\alpha) + \cdots \pm \beta_x^n (a\alpha)^n$$

oder:

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)^n \cdot f = (f, \beta^n)^n \cdot \alpha_x^n - \binom{n}{1}(f, \beta^{n-1}\alpha)^n \cdot \alpha_x^{n-1}\beta_x \\ + \binom{n}{2}(f, \beta^{n-2}\alpha^2)^n \cdot \alpha_x^{n-2}\beta_x^2 - \cdots \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Hierin sind aber die Variabeln Covarianten, die Coefficienten Invarianten, und man hat nur noch die Aufgabe zu lösen, diese Invarianten:

$$(f, \beta^n)^n, \quad (f, \beta^{n-1}\alpha)^n, \quad (f, \beta^{n-2}\alpha^2)^n \cdots (f, \alpha^n)^n, \quad (\alpha\beta)^n \qquad \text{(II)}$$

durch die fundamentalen Invarianten des Systemes zu ersetzen. Man

hätte auch, wie dies Hermite gethan hat, statt der linearen Formen α und β die linearen Factoren einer quadratischen Covariante des Systemes benutzen können. Dadurch ist man freilich genöthigt, Irrationalitäten einzuführen; aber die typischen Coefficienten sind alsdann vom niedrigeren Grade in den Coefficienten der ursprünglichen Form.

Um nun die Form $f = a_x^5$ typisch darzustellen, benutzen wir zunächst die beiden linearen Covarianten

$$\alpha_x = (f, i^2)^4, \quad \beta_x = -(f, i^3)^5.$$

Wir erhalten alsdann, weil $(\alpha\beta) = -M = 3C - 2AB$:

$$(-M)^5 \cdot f = \alpha_x^5 \cdot (f, \beta^5)^5 - 5\alpha_x^4 \beta_x \cdot (f, \beta^4 \alpha)^5 + 10\alpha_x^3 \beta_x^2 (f, \beta^3 \alpha^2)^5 - \cdots - \beta_x^5 (f, \alpha^5)^5$$

und unsere Aufgabe besteht nun darin, die sechs Invarianten

$$(f, \beta^5)^5, \quad (f, \beta^4 \alpha)^5, \quad (f, \beta^3 \alpha^2)^5, \quad (f, \beta^2 \alpha^3)^5, \quad (f, \beta \alpha^4)^5, \quad (f, \alpha^5)^5$$

durch die Invarianten A, B, C, R des Systemes darzustellen.

230. *Berechnung der Ueberschiebungen* $(f, \alpha^\varrho)^\varrho$. Zu dem Zwecke haben wir zunächst die fünf Ueberschiebungen von f über α durch andere Ueberschiebungen darzustellen, eine Aufgabe, die wir hier, wenn auch nicht in voller Ausführlichkeit, erledigen wollen. Man findet zunächst:

$$(f, \alpha) = 2\,((f, j)^2, i) \tag{I}$$

$$(f, \alpha^2)^2 = \frac{3}{2}\,\alpha\tau - Ai\alpha + \lambda j, \tag{II}$$

wobei λ den Werth $B - \frac{2}{3} A^2$ besitzt. Um zur ersten Gleichung zu gelangen, hat man in $(a\alpha) a_x^4$ die Form α_x durch ihren Werth $-(ji)^2 j_x$ zu ersetzen und das so entstehende symbolische Product durch den Identitätssatz umzuformen. Indem man dann anderntheils die Polare $(f, j)_y^2$ berechnet und darin y durch i ersetzt, kommt man durch abermalige Anwendung derselben Identität direct zu Gleichung (I).

Complicirter gestaltet sich die Herstellung der zweiten Relation. Man benutzt die eben gewonnene Relation (I) und überschiebt sie nochmals über die Form α, indem man der Einfachheit halber für $(f, j)^2$ zunächst die Bezeichnung p_x^4 einführt. Dies liefert

$$4(f, \alpha^2)^2 = 6p_x^2\, i_x\, (pi)(p\alpha)\, i_x + 2p_x^3\, (pi)\, (i\alpha),$$

oder, indem man im zweiten Terme rechts $p_x\,(i\alpha)$ durch $i_x\,(p\alpha) - \alpha_x\,(pi)$ ersetzt:

$$4(f, \alpha^2)^2 = 8\,(pi)(p\alpha)\, p_x^2\, i_x - 2\,(pi)^2\, \alpha_x\, p_x^2\,. \tag{1}$$

Man hat nun zu berücksichtigen, dass die beiden Glieder der schon mehrmals benutzten Polare $(f, j)_y^2$ einander gleich sind, da ihre Differenz

wegen des sich einstellenden Factors $(aj)^3$ verschwindet, dass also

$$p_x^3 p_y = (aj)^2 a_x^3 j_y \tag{2}$$

$$p_x^3 p_y = (aj) a_x^2 j_x a_y. \tag{3}$$

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen lässt sich nun leicht in (1) das Symbol p wiederum eliminiren, da auch die beiden Glieder von $p_x^2 p_y^2$ in (3) identisch gleich sind, und man findet so:

$$4(f, \alpha^2)^2 = 8(aj)^2(ai)(j\alpha) a_x^2 i_x - 2(aj)^2(ai)^2 a_x j_x \alpha_x \cdot \tag{4}$$

Hierin ist der zweite Term incl. Vorzeichen nichts anderes als $+ 2\tau \cdot \alpha$. Der erste Term aber geht durch die Substitution $i_x(aj) = j_x(ai) - a_x(ji)$ über in

$$8(aj)^2(ai)(j\alpha) a_x^2 i_x = 8(aj)(ai)^2(j\alpha) j_x a_x^2 - 8(aj)(ai)(j\alpha)(ji) a_x^3, \tag{5}$$

wobei [vgl. auch Nr. 221, und Nr. 224 (2)]

$$(aj)(ai)^2(j\alpha) j_x a_x^2 = (-(ai)^2 a_x^3, -(j\alpha) j_x^2) = (j, \vartheta) = \frac{\tau \cdot \alpha}{2}$$

$$-(aj)(ai)(j\alpha)(ji) a_x^3 = (a_x^5, -(j\alpha)(ji) i_x j_x)^3 = (f, (\vartheta, i))^2.$$

Demnach wird

$$4(f, \alpha^2)^2 = 6\alpha\tau + 8(f, (\vartheta, i))^2.$$

Führen wir hierin nun den in Nr. 227 (1) berechneten Werth von (ϑ, i) ein und eliminiren die sich hiebei einstellende Form $(f, \tau)^2$ mittelst Gleichung (1) Nr. 225, so ergiebt sich in der That die oben gegebene Relation (II). Aus den beiden Relationen (I) und (II) gehen nun die übrigen Ueberschiebungen direct hervor. Man überschiebt (II) abermals über α und findet:

$$(f, \alpha^3)^3 = \alpha \cdot \gamma - \frac{2}{3} A \cdot \alpha \cdot \beta - \lambda \cdot \vartheta \tag{III}$$

und hieraus durch weitere Ueberschiebungen

$$(f, \alpha^4)^4 = \mu \cdot \alpha + \lambda \cdot \delta \tag{IV}$$

$$(f, \alpha^5)^5 = -\lambda \cdot R, \tag{V}$$

wobei μ den Werth $\frac{1}{2} N - \frac{1}{3} AM + \lambda \frac{B}{2}$ besitzt.

231. *Berechnung der typischen Coefficienten.* Die soeben berechneten Ueberschiebungen gestatten uns nun in Verbindung mit den in Nr. 222 gegebenen Relationen für die Quadrate der Functionaldeterminanten β^2, γ^2, δ^2 in einfacher Weise nicht nur die typischen Coefficienten, sondern überhaupt alle Ueberschiebungen von f über ein Product $\alpha^\varkappa \beta^\lambda \gamma^\mu \delta^\nu$, $\varkappa + \lambda + \mu + \nu = 5$, durch die Invarianten des Systemes darzustellen. Insbesondere ist:



$$(f,\ \alpha^5)^5 \quad = -\lambda\cdot R$$

$$(f,\ \alpha^4\beta)^5 = ((f,\ \alpha^4)^4,\ \beta) \quad = -\mu\cdot M + \lambda P$$

$$(f,\ \alpha^3\beta^2)^5 = ((f,\ \alpha^3)^3,\ \beta^2)^2 = (f,\ \alpha^3\cdot i)^5 M - (f,\ \alpha^5)^5 \frac{A}{2}$$

$$= + R\left(M + \frac{\lambda}{2} A\right), [\text{weil}: (f,i)^2 = -j,\ -(j,\alpha)^3 = (\vartheta,\alpha^2)^2 = R]$$

$$(f,\ \alpha^2\beta^3)^5 = \left((f,\ \alpha^2)^2,\ \beta\left(Mi - \frac{A\alpha^2}{2}\right)\right)^3$$

$$= (f,\ \alpha^2\beta\, i)^5 M - (f,\ \alpha^4\beta)^5 \frac{A}{2},\quad [\text{weil}: (-j,\alpha^2\beta)^3 = (\vartheta,\alpha\beta)^2]$$

$$= M\left(\frac{A}{2}N - \frac{B}{2}M\right) - \frac{A}{2}(\lambda P - \mu M), \qquad [\text{vgl. Nr. } 228\,(1)]$$

$$(f,\ \alpha\cdot\beta^4)^5 = -AMR - \frac{A^2}{4}\cdot\lambda\cdot R$$

$$(f,\ \beta^5)^5 \quad = (f,\ \beta i^2)^5 M^2 - (f,\ \beta\alpha^2 i)^5 A\,.\,M + (f,\ \beta\alpha^4)^5\frac{A^2}{4},\quad [-(j,\ i)^2 = \alpha]$$

$$= -M^3 + AM\left(\frac{A}{2}N - \frac{B}{2}M\right) + \frac{A^2}{4}(\lambda P - \mu M).$$

232. *Typische Darstellung der Covariante j.* Ehe wir die typischen Darstellungen der Form f weiter verfolgen, wollen wir auch für die Covariante j eine solche geben, indem wir hiezu die linearen Covarianten α und δ benutzen. Nach dem binomischen Lehrsatze erhält man:

$$(\alpha\delta)^3 j_x^3 = (j\delta)^3\alpha_x^3 - 3(j\delta)^2(j\alpha)\alpha_x^2\delta_x + 3(j\delta)(j\alpha)^2\alpha_x\delta_x - (j\alpha)^3\delta_x^3.$$

Hierin ist:

1) $(j\alpha)^3 \quad = ((j,\ \alpha),\ \alpha^2)^2 = (-\vartheta,\ \alpha^2)^2 = -R$ (vgl. Nr. 224 (2), 220 (8)),

2) $(j,\alpha^2\delta)^3 = ((j,\ \alpha),\ \alpha\delta)^2 = (-\vartheta,\ \alpha\delta)^2 = (-(\vartheta,\ \alpha),\ \delta)$

$$= \left(\delta + \frac{B}{2}\alpha,\ \delta\right) = + \frac{B}{2}\cdot R \qquad \text{(vgl. Nr. 228 (1))},$$

3) $(j,\alpha\delta^2)^3 = (-\vartheta,\ \delta^2)^2 = \left(-\vartheta,\ P\tau - C\cdot\frac{\beta^2}{2}\right)^2$ (vgl. Nr. 222 (3)),

$$= -P\cdot(\vartheta,\ \tau)^2 + \frac{C}{2}(\vartheta,\ \beta^2)^2,$$

oder, weil nach Nr. 227 (2a) die Form $(\vartheta,\ \tau)^2 = 0$, so kommt:

$$(j,\ \alpha\delta^2)^3 = \frac{C}{2}((\vartheta,\ \beta),\ \beta) = \frac{C}{2}\left(\frac{A}{2}\gamma - \frac{B}{2}\beta,\ \beta\right) = -\frac{CA}{4}R,$$

4) $(j,\ \delta^3)^3 = \left(j,\ \delta\left(P\tau - \frac{C}{2}\beta^2\right)\right)^3 = P\cdot(j,\ \delta\tau)^3 - \frac{C}{2}(j,\ \delta\beta^2)^3,$

oder, weil $(j,\ \tau)^2$ gemäss der Theorie cubischer Formen verschwindet:

$$(j,\ \delta^3)^3 = -\frac{C}{2}\left(j,\ \delta\left(Mi - \frac{A\alpha^2}{2}\right)\right)^3 = +\frac{CR}{2}\left(M + \frac{AB}{4}\right).$$

Die typische Darstellung von j wird also, da $(\alpha\delta) = + R$, nach Division mit R

$$R^2 \cdot j = \delta^3 + \frac{3B}{2} \cdot \delta^2 \alpha + \frac{3}{4} AC \cdot \delta \alpha^2 + \frac{C}{2}\left(M + \frac{AB}{4}\right) \cdot \alpha^3. \qquad \text{(I)}$$

Nehmen wir an, die cubische Form j besitze, gleich null gesetzt, drei verschiedene Wurzeln $m_1\, m_2\, m_3$, was ja im Allgemeinen auch der Fall sein wird, da sonst die Invariante $C = (\tau, \tau)^2$ des Systems verschwinden würde, so können wir schreiben:

$$R^2 \cdot j = (\delta - m_1 \alpha)(\delta - m_2 \alpha)(\delta - m_3 \alpha). \qquad \text{(II)}$$

233. *Darstellung der Form f durch drei fünfte Potenzen.* Eine der wichtigsten typischen Darstellungen der Form f ist die typische Darstellung durch fünfte Potenzen. Der Umstand, dass

$$(f, j)^3 = 0, \qquad (1)$$

zeigt, dass es immer möglich ist, f in die Gestalt

$$f = k_1 p_x^5 + k_2 q_x^5 + k_3 r_x^5$$

zu bringen, wo p_x, q_x, r_x die drei linearen als von einander verschieden angenommenen Factoren der cubischen Form j sind. Denn nach den Ueberschiebungsgesetzen (vergl. Nr. 38) ist stets:

$$(k_1 p_x^5 + k_2 q_x^5 + k_3 r_x^5,\ p_x q_x r_x)^3 = 0,$$

und diese Gleichung ist ja gerade die Definitionsgleichung der Covariante $j = p_x q_x r_x$ (vgl. Nr. 215).

Legen wir j in der typischen Darstellung (II) zu Grunde, dann ist

$$p = \delta - m_1 \alpha$$
$$q = \delta - m_2 \alpha$$
$$r = \delta - m_3 \alpha,$$

und demnach die typische Form von f

$$f = k_1 (\delta - m_1 \alpha)^5 + k_2 (\delta - m_2 \alpha)^5 + k_3 (\delta - m_3 \alpha)^5. \qquad (2)$$

Die Berechnung der Constanten $k_1\, k_2\, k_3$ kann in folgender Weise vorgenommen werden.

Wir überschieben Gleichung (2) fünfmal über α^5, resp. $\alpha^4\delta$, $\alpha^3\delta^2$ und erhalten:

$$\left.\begin{aligned}(f, \alpha^5)^5 &= -\ (k_1 + k_2 + k_3) R^5 \\ (f, \alpha^4\delta)^5 &= -\ 5(k_1 m_1 + k_2 m_2 + k_3 m_3) R^5 \\ (f, \alpha^3\delta^2)^5 &= -\ 10(k_1 m_1^2 + k_2 m_2^2 + k_3 m_3^3) R^5\end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Die Werthe der linken Seite dieser drei Gleichungen ergeben sich unmittelbar aus den Gleichungen (III), (IV), (V) Nr. 230, und da die Determinante dieses Systemes (3) von linearen Gleichungen nicht

verschwindet (wegen $(\tau_1 \tau)^2 \gtrless 0$), so lassen sich aus ihm die drei Constanten k_1, k_2, k_3 eindeutig berechnen.

234. *Typische Darstellung von f, wenn $C = 0$.* Sind nun aber die drei Wurzeln der Covariante $j = 0$ nicht von einander verschieden, sind vielmehr zwei derselben einander gleich, dann ist die Darstellung durch fünfte Potenzen allein nicht mehr möglich. Immer noch aber liefert die typische Darstellung von f unter Zugrundelegung der Linearfactoren von j ein sehr einfaches Resultat, wovon man sich sofort überzeugen kann. In diesem Falle ist nämlich:

$$j = p_x^2 \, q_x \tag{1}$$

und demnach

$$(f, j)^3 = (ap)^2 (aq) \, a_x^2 = 0. \tag{2}$$

Erhebt man also die Identität

$$a_x (pq) = p_x (aq) - q_x (ap)$$

auf die fünfte Potenz, so verschwinden in der binomischen Entwicklung rechts alle Glieder, in denen die Klammerfactoren $(ap)^2 (aq)$ auftreten. Demnach reducirt sich dieselbe auf

$$(pq)^5 \cdot f = (aq)^5 p_x^5 - 5 (ap)(aq)^4 q_x p_x^4 - (ap)^5 q_x^5, \tag{3}$$

oder also auf

$$(pq)^5 \cdot f = c_1 p_x^5 + 5 c_2 p_x^4 q_x + c_3 q_x^5, \tag{4}$$

wo $c_1 \, c_2 \, c_3$ gewisse Constante sind, die wir nun berechnen wollen.

235. *Berechnung der Coefficienten der Gleichung* (4). Zu dem Zwecke gehen wir wiederum von der typischen Darstellung der Covariante j aus. [Vergl. Nr. 232, (I).] Da aber j nach Voraussetzung einen linearen Doppelfactor besitzt, und demnach ihre Discriminante $C = (\tau, \tau)^2 = 0$ ist, so reducirt sich dieselbe auf

$$R^2 \cdot j = \delta^2 \left(\delta + \frac{3}{2} B \alpha \right).$$

Setzen wir also

$$\varrho = \delta + \frac{3}{2} B \alpha, \tag{5}$$

so hat man:

$$R^2 \cdot j = \delta^2 \cdot \varrho, \tag{5a}$$

und

$$(\delta \varrho) = \frac{3}{2} B (\delta \alpha) = - \frac{3}{2} B \cdot R. \tag{5b}$$

Die Gleichung (4) geht also über in

$$(\delta \varrho)^5 \cdot f = (a \varrho)^5 \delta_x^5 - 5 (a \delta)(a \varrho)^4 \delta_x^4 \varrho_x - (a \delta)^5 \varrho_x^5,$$

oder

$$(\delta \varrho)^5 f = c_1 \delta^5 + 5 c_2 \delta^4 \varrho + c_3 \varrho^5. \tag{6}$$

Die Berechnung der Coefficienten c_i bewerkstelligt man nun genau in derselben Weise wie im allgemeineren Falle Nr. 233. Wir bilden die fünften Ueberschiebungen dieser Gleichung (6) über α^5, $\alpha^4\delta$, $\alpha^3\delta^2$, und erhalten dadurch drei Gleichungen zur Bestimmung der Grössen c_i.

Es ergiebt sich nämlich dadurch, wenn wir einen Augenblick den Factor $(\delta\varrho)^5$ mit $m \cdot R^5$ bezeichnen [siehe Gleichung (5b)]:

$$\left.\begin{aligned} R^5\cdot m\cdot(a\alpha)^5 &= c_1(\delta\alpha)^5 + 5c_2(\delta\alpha)^4(\varrho\alpha) + c_3(\varrho\alpha)^5 \\ R^5\cdot m\cdot(a\alpha)^4(a\delta) &= \qquad\qquad 5c_2(\delta\alpha)^4(\varrho\delta) + c_3(\varrho\alpha)^4(\varrho\delta) \\ R^5\cdot m\cdot(a\alpha)^3(a\delta)^2 &= \qquad\qquad\qquad\qquad c_3(\varrho\alpha)^3(\varrho\delta)^2 \end{aligned}\right\}\cdot (6\text{a})$$

Nun ist gemäss den Relationen (IV) und (V) in Nr. 230

$$(a\alpha)^5 = -\lambda R, \qquad (7)$$

$$(a\alpha)^4(a\delta) = \mu R.$$

Um aber $(f, \alpha^3\delta^2)^5$ zu berechnen, benutzen wir am einfachsten die Relation $\delta^2 = P\tau - \frac{C}{2}\beta^2$ (vergl. Nr. 222), oder weil $C = 0$, die Relation:

$$\delta^2 = P\tau.$$

Dann wird:

$$\begin{aligned} (a\alpha)^3(a\delta)^2 &= (f, \alpha^3P\tau)^5 = P((f, \tau)^2, \alpha^3)^3, \\ &= P\left(\left(-i\alpha - 2\frac{A}{3}j\right), \alpha^3\right)^3 \qquad \text{[vergl. Nr. 225, (1)]} \\ &= \frac{2}{3}PA(-j, \alpha^3)^3 = \frac{2}{3}PA(-(j, \alpha), \alpha^2)^2 \quad \text{[Nr. 224, (2)]} \\ &= \frac{2}{3}AP(\vartheta, \alpha)^2 = \frac{2}{3}APR, \end{aligned}$$

oder, weil für $C = 0$ die Invariante $P = \frac{9}{4}AB^2$ wird [vgl. Nr. 226, (6)]:

$$(a\alpha)^3(a\delta)^2 = \frac{3}{2}A^2B^2R. \qquad (9)$$

Andererntheils ist:

$$(\delta\alpha) = -R, \quad (\varrho\alpha) = -R, \quad (\varrho\delta) = +\frac{3}{2}B\cdot R.$$

Demnach ergeben sich durch Eintragen dieser Werthe aus den Gleichungen (6a) die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} m\cdot\lambda\cdot R &= c_1 + 5c_2 + c_3 \\ m\cdot\mu\cdot R &= \quad + \frac{15}{2}B\cdot c_2 + \frac{3}{2}B\cdot c_3 \\ -\frac{3}{2}m\cdot A^2\cdot B^2\cdot R &= \qquad\qquad + \frac{9}{4}B^2\cdot c_3 \end{aligned}\right\}. \qquad (10)$$

Hieraus findet sich zunächst

$$c_3 = -\frac{2}{3}A^2\cdot m\cdot R.$$

Indem man alsdann μ und λ durch ihre Werthe (Nr. 230) in A und B ersetzt, findet man ferner

$$c_2 = c_1 = \frac{B}{6} \cdot m \cdot R.$$

Die typische Darstellung der Form f wird demnach für $C = 0$

$$6R^4 \cdot f = B\delta^5 + 5B\delta^4\varrho - 4A^2\varrho^5. \tag{11}$$

Setzen wir $f = 0$, so haben wir in dieser Darstellung die „Bring'sche" Normalform der Gleichung fünften Grades. Durch die Substitutionen

$$\frac{5B}{-4A^2} = Z, \quad \frac{\varrho}{\delta} = t\sqrt[4]{Z}$$

geht sie in die von Hermite benutzte Gestalt über

$$t^5 - t - \frac{1}{5\sqrt[4]{Z}} = 0.$$

Sobald also $C = 0$, lässt sich immer eine lineare Transformation angeben, wodurch die allgemeine Gleichung fünften Grades in diese Normalform mit dem einzigen Parameter $X = \frac{1}{5\sqrt[4]{Z}}$ übergeht. Dagegen kann die allgemeine Gleichung fünften Grades nur durch eine Transformation vierten Grades in diese Normalform gebracht werden.

236. *Bedeutung der Relation* $C = 0$. Es ist interessant, die Bedeutung der Relation $C = 0$ für das Formensystem noch weiter zu untersuchen. Man findet alsdann insbesondere zweierlei: 1) Die Covarianten j und i besitzen, sobald $C = 0$, einen gemeinsamen linearen Factor, oder mit andern Worten: die Invariante C ist bis auf einen Zahlenfactor gleich der Resultante von j und i; 2) dieser gemeinsame Factor von i und j ist nichts anderes als die oben eingeführte lineare Covariante ϱ.

Indem wir die diesbezüglichen Untersuchungen hier anfügen, verfolgen wir einen doppelten Zweck: einmal an einem Beispiel zu zeigen, wie durch symbolische Rechnung die Resultante zweier Covarianten abgeleitet wird, dann aber auch, um durch die sich ergebenden Resultate ein neues Licht auf das Wesen der Bring'schen Normalform zu werfen.

Wir beginnen damit, die Resultante von j und i zu berechnen.

Angenommen, die beiden linearen Factoren der quadratischen Form i seien

$$i = r_x s_x;$$

sie besitze also die Wurzeln $\xi_1 = \frac{-r_2}{r_1} = r$, $\xi_2 = \frac{-s_2}{s_1} = s$; dann ist,

von einem Zahlenfactor abgesehen, die Resultante von $j(x)$ und $i(x)$ bekanntlich dargestellt durch (vergl. auch Bd. I Nr. 168)

$$\begin{aligned} R_{j,i} &= j(r) \cdot j(s) = (jr)^3 \cdot (j's)^3 \\ &= (jr)^2 (j's)^2 \{(jj')(rs) + (js)(j'r)\} \\ &= (jr)^2 (j's)^2 (jj')(rs) + (jr)^2 (j'r)(j's)^2 (js) \\ &= (jr)(j's)(jj')(rs)\{(jj')(rs) + (js)(j'r)\} + (jr)^2 (j'r)(j's)^2 (js) \\ &= (jj')^2 (jr)(j's)(rs)^2 + (jr)(js)(j'r)(j's)(jj')(rs) \\ &\qquad + (jr)^2 (js)(j's)^2 (j'r). \end{aligned}$$

Der erste Term rechts zerfällt in die Factoren

$$(rs)^2 = -2(i, i)^2 = -2A$$

und

$$(jj')^2 (jr)(j's) = (\tau, rs)^2 = (\tau, i)^2 = B.$$

Der zweite Term verschwindet identisch, da er durch Vertauschung von j mit j' nur sein Zeichen ändert; der dritte Term endlich zerfällt wiederum in die beiden Factoren

$$\begin{aligned} (jr)^2 (js) &= (j, rs \cdot r)^3 = (j, i \cdot r)^3 = ((j, i), r) \\ &= -(\alpha, r) = -(\alpha r), \end{aligned}$$

und

$$(j's)^2 (jr) = -(\alpha s).$$

Durch Substitution dieser Werthe der einzelnen Glieder erhalten wir

$$\begin{aligned} R_{j,i} &= -2AB + (\alpha r)(\alpha s) \\ &= -2AB + (\alpha^2, i)^2 \\ &= -2AB + M, \end{aligned}$$

oder endlich, weil $M = 2AB - 3C$:

$$R_{j,i} = -3C. \tag{1}$$

Die Resultante von j und i stimmt also in der That mit der Invariante C bis auf einen numerischen Factor überein.

237. *Berechnung des gemeinsamen Factors.* Nehmen wir nun an, die Invariante C verschwinde, und der gemeinsame lineare Factor von j und i sei r_x, dann können wir uns die Aufgabe stellen, diesen gemeinsamen Factor, der sich bekanntlich auf rationalem Wege berechnen lässt, durch die linearen Covarianten des Systemes auszudrücken.

Um diese Aufgabe zu lösen, gehen wir von der Form aus

$$F = (jr)^3 s_x^3 - (js)^3 r_x^3,$$

welche sich für den Fall, dass r oder s der gemeinschaftliche Factor ist, wegen $(jr)^3 = 0$, resp. $(js)^3 = 0$ auf den Cubus dieses gemeinschaftliches Factors reducirt. Nun ist aber

$$F = \{(jr)s_x - (js)r_x\}\,\{(jr)^2 s_x^2 + (jr)(js)r_x s_x + (js)^2 r_x^2\}$$
$$= (rs)j_x\,\{[(jr)s_x - (js)r_x]^2 + 3(jr)(js)r_x s_x\}$$
$$= (rs)j_x\,\{j_x^2 (rs)^2 + 3(jr)(js)r_x s_x\}$$
$$= \{j\cdot(rs)^2 + 3(jr)(js)j_x r_x s_x\}\,(rs).$$

Der Factor (rs) ist eine von null verschiedene Constante; der erste Term in der Klammer hat den Werth $= -2A\cdot j$, der zweite Term den Werth $3(j,\, i)^2\cdot i = -3\alpha\cdot i$. Also wird

$$F = \text{Const.}\,\{-2Aj - 3\alpha i\},$$

oder, wenn wir den Factor 3 herausziehen und mit der Constanten vereinigen:

$$F = \text{Const.}\left\{-\frac{2}{3}Aj - \alpha i\right\},$$

d. i. wegen Nr. 225, (1)

$$= \text{Const.}\,(f,\, \tau)^3.$$

Wir haben also den Satz:

„Besitzen j und i einen gemeinsamen Factor, ist also $C = 0$, so ist die zweite Ueberschiebung von f und τ proportional dem Cubus dieses gemeinsamen Factors.“

Schiebt man diesen Cubus $(f,\, \tau)^2$ zweimal über irgend eine beliebige Form zweiten Grades, so erhält man den gemeinschaftlichen Factor linear. Wir wählen hiezu die Form τ und erhalten

$$((f,\, \tau)^2,\, \tau)^2 = \text{Const.}\left(-\frac{2}{3}Aj - \alpha i,\, \tau\right)^2;$$

nach der Theorie der cubischen Formen aber ist $(j,\, \tau)^2 = 0$; demnach wird, unter Vernachlässigung der Grösse: $-\frac{3}{2}\cdot\text{Const.}$,

$$((f,\, \tau)^2,\, \tau)^2 = +3(\alpha i,\, \tau)^2 = ((i\tau)^2\alpha + 2(i\tau)(\alpha\tau)i_x)$$
$$= B\cdot\alpha + 2(i\tau)\{(i\tau)\alpha_x - (i\alpha)\tau_x\}$$
$$= B\cdot\alpha + 2(i\tau)^2\alpha - 2(i\tau)(i\alpha)\tau_x$$
$$= 3B\cdot\alpha + 2(\tau,\, (i\alpha)i_x)$$
$$= 3B\cdot\alpha + 2(\tau,\, \beta) = +3B\cdot\alpha + 2\delta,$$

also wegen Nr. 235, (5)

$$((f,\, \tau)^2,\, \tau)^2 = \frac{1}{2}\varrho\,.$$

Es ergiebt sich daher:

„Ist $C = 0$, so ist die lineare Covariante ϱ der gemeinschaftliche Factor von j und i, und die Gleichung fünften Grades geht durch die Substitution $x_1 = \varrho$, $x_2 = \delta$ in die Bring'sche Normalform über.“

238. *Typische Darstellung der Form fünften Grades für* $B = 0$. Unter den verschiedenen Normalformen der Gleichung fünften Grades beansprucht neben der Bring'schen Normalform auch noch eine von Brioschi herrührende ein hervorragendes Interesse. Auf diese Brioschi'sche Normalform wird man direct geführt, sobald man die typische Darstellung einer solchen Form f unternimmt, deren Invariante B identisch verschwindet. Man hat nur statt der früher benutzten linearen Covarianten α und β, resp. δ und ϱ in diesem Falle die Formen α und γ für die betreffende typische Darstellung zu Grunde zu legen. Wir wollen im Folgenden diese Normalform von $f = a_x^5$ für den Fall $B = 0$ entwickeln, müssen aber zu dem Zwecke zunächst die Ueberschiebung (f, γ) durch andere Formen des Systemes darstellen, um alsdann in einfacher Weise die typischen Coefficienten

$$(f, \alpha^5)^5, \quad (f, \alpha^4\gamma)^5, \quad (f, \alpha^3\gamma^2)^5, \quad (f, \alpha^2\gamma^3)^5, \quad (f, \alpha\gamma^4)^5, \quad (f, \gamma^5)^5$$

berechnen zu können.

239. *Hilfssatz für die typische Darstellung von* f für $B = 0$. Wir behaupten: Die lineare Ueberschiebung (f, γ) lässt sich in der Form darstellen

$$(f, \gamma) = \frac{3}{2}\tau^2 + B \cdot (f, j)^2. \tag{1}$$

Man erkennt schon aus dieser Relation deren Tragweite. Denn für $B = 0$ reducirt sich die rechte Seite auf das Quadrat der Form τ, und alle typischen Coefficienten — von dem bereits bekannten $(f, \alpha^5)^5$ abgesehen — ergeben sich dann durch Ueberschiebung dieser Form τ über Potenzen von linearen Formen*).

Um diese Relation (1) zu beweisen, schreiben wir sie zunächst in der Form

$$(f, \gamma) - \frac{\tau^2}{2} = \tau^2 + B \cdot (f, j)^2$$

und formen nun jede Seite dieser Gleichung durch symbolische Rechnung geeignet um.

Wir erhalten dann für die linke Seite, da nach der Theorie der cubischen Formen $(j, (j, \tau)) = -\frac{\tau^2}{2} = (j'\tau)(j\tau)j_x^2 j_x'^2$:

$$(f, \gamma) - \frac{\tau^2}{2} = (a\gamma)a_x^4 + (j'\tau)(j\tau)j_x^2 j_x'^2$$

---

*) Man kann (f, γ) als Polare f_y für $y = \gamma$ betrachten. Im Falle $B = 0$ besitzt also die betreffende Form f eine erste Polare, die ein volles Quadrat ist. Umgekehrt: Weiss man von einer Form fünften Grades, dass sie eine erste Polare besitzt, die ein volles Quadrat ist, so ist für diese Form $B = 0$, und diese Polare ist mit (f, γ) identisch.



und, wenn wir im ersten Gliede γ durch $(\tau\alpha)\tau_x$ oder wegen $\alpha_x = -(ji)^2 j_x$ durch $-(ji)^2(\tau j)\tau_x$ ersetzen und im zweiten Gliede an Stelle von $j_x'^3$ das gleichwerthige Symbol $-(ai)^2 a_x^3$ einführen:

$$(f, \gamma) - \frac{\tau^2}{2} = -a_x^4(a\tau)(\tau j)(ji)^2 - a_x^2(ai)^2(a\tau)(j\tau)j_x^2,$$

oder

$$(f, \gamma) - \frac{\tau^2}{2} = a_x^2(a\tau)(j\tau)\begin{vmatrix} a_x^2, & (ai)^2 \\ j_x^2, & (ji)^2 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Für die rechte Seite dagegen erhalten wir successive

$$\begin{aligned} B\cdot(f,j)^2 + \tau^2 &= (i\tau)^2\cdot(aj)^2 a_x^3 j_x + \tau_x^2\cdot(jj')^2 j_x j_x' \\ &= a_x^3 j_x\{(a\tau)(ij) + (j\tau)(ai)\}^2 - \tau_x^2\cdot(ai)^2(aj)^2 j_x a_x. \end{aligned}$$

Ersetzen wir im zweiten Term rechts $(ai)j_x$ durch $(aj)i_x + (ji)a_x$, dann reducirt sich derselbe wegen $(aj)^3 a_x^2 = 0$ auf $\tau_x^2\cdot(ai)(aj)^3(ji)a_x^2$. Wenn wir also darin $(aj)\tau_x$ durch $(\tau j)a_x - (\tau a)j_x$ ersetzen, so geht die letzte Gleichung über in:

$$B\cdot(f,j)^2 + \tau^2 = a_x^3 j_x\cdot\{(a\tau)(ij) + (j\tau)(ai)\}^2 - (ai)(ji)a_x^2\{(\tau j)a_x - (\tau a)j_x\}^2.$$

Nun ist $(j, \tau)^2 = 0$, also verschwindet im ersten Binom rechts das dritte, im zweiten Binom das erste Glied, während sich die beiden mittleren Glieder gegenseitig aufheben. Es bleibt demnach:

$$B\cdot(f,j)^2 + \tau^2 = a_x^3 j_x\cdot(a\tau)^2(ij)^2 - (ai)(ji)a_x^2\cdot(\tau a)^2 j_x^2,$$

oder

$$B\cdot(f,j)^2 + \tau^2 = a_x^2(a\tau)^2\begin{vmatrix} a_x j_x, & (ai)(ji) \\ j_x^2, & (ji)^2 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Subtrahiren wir nun Gleichung (2) von Gleichung (3), so erhalten wir:

$$\begin{aligned} B\cdot(f,j)^2 + \frac{3}{2}\tau^2 - (f,\gamma) &= a_x^2(a\tau)^2\begin{vmatrix} a_x j_x, & (ai)(ji) \\ j_x^2, & (ji)^2 \end{vmatrix} \\ &\quad - a_x^2(a\tau)(j\tau)\begin{vmatrix} a_x^2, & (ai)^2 \\ j_x^2, & (ji)^2 \end{vmatrix} \\ &= a_x^3\cdot\begin{vmatrix} (a\tau)^2, & a_x^2, & (ai)^2 \\ (a\tau)(j\tau), & a_x j_x, & (ai)(ji) \\ 0, & j_x^2, & (ji)^2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

oder wegen $0 = (j, \tau)^2 = (j\tau)^2 j_x$

$$B\cdot(f,j)^2 + \frac{3}{2}\tau^2 - (f,\gamma) = a_x^2\begin{vmatrix} (a\tau)^2, & a_x^2, & (ai)^2 \\ (a\tau)(j\tau), & a_x j_x, & (ai)(ji) \\ (j\tau)^2, & j_x^2, & (ji)^2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Die Determinante rechts verschwindet aber identisch; denn sie ist durch Multiplication der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} \tau_1^2, & -\tau_1\tau_2, & \tau_2^2 \\ x_1^2, & x_1 x_2, & x_2^2 \\ i_1^2, & -i_1 i_2, & i_2^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1^2, & 2a_1a_2, & a_2^2 \\ a_1 j_1, & a_1 j_2 + j_1 a_2, & a_2 j_2 \\ j_1^2, & 2 j_1 j_2, & j_2^2 \end{vmatrix}$$

entstanden. Die erste dieser Determinanten besitzt den Werth (vergl. Bd. I Nr. 40, Anmerkung)

$$\tau_x \cdot (\tau i) \cdot i_x,$$

die zweite besitzt den Werth:

$$(a j)^3.$$

Die rechte Seite der Gleichung (4) geht also über in

$$(a j)^3\, a_x^2 \cdot (\tau\, i)\, \tau_x\, i_x,$$

und diese Grösse ist null, da der eine Factor $(a j)^3 a_x^2 = (f, j)^3$ identisch verschwindet. Also hat man:

$$B \cdot (f, j)^2 + \frac{3}{2}\tau^2 = (f, \gamma)$$

wie oben behauptet war.

240. *Berechnung der typischen Coefficienten, wenn* $B = 0$. Die typische Darstellung der Form $f = a_x^5$ für $B = 0$ ergiebt sich nun, indem wir die Identität:

$$(\alpha\gamma)\, a_x = (a\gamma)\, \alpha_x - (a\alpha)\, \gamma_x$$

auf die fünfte Potenz erheben, und die typischen Coefficienten alsdann in Function der Fundamentalinvarianten darstellen. Zu letzterem Zwecke berücksichtigen wir, dass wegen $B = 0$ folgende Beziehungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} &(f, \gamma) = \frac{3}{2}\tau^2, \quad (\tau, \alpha)^2 = -(\alpha\gamma) = N = \frac{AC}{2} \\ &(i, \alpha)^2 = M = -3C \end{aligned}\right\}\text{vgl.}\ \begin{aligned}&\text{Nr. } 221 \quad (1)\\ &\text{Nr. } 226 \quad (2)\end{aligned}$$

$$(\tau, \gamma) = (\tau', (\tau, \alpha)) = -\frac{C}{2}\cdot\alpha \quad \text{(Identitätssatz)} \tag{3}$$

$$(\tau, \gamma^2)^2 = ((\tau, \gamma), \gamma) = -\frac{C}{2}(\alpha\gamma) = \frac{C}{2}\cdot N = \frac{AC^2}{4} \quad \text{[nach (3)]} \tag{4}$$

$$(\tau\gamma)(\tau\alpha) = -\frac{C}{2}(\alpha_1\alpha) = 0 \quad \text{[nach (3)]} \tag{5}$$

$$\lambda = -\frac{2}{3}A^2. \quad \text{(nach Nr. 230)} \tag{6}$$

Dann erhalten wir der Reihe nach folgende Gleichungen:

$$(a\alpha)^5 = \lambda \cdot R = -\frac{2}{3}A^2 \cdot R \qquad \text{(vergl. Nr. 230)}$$

$$(a\alpha)^4(a\gamma) = ((f, \gamma), \alpha^4)^4 = \frac{3}{2}(\tau^2, \alpha^4)^4 = \frac{3}{2}(\tau\alpha)^2\cdot(\tau\alpha)^2 = \frac{3A^2\cdot C^2}{8}$$

$$(a\alpha)^3(a\gamma)^2 = ((f,\gamma),\alpha^3\gamma)^4 = \frac{3}{2}(\tau^2,\alpha^3\gamma) = \frac{3}{2}(\tau\alpha)^2\cdot(\tau\gamma)(\tau\alpha) = 0$$

$$(a\alpha)^2(a\gamma)^3 = ((f,\gamma),\alpha^2\gamma^2)^4 = \frac{3}{2}(\tau^2,\alpha^2\gamma^2)^4 = \left(\begin{smallmatrix}\text{nach Ueberschiebungs-}\\ \text{gesetzen}\end{smallmatrix}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}\left\{(\tau\alpha)^2\cdot(\tau'\gamma)^2 + 4(\tau\gamma)(\tau\alpha)\cdot(\tau'\gamma)(\tau'\alpha) + (\tau'\alpha)^2(\tau'\gamma)^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{[(\tau\alpha)(\tau'\gamma) - (\tau\gamma)(\tau'\alpha)]^2 + 6(\tau\gamma)(\tau\alpha)\cdot(\tau'\gamma)(\tau'\alpha)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}(\tau\tau')^2\cdot(\alpha\gamma)^2 = \frac{1}{4}C\cdot N^2 = \frac{A^2C^3}{16}$$

$$(a\alpha)(a\gamma)^4 = ((f,\gamma),\alpha\gamma)^4 = \frac{3}{2}(\tau^2,\alpha\gamma^3)^4 = \frac{3}{2}(\tau\gamma)^2\cdot(\tau\gamma)(\tau\alpha) = 0$$

$$(a\gamma)^5 = ((f,\gamma),\gamma^4)^4 = \frac{3}{2}(\tau^2,\gamma^4) = \frac{3}{2}(\tau\gamma)^2\cdot(\tau\gamma)^2 = \frac{3A^2C^4}{32}.$$

Tragen wir die soeben berechneten Werthe der typischen Coefficienten in die Gleichung

$$(\alpha\gamma)^5\cdot a_x^5 = \left\{\alpha_x(a\gamma) - \gamma_x(a\alpha)\right\}^5$$

ein, so erhalten wir:

$$-\frac{A^5\cdot C^5}{32}\cdot f = \frac{3}{32}A^2C^4\alpha^5 + \frac{10}{16}A^2C^3\alpha^3\gamma^2 + \frac{15}{8}A^2C^2\alpha\gamma^4 - \frac{2}{3}A^2R\gamma^5.$$

Dividiren wir diese Gleichung mit A^2C^2 und setzen

$$\frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{-\frac{3}{2}C} = \xi,$$

so kommt endlich nach leichter Reduction:

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{A^3C^4}{\gamma^5}\cdot\sqrt{-\frac{3C}{2}}\cdot f = \xi^5 - 10\xi^3 + 45\xi - \frac{16\sqrt{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{C^3}}\cdot R.$$

Die Form fünften Grades erscheint hiemit abermals in einer Normalform, die nur einen Parameter besitzt, und diese Normalform wird die Brioschi'sche genannt. Eine ganz elementare Methode, die allgemeine Gleichung fünften Grades durch eine Tschirnhaustransformation in die Brioschi'sche Form zu bringen, hat Gordan neuerdings in den Math. Ann. Bd. XXVIII publicirt.

§ 25. Die Discriminante und die Auflösung der Gleichung fünften Grades.

241. *Erste Darstellung der Discriminante durch die Fundamentalinvarianten.* Aus der in Nr. 235, (11) gegebenen Darstellung der Form f lässt sich unmittelbar der Werth der Discriminante Δ von f erschliessen. Die Discriminante muss nämlich als Resultante von $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ vom Grade 8 in den Coefficienten sein; deshalb kann in der

ganzen und rationalen Function von Invarianten, durch welche sie sich ausdrücken lassen muss, die Invariante C zwölften Grades in den Coefficienten nicht auftreten. $\varDelta$ ist sonach unabhängig von C und ändert sich daher nicht, wenn $C=0$ gesetzt wird. Die Discriminante der Form

$$6R^4 f = B\delta^5 + 5B\delta^4\varrho - 4A^2\varrho^5 = 0$$

ist also auch die Discriminante der allgemeinen Form. Es ist aber

$$\frac{\partial f}{\partial \delta} = 5\{B\delta^4 + 4B\delta^3\varrho\} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varrho} = 5\{B\delta^4 - 4A^2\varrho^4\} = 0.$$

Die erste der beiden Gleichungen liefert

$$\frac{\delta}{\varrho} = -4.$$

Substituirt man diesen Werth in die zweite, so ergiebt sich als Resultat der Elimination von $\frac{\delta}{\varrho}$:

$$\varDelta = 64B - A^2.$$

242. *Zweite Darstellung der Discriminante.* Wir wollen im Folgenden noch eine zweite Methode zur Berechnung der Discriminante geben, die an die allgemeine Form $f = a_x^5$ anknüpft und auf denselben Grundsätzen beruht, wie früher die Berechnung der Discriminante einer Form vierten Grades.

Wie damals nehmen wir wieder an, die Form f besitze einen linearen Doppelfactor p_x, sei also dargestellt durch

$$f = p^2 \cdot l = a_x^5,$$

wo l irgend eine cubische Form bedeute. Indem wir uns alsdann die Frage stellen, auf welche Invariantenrelation $F(A, B) = 0$ führt diese Annahme, werden wir naturgemäss auf die eine geführt, deren linke Seite wir als Discriminante bezeichnen müssen.

Die Beantwortung der Frage lässt sich mannigfach bewerkstelligen. Es handelt sich in der Hauptsache darum, die Invarianten A und B der allgemeinen Form mit dem simultanen System unserer Form f und p in Beziehung zu setzen. Hiezu liefern uns die in Nr. 99 aus der Bedingung $f = p^2 \cdot l$ abgeleiteten Gleichungen die geeigneten Mittel. Wir erhielten damals:

$$(ap)^5 = 0, \quad (ap)^4 a_x = 0 \tag{1}$$

$$(ap)^3 a_x^2 = \lambda \cdot p^2 \tag{2}$$

$$(ab)^2 (ap)^3 b_x^3 = \frac{1}{2}(i, p) \cdot p^2, \tag{3}$$

wobei Gleichung (3) aus $(ap)^4 a_x = 0$ durch die a. a. O. angegebene Reihenentwicklung entsteht. Man könnte nun direct aus diesen Gleichungen und der Voraussetzung $a_x^5 = p^2 l$ die Formen $A = (i, i)^2$, $B = (\tau, i)^2$ zu berechnen suchen; dabei würde man finden, dass beide Formen A und B sich als Functionen von $(ip)^2$ und $(\tau p)^2$ darstellen lassen. Indem wir daher hier von vornherein nach der Berechnung dieser beiden Grössen streben, gelangen wir auf kürzerem Wege zum Ziele.

Um den Werth von $(ip)^2$ zu ermitteln, überschieben wir (2) zweimal über f und erhalten:

$$(ab)^2 (ap)^3 b_x^3 = \lambda \cdot (f, p^2)^2,$$

oder durch Comparation mit (3)

$$(i, p) \cdot p^2 = 2\lambda \cdot (f, p^2)^2. \tag{4}$$

Indem wir aber diese Gleichung abermals mit p überschieben, kommt:

$$(i, p)^2 \cdot p^2 = 6\lambda \cdot (f, p^3)^3,$$

oder endlich wegen (2)

$$6\lambda^2 = (ip)^2. \tag{5}$$

Zur Berechnung von $(\tau p)^2$ stellen wir zunächst eine Entwicklung für das Product $i \cdot p^4$ her, indem wir die Identität $(ab) p_x = (ap) b_x - (bp) a_x$ auf die vierte Potenz erheben, und nachträglich mit $a_x b_x$ multipliciren. Dann kommt nach einfacher Reduction, weil $(ap)^4 a_x = 0$:

$$i \cdot p^4 = -8 (ap)^3 a_x^2 \cdot (bp) b_x^4 + 6 (ap)^2 a_x^3 \cdot (bp)^2 b_x^3,$$

oder:

$$i \cdot p^4 = -8\lambda p^2 \cdot (f, p) + 6 (f, p^2)^2 \cdot (f, p^2)^2$$

und demnach wegen Gleichung (4)

$$i \cdot p^4 = -8\lambda p^2 \cdot (f, p) + \frac{6}{4\lambda^2} \cdot p^4 \cdot (ip)(i_1 p_1) i_x i_{1x}. \tag{6}$$

Das symbolische Product $2(ip)(i_1 p_1) i_x i_{1x}$ lässt sich mit Hilfe des Productsatzes (vergl. Nr. 11) leicht in die Form $12 i\lambda^2 - Ap^2$ bringen, so dass alsdann die Gleichung (6) die Form annimmt:

$$8 ip^2 = 8\lambda \cdot (f, p) + \frac{3}{4\lambda^2} Ap^4, \tag{7}$$

wie man sieht, eine Gleichung für die einzige uns noch unbekannte Ueberschiebung der Form f über p. Aus ihr lässt sich zunächst $(j, p) = (-(f, i)^2, p)$ berechnen, womit der erste Schritt zur Darstellung von $(\tau p)^2$ gemacht ist, da ja $\tau = (j, j)^2$. Wir überschieben nämlich (7) zweimal über i und erhalten:

$$\frac{8}{6} \{Ap^2 + 4(ii_1)(pi_1) i_x p_x + i \cdot (pi_1)^2\} = -8\lambda \cdot (j, p) + \frac{3}{4\lambda^2} A \cdot p^2 \cdot (pi)^2,$$

oder, weil nach dem Identitätssatze das mittlere Glied links mit $2Ap^2$ übereinstimmt und $(ip)^2 = 6\lambda^2$, so kommt:

$$8\lambda \cdot (j, p) = \frac{1}{2} Ap^2 - 8\lambda^2 \cdot i. \tag{8}$$

Ueberschiebt man aber diese Gleichung zweimal über sich selbst, so erhalten wir nach Division mit $16\lambda^2$:

$$4(\tau p)^2 = \lambda^2 \cdot A. \tag{9}$$

Ueberschiebt man dagegen Gleichung (8) zweimal über τ, so kommt, weil nach der Theorie der cubischen Formen $(j, \tau)^2$ verschwindet:

$$0 = \frac{1}{2} A \cdot (\tau p)^2 - 8\lambda^2 \cdot B,$$

oder wegen (9)

$$0 = A^2 - 64B. \tag{10}$$

Wenn also f einen Doppelfactor besitzt, so besteht zwischen A und B die Relation (10), d. h. $A^2 - 64B$ ist die Discriminante von f.

243. *Auflösung der Gleichung fünften Grades.* Die Auflösung der Gleichung fünften Grades ist bekanntlich durch algebraische Methoden allein nicht mehr möglich. Die Grenze, bis zu welcher die Algebra vorgehen kann, haben wir bereits kennen gelernt: sie ist durch die Transformation der allgemeinen Gleichung in eine Form mit einem einzigen Parameter Z gekennzeichnet. Dieselbe kann unter anderm stets nach Klein (vergl. „Vorlesungen über das Ikosaeder" § 10, Seite 252) in rationaler Weise auf die in Nr. 192 erwähnte Ikosaedergleichung $\frac{C_2 \cdot f^3}{H^3} = \varrho$ zurückgeführt werden, deren Wurzeln $\xi = \frac{x_1}{x_2} = \vartheta(\varrho)$ sich mit Hilfe elliptischer Modulfunctionen darstellen lassen. (Vergl. Klein: „Vorlesungen über das Ikosaeder" § 7, Seite 132.) Wenn wir uns also hier mit Auflösung von Gleichungen fünften Grades beschäftigen, so müssen wir uns auf specielle Fälle beschränken, bei welchen vermöge gewisser Invariantenrelationen die Auflösung sich ohne transcendente Methoden bewerkstelligen lässt. Aus der grossen Mannigfaltigkeit der hier gegebenen Möglichkeiten besprechen wir hier nur einige wichtige Fälle. Hieher gehören in erster Linie die Formen f, für welche $R = 0$, $M \gtrless 0$, $N \gtrless 0$; denn während für $B = 0$ resp. $C = 0$ nur Reductionen der Form f auf gewisse, besonders interessante Normalformen eintreten und die Bedingung $A = 0$ überhaupt keine bemerkenswerthe Typik zur Folge hat, zerfällt für $R = 0$ die Form f rational in einen linearen und einen biquadratischen Factor. Hieher gehören ferner die Fälle:

II) $\alpha = 0$, und eine der drei Formen $A, B, C \gtrless 0$,

III) $\alpha = 0,\ B = 0,\ C = 0,\ A_1 = 0,\ j \gtrless 0$,

IV) $\alpha = 0,\ A = B = C = 0,\ j = 0$.

244. *Erster Fall.* Wir betrachten zunächst den Fall, in welchem die schiefe Invariante verschwindet, also den Fall

$$R = 0, \quad M \gtrless 0, \quad N \gtrless 0.$$

Da alle schiefen Invarianten des Systemes R zum Factor haben müssen, so verschwinden dieselben durchwegs.

Solche schiefe Invarianten sind z. B.

$$(f, \alpha)^5, \quad (f, \alpha^3\beta^2)^5, \quad (f, \alpha\beta^4)^5,$$

ebenso

$$(f, \gamma)^5, \quad (f, \gamma^3\alpha^2)^5, \quad (f, \gamma\alpha^4)^5.$$

Wenn wir also entweder

$$a_x(\beta\alpha) = \beta_x(a\alpha) - \alpha_x(a\beta),$$

oder

$$a_x(\gamma\alpha) = \gamma_x(a\alpha) - \alpha_x(a\gamma)$$

auf die fünfte Potenz erheben, so verschwinden stets drei Glieder in der binomischen Entwicklung rechts, so dass wir erhalten:

$$f \cdot (\beta\alpha)^5 = c_1\alpha^5 + c_2\alpha^3\beta^2 + c_3\alpha\beta^4,$$

oder

$$f \cdot (\gamma\alpha)^5 = \bar{c}_1\alpha^5 + \bar{c}_2\alpha^3\gamma^2 + \bar{c}_3\alpha\gamma^4,$$

wo $c_1\, c_2\, c_3$, $\bar{c}_1\, \bar{c}_2\, \bar{c}_3$ wie in Nr. 235 zu berechnen sind. $(\beta\alpha)$ ist dabei gleich M, $(\gamma\alpha) = N$; da diese Invarianten nicht verschwinden, so sind die rechten Seiten in der That Entwicklungen von F. Setzen wir sie gleich null, so erhalten wir in beiden Fällen von vornherein eine Wurzel von f, nämlich $\alpha_x = 0$. Der andere Factor ist dann eine biquadratische Gleichung, die sich leicht auf eine quadratische reduciren lässt.

245. *Zweiter Fall.* Wir nehmen an, dass die beiden Invarianten M und N verschwinden, woraus von selbst hervorgeht, dass auch R null wird [vergl. Nr. 227, (4)], also dass

$$M = 0, \quad N = 0, \quad R = 0.$$

Die Invariante C sei von null verschieden.

Wenn aber $M = N = 0$, dann ist, wie wir nun beweisen wollen, auch $\alpha = 0$, und folglich existirt in diesem Falle überhaupt keine lineare Covariante.

Nehmen wir zunächst an, α wäre von null verschieden. Es ist nun:

$$i_x^2\,\tau_y^2 - \tau_x^2\,i_y^2 = (i_x\tau_y - \tau_x i_y)(i_x\tau_y + \tau_x i_y) = 2\,\vartheta_x\,\vartheta_y\,(xy). \qquad (11)$$

Ersetzen wir y durch α, so kommt:

$$i_x^2 (\tau\alpha)^2 - \tau_x^2 (i\alpha)^2 = 2(\vartheta\alpha)\vartheta_x \alpha_x.$$

Weil aber

$$(\tau\alpha)^2 = N = 0,$$
$$(i\alpha)^2 = M = 0,$$

so folgt:

$$(\vartheta, \alpha) = 0,$$

d. h. ϑ hat den Factor α. Da nun aber

$$j_x^2 (j\alpha) = -\vartheta, \quad \text{[vergl. Nr. 224, (2)]}$$

so ist auch

$$(j\alpha)^2 j_x = ((j\alpha)j_x^2, \alpha) = -(\vartheta, \alpha) = 0.$$

Daraus folgt, dass j den linearen Factor α mindestens quadratisch besitzt, dass also, wenn ϱ irgend ein linearer Factor

$$j = \alpha^2 \cdot \varrho,$$

und folglich (vergl. Nr. 154)

$$\tau = \alpha^2 \cdot c,$$

wo c eine Constante ist.

Erinnern wir uns nun, dass [vergl. Nr. 230, (II) und 225, (1)]

$$(f, \alpha^2)^2 = A \cdot (f, \tau)^2 + Bj + \frac{3}{2}\alpha\tau, \tag{12}$$

folglich $$(f, \alpha^2)^2 = Ac \cdot (f, \alpha^2)^2 + B\alpha^2\varrho + \frac{3}{2}c\alpha^3;$$

und bedenken wir ferner, dass

$$0 = (f, j)^3 = (f, \varrho\alpha^2)^3 = ((f, \alpha^2), \varrho),$$

so folgt, wenn wir (10) dreimal über ϱ schieben:

$$((f, \alpha^2), \varrho^3)^3 = Ac\,((f, \alpha^2)^2, \varrho^3)^3 + B(\alpha^2\varrho, \varrho^3)^3 + \frac{3}{2}c(\alpha\varrho)^3.$$

Nun ist aber $(\alpha^2\varrho, \varrho^3)^3 = 0$, und wegen

$$((f, \alpha^2), \varrho) = 0$$

sowohl das Glied links als auch das erste Glied rechts gleich null; es bleibt also noch

$$(\alpha\varrho)^3 = 0,$$

d. h.

$$\varrho = c_1\alpha,$$

folglich

$$j = c_1\alpha^3.$$

Da aber auch i den Factor α besitzen muss wegen

$$M = (i\alpha)^2 = 0,$$

so ist auch

$$(j, i)^2 = -\alpha = 0,$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Die Bedingung $M = 0$, $N = 0$ führt also stets $\alpha = 0$ mit sich, wie umgekehrt aus $\alpha = 0$ auch sofort das Verschwinden von M und N sich ergiebt.

246. Wir nehmen also an, die lineare Covariante α verschwinde, doch von den drei fundamentalen Invarianten A, B, C sei wenigstens eine von null verschieden.

Wegen $\alpha = 0$ ist zunächst
$$\vartheta = -(j, \alpha) = 0,$$
und daher [vergl. Nr. 227, (1)]
$$2(\vartheta, i) = A\tau - Bi = 0.$$

Es ist sonach τ proportional der Covariante i. Und da nun
$$(f, \alpha) = 2((f, j)^2, i) = 0, \quad \text{[vergl. Nr. 230, (I)]}$$
so muss, so lange $A = (i, i)^2 \gtrless 0$, $(f, j)^2$ eine Potenz von i sein, d. h. es muss die Relation bestehen:
$$(aj)^2 a_x^3 j_x = c \cdot i^2,$$
oder weil
$$A\tau = Bi,$$
auch
$$(aj)^2 a_x^3 j_x = c_1 \tau^2,$$
wo c_1 eine Constante.

Schiebt man diese Relation einmal über j, so erhält man, da die beiden Glieder der ersten Polare von $(aj)^2 a_x^3 j_x$ einander gleich sein müssen — ihre Differenz hat den Factor $(aj)^3$ —
$$(aj)^2 (jj_1) a_x^3 j_{1x}^2 = c_1 (\tau^2, j) = c_1 \tau \cdot (\tau, j). \tag{13}$$

Vertauscht man links j mit j_1 und nimmt die halbe Summe, so kommt:
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} a_x^3 (jj_1) \{(aj)^2 j_{1x}^2 - (aj_1)^2 j_x^2\} \\
&= \frac{1}{2} a_x^3 (jj_1) \{(aj) j_{1x} - (aj_1) j_x\} \{(aj) j_{1x} + (aj_1) j_x\} \\
&= \frac{1}{2} a_x^4 (jj_1)^2 (aj) j_{1x} + \frac{1}{2} a_x^4 (jj_1)^2 (aj_1) j_x .
\end{aligned}$$

Beide Glieder sind aber ein und dasselbe symbolische Product, welches nichts anderes darstellt, als die Functionaldeterminante von f und $\tau = (jj_1)^2 j_x j_{1x}$. Wir haben also:
$$(jj_1)^2 (aj) a_x^4 j_{1x} = (f, \tau),$$
und folglich lässt sich Gleichung (13) in der Form schreiben:
$$(f, \tau) + c_1 \tau (j, \tau) = 0,$$
oder
$$(f + c_1 \tau j, \tau) = 0.$$

Es müsste also, da $\tau = \frac{B}{A} \cdot i$ von null verschieden ist und keine zwei gleichen Factoren besitzt, $f + c_1 \tau j$ eine Potenz von τ sein. Dies ist aber unmöglich, da f und j ungeraden Grades. Daher bleibt nur
$$f + c_1 \tau j = 0,$$

d. h., wenn die lineare Covariante α verschwindet, aber nicht alle fundamentalen Invarianten, so zerfällt die Form fünften Grades in ihre Covariante j und deren Hesse'sche τ:

$$f = c_2 \cdot j \cdot \tau.$$

247. *Dritter Fall.* Wir nehmen nun an, dass neben $\alpha = 0$ auch die Invarianten B und C verschwinden mögen, während die Invariante A noch willkürlich sei.

Aus der Relation [vgl. Nr. 230 (II)]

$$(f, \alpha^2)^2 = \frac{3}{2}\alpha\tau - Ai\alpha + \left(B - \frac{2}{3}A^2\right)j$$

folgt alsdann für $\alpha = 0$ die Beziehung:

$$-\frac{2}{3}A^2 j = 0.$$

Daraus ergiebt sich, dass entweder A oder j verschwinden muss. Nehmen wir an

(1) $$j \gtrless 0, \quad A = 0.$$

Dann ist einmal $(f, \tau)^2 = 0$, weil ja nach Nr. 225:

$$(f, \tau)^2 = -i\alpha - \frac{2}{3}Aj, \tag{1}$$

und ebenso [vgl. Nr. 245 (11)]:

$$i_x^2 \tau_y^2 - i_y^2 \tau_x^2 = 0, \tag{2}$$

da $\vartheta = -(j, \alpha) = 0$. Ersetzen wir in (2) y durch a, so kommt:

$$i \cdot (f, \tau)^2 - \tau \cdot (f, i)^2 = 0,$$

also wegen $(f, \tau)^2 = 0$

$$\tau \cdot (f, i)^2 = 0 = -j \cdot \tau.$$

Da j von null verschieden sein soll, so folgt daraus

$$\tau = 0,$$

d. h. aber, die Covariante j ist ein reiner Cubus:

$$j = \varrho_x^3.$$

Und weil nun in jedem Falle:

$$(f, j)^3 = 0,$$

so ist nunmehr

$$(a\varrho)^3 a_x^2 = 0,$$

und daraus erkennt man, dass f den Factor ϱ dreimal enthält. Wenn also: $\alpha = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $A = 0$ und $j \gtrless 0$, dann ist

$$f = \varrho_x^3 \cdot l,$$

wo l quadratische Form ist.

248. Setzen wir nun aber voraus, dass

(2) $$A \gtrless 0, \quad j = 0;$$

dann besitzt zunächst i wegen $A = A_{ii} \gtrless 0$ zwei verschiedene lineare Factoren

$$i = \varrho \cdot \sigma.$$

Aber aus:

$$-j = (f, i)^2 = (a\varrho)(a\sigma)a_x^3 = 0$$

folgt, dass jedes symbolische Product mit dem Reducenten

$$(a\varrho)(a\sigma)$$

verschwindet. Wenn man daher die Identität

$$a_x(\varrho\sigma) = \varrho_x(a\sigma) - \sigma_x(a\varrho)$$

auf die fünfte Potenz erhebt, so reducirt sich die binomische Entwicklung rechts auf ihr erstes und letztes Glied, und wir erhalten

$$f \cdot (\varrho\sigma)^5 = c_1\varrho^5 + c_2\sigma^5,$$

d. h. f ist in diesem Falle eine binomische Gleichung.

249. *Vierter Fall.* Nehmen wir endlich an, dass neben $\alpha = 0$, $B = 0$, $C = 0$ auch

$$j = 0 \quad \text{und} \quad A = 0 \tag{3}$$

sei, dann ist zunächst i ein volles Quadrat, also

$$i = \varrho_x^2,$$

und weil
$$-j = (f, i)^2 = (a\varrho)^2 a_x^3 = 0,$$

so muss f den linearen Factor ϱ viermal enthalten. Daraus geht aber umgekehrt hervor, dass i selbst verschwinden muss. Denn es ist

$$\varrho_x^4 (ab)^4 a_x b_x = \{b_x(a\varrho) - a_x(b\varrho)\}^4 a_x b_x. \tag{1}$$

Der Ausdruck rechts verschwindet aber wegen der Reducenten

$$(a\varrho)^2, \quad (b\varrho)^2,$$

und folglich auch

$$\varrho_x^4 (ab)^4 a_x b_x = i^3 = 0.$$

Wenn also $\alpha = 0$, $B = C = A = 0$, und $j = 0$, dann verschwindet auch i.

Fragen wir uns nun aber umgekehrt, welche Eigenschaft besitzt f, wenn i verschwindet, so geht aus dieser einen Bedingung zunächst das Verschwinden aller Invarianten hervor, so dass f jedenfalls mindestens einen quadratischen Factor besitzt, den wir mit ϱ bezeichnen wollen. Bilden wir nun:

$$\varrho_x^4 (ab)^4 (a\varrho)(b\varrho) = \{b_x(a\varrho) - a_x(b\varrho)\}^4 (a\varrho)(b\varrho), \tag{2}$$

so ist der Ausdruck links gleich dem Product $\varrho_x^4 \cdot (i, \varrho^2)^2 = 0$. Die rechte Seite reducirt sich aber wegen $(a\varrho)^4 a_x = (b\varrho)^4 b_x = 0$ auf

$$(a\varrho)^3 a_x^2 \cdot (b\varrho)^3 b_x^2 = \{(a\varrho)^3 a_x^2\}^2 = 0, \tag{3}$$

d. h. f enthält ϱ cubisch. Aus diesem Grunde erhalten wir aus der Identität

$$0 = \varrho_x^4 \cdot (ab)^4 (b\varrho)\, a_x = \left\{ b_x (a\varrho) - a_x (b\varrho) \right\}^4 (b\varrho)\, a_x$$

die Beziehung:
$$(a\varrho)^2 a_x^3 = 0, \tag{4}$$
welche lehrt, dass f den Factor ϱ viermal besitzt. Verschwindet also die Form $(f, f)^4$ identisch, so reducirt sich f auf $\varrho_x^4 \cdot \sigma_x$, wo ϱ und σ lineare Formen sind, ein Resultat, das wir schon in der allgemeinen Untersuchung § 19 erhalten haben.

§ 26. Das Formensystem der Form sechsten Grades $f = a_x^6$.

250. *Aufstellung der Systeme* $(A^{(i)})$ *und* $(B^{(i)})$. Wie bei der Form fünften Grades, so ist auch hier das System $(A^{(0)})$ durch $f = a_x^6$, das System $(B^{(0)})$ durch $(f, f)^2 = (ab)^2 a_x^4 b_x^4$ dargestellt, und man zeigt wie dort, dass das aus beiden durch Ueberschiebung entstehende System $(A^{(1)})$ nur die drei Formen enthält:

$$f, \ (f, f)^2, \ ((f, f)^2, f).$$

Dieses System $(A^{(1)})$ ist relativ vollständig mod. $(ab)^4$. Wir überschieben dasselbe mit dem Bildsystem resp. wirklichen System $(B^{(1)})$ der Form:

$$k = (f, f)^4 = (ab)^4 a_x^2 b_x^2.$$

Da diese Form k vierten Grades ist, so ist ihr System bereits bekannt. Es besteht aus den fünf Formen:

$$k, \ (k, k)^2, \ ((k, k)^2, k), \ i_k = B, \ j_k = C,$$

und ist relativ vollständig mod. $(ab)^6$. Die beiden Formen i_k und j_k sind Invarianten und als solche an der Ueberschiebung nicht betheiligt. Das vollständige Formensystem $(A^{(2)})$ von f besteht demnach aus den durch Ueberschiebung der Covarianten

$$f, \ (f, f)^2, \ ((f, f)^2, f)$$

über die Covarianten

$$k, \ (k, k)^2, \ ((k, k)^2, k)$$

sich ergebenden Formen, zu welchen ausserdem die drei Invarianten

$$A = (f, f)^6, \ B = (k, k)^4, \ C = ((k, k)^2, k)^4$$

hinzutreten.

251. *Methode der Ueberschiebung beider Systeme.* Es ist nun vortheilhaft, diesen Ueberschiebungsprocess nicht direct auf dem allgemeinen Wege vorzunehmen, wie ihn die aus je drei Formen bestehenden Systeme dictiren würden. Vielmehr bietet die folgende Methode wesentliche Vereinfachungen. Denken wir uns das volle System von f gebildet, so können wir die symbolischen Producte, durch welche die Formen des Systemes dargestellt sind, in zwei Klassen theilen.

Bei den Faltungen, welche die Ueberschiebungen des Systemes $(A^{(1)})$ über das System $(B^{(1)})$ vorschreiben, entstehen nämlich nur Klammerfactoren vom Typus (ak). Alle sich so ergebenden Formen des Systemes werden demnach mindestens die erste und höchstens die vierte Potenz dieses Klammerfactors $(ak) = (bk_1) = (ck_2)$ etc. enthalten. Fassen wir nun alle Formen zusammen, welche die höchste Potenz $(ak)^4$ enthalten, so kann man sich dieselben entstanden denken durch Ueberschiebung mit der Form

$$l = (ak)^4 a_x^2,$$

während sämmtliche Formen, welche die drei ersten Potenzen dieses Factors enthalten, für sich ein modulo $(ak)^4$ relativ vollständiges System S bilden. Dieses System S suchen wir zuerst zu ermitteln; indem wir dasselbe alsdann mit der Form l überschieben, erhalten wir das volle System $(A^{(2)})$ der Form f.

Auf diese Weise ist die Arbeit getheilt in zwei übersichtlichere und einfachere Aufgaben, einmal weil das mod. $(ak)^4$ relativ vollständige System viel kleiner ist als das gesammte System, dann aber auch, weil die Ueberschiebungen über eine quadratische Form l leicht discutirbar sind.

252. *Aufstellung der Reducenten; erster Reducent* $(ab)^3$. Ehe wir jedoch die erste Aufgabe in Angriff nehmen, das System S zu ermitteln, wollen wir versuchen, uns über die Reducenten, sei es nun des Systemes S, oder sei es des vollen Systemes $(A^{(2)})$ zu orientiren. Dabei erinnere ich, dass ein Klammerfactorenproduct als Reducent bezeichnet wird, sobald das aus ihm allein construirte Stammproduct, sowie alle daraus durch Faltung entstehenden reducibel sind. (Vergl. Nr. 124 und 144.)

So ist $(ab)^3$ Reducent. Denn das Stammproduct $(ab)^3 a_x^3 b_x^3$ ist reducibel, weil es verschwindet, und die aus ihm durch Faltung hervorgehenden von null verschiedenen Formen

$$k = (ab)^4 a_x^2 b_x^2, \quad A = (ab)^6$$

sind bekannte in das System $(A^{(2)})$ bereits aufgenommene Formen.

253. *Zweiter Reducent* $(ak)^3$. Aus diesem Reducenten $(ab)^3$ lässt sich sofort ein zweiter gewinnen. Denn ersetzen wir in dem symbolischen Product:

$$(ab)^3 a_y^3 b_y b_x^2 = k_y^3 k_x (yx)$$

y durch c, so erhalten wir:

$$(ab)^3 (ac)^3 (bc) b_x^2 c_x^2 = (kc)^3 c_x^3 k_x^3 = (ka)^3 a_x^3 k_x.$$

Da die linke Seite verschwindet, wie man durch Vertauschung von b mit c erkennt, so ist auch das Product:

$$(ak)^3 a_x^3 k_x = 0 = (f, k)^3, \tag{1}$$

d. h. reducibel; aus ihm entsteht durch Faltung die zum System $(A^{(2)})$ gehörige Form

$$l = (ak)^4 a_x^2;$$

und somit ist $(ak)^3$ Reducent.

Besitzt also ein symbolisches Product den Factor $(ab)^3$ oder $(ak)^3$, so lässt es sich im ersten Falle, von Producten mit dem Invariantenfactor A ganz abgesehen, auf Ueberschiebungen mit der Form k, im zweiten Falle auf Ueberschiebungen mit der Form l reduciren. Die irreduciblen Formen dieser beiden Ueberschiebungsgruppen werden wir alsbald kennen lernen.

254. *Dritter Reducent* (kk'). Durch Combination der beiden Reducenten $(ab)^3$ und $(ak)^3$ ergiebt sich ein dritter. Denn die Polarenglieder $(ab)^3 a_y^3 b_x^3$ und $(ak)^3 a_y^3 k_x$ ihrer beiden Stammproducte lassen sich in die Reihen entwickeln

$$(ab)^3 a_y^3 b_x^3 = \frac{3}{2} k_{y^2} (yx) + \frac{1}{4} A (yx)^3 \tag{1}$$

$$(ak)^3 a_y^3 k_x = \frac{3}{4} l_{y^2} (yx). \tag{2}$$

Ersetzt man in (1) y durch k, in (2) aber durch b und vergleicht die beiden sich so ergebenden Ueberschiebungsrelationen, so kommt direct

$$(f, l)^2 = 2\Delta + \frac{A}{3} k, \tag{I}$$

wobei Δ die Hesse'sche Form von k ist. Wir werden später die Form $(f, l)^2$, wie überhaupt alle Ueberschiebungen von f mit l^ϱ, $[\varrho = 1, 2, 3]$, in das System $(A^{(2)})$ aufnehmen. Die Covariante Δ ist dann eine reducible Form vermöge Gleichung (I). Daraus folgt, dass drittens (kk') Reducent ist. Denn

$$(kk') k_x^3 k_x'^3 = 0$$

und die aus diesem Stammproduct durch Faltung entstehenden sind Δ und die Invariante B. Jedes symbolische Product mit dem Factor (kk') lässt sich also reduciren auf solche, die entweder die Invarianten B bezw. A zu Factoren haben, oder auf Ueberschiebungen mit dem Factor $(al)^2$. Die letzteren werden wir aber, soweit wir nicht noch deren abermalige Reduction zeigen, im System vorfinden und somit ist (kk') Reducent auf diese Formen.



255. *Vierter Reducent* $(ab)^2(ak)^2$. Einen vierten Reducenten gewinnen wir durch folgende Betrachtung. Es ist nach Nr. 81 (VIII):

$$(ak)^3 a_y a_x^2 k_x = \frac{1}{4} l \cdot (yx) \text{ (wegen } (f, k)^3 = 0) \tag{1}$$

und nach Nr. 83 (IX):

$$(ab) a_y^3 a_x^2 b_x^5 = \frac{3}{2} (f, f)_{y^2}^2 (yx) + \frac{5}{28} k \cdot (yx)^3. \tag{2}$$

Ersetzen wir in (1) y durch b, in (2) aber durch k, so kommt durch Comparation der gleichen rechten Seiten:

$$\frac{3}{2} ((f, f)^2, k)^2 = \frac{1}{4} l \cdot f - \frac{5}{28} k^2. \tag{II}$$

Es ist also $((f, f)^2, k)^2$ eine reducible Form, und daraus ergiebt sich $(ab)^2(ak)^2$ als Reducent. Denn das Stammproduct

$$P = (ab)^2 (ak)^2 a_x^2 b_x^4 k_x^2$$

ist ein Glied der Ueberschiebung $((f, f)^2, k)^2$ und als solches durch diese plus einer Summe niedrigerer Ueberschiebungen darstellbar, die mindestens den Reducenten $(ab)^3$ zum Factor haben, da sie ja aus $(f, f)^2$, resp. k durch Faltung entstehen müssen (vergl. Nr. 42). Faltet man in dem Product P den Factor a_x mit b_x, so entsteht $(ab)^3$, a_x mit k_x, so kommt $(ak)^3$, und endlich b_x mit k_x, so ergeben sich mittelst des Identitätssatzes beide Reducenten. Es ist also P und jedes aus ihm durch Faltung entstehende Product reducibel, und folglich $(ab)^2(ak)^2$ Reducent.

256. *Fünfter Reducent* $(ak)^2(al)^2$. Da $(f, l)^2 = 2\Delta + \frac{A}{3} k$, so erhalten wir einen weitern Reducenten durch Ueberschiebung dieser Form mit k. Es ist nämlich:

$$((f, l)^2, k)^2 = (ak)^2 (al)^2 a_x^2 k_x^2 = \left(2\Delta + \frac{A}{3} k,\ k\right)^2.$$

Weil aber nach der Theorie der biquadratischen Formen

$$(\Delta, k)^2 = \frac{B}{6} k,$$

so erhält man

$$(ak)^2 (al)^2 a_x^2 k_x^2 = \frac{1}{3} B \cdot k + \frac{1}{3} A \cdot \Delta.$$

Das symbolische Product links ist also reducibel. Durch einmalige Faltung desselben entsteht der Reducent $(ak)^3$ und demnach ist $(ak)^2(al)^2$ Reducent.

257. *Sechster Reducent* $(ab)^2(al)^2$. Da endlich Δ eine reducible Form, so ist es auch $(f, \Delta)^2$, und zwar findet man ihren Werth auf folgende Weise. Es ist:

$$(ak)^3 a_x^3 k_y = -\frac{3}{4} l(yx) \tag{1}$$

$$(kk_1) k_y^3 k_{1x}^3 = \frac{3}{2} \Delta_{y^2}(yx) + \frac{B}{4}(yx)^3. \tag{2}$$

Ersetzt man in (1) y durch k, in (2) aber durch a, so erhält man durch Comparation der beiden entstehenden Ueberschiebungsresultate die Relation:

$$\frac{3}{4} l \cdot k = \frac{3}{2}(\Delta, f)^2 + \frac{B}{4} f. \tag{III}$$

Anderntheils ist aber

$$(ab)^2 (a l)^2 b_x^4 a_x^2 = ((f, l)^2, f)^2 = \left(2\Delta + \frac{A}{3} k, f\right)^2$$

$$= 2(\Delta, f)^2 + \frac{A}{3}(k, f)^2,$$

also wegen (III)

$$(ab)^2 (a l)^2 b_x^4 a_x^2 = l \cdot k - \frac{B}{3} f + \frac{A}{3}(f, k)^2 \cdot \tag{IV}$$

Demnach ist das symbolische Product links reducibel, und weil jedes aus ihm durch Faltung entstehende Product wegen des Factors $(ab)^3$ gleichfalls reducibel ist, so ist $(ab)^2(a l)^2$ Reducent.

258. *Rückblick.* Wir haben sonach sechs Reducenten erhalten:

$$(ab)^3,\ (ak)^3,\ (kk_1),\ (ab)^2(ak)^2,$$
$$(ak)^2(a l)^2,\ (ab)^2(a l)^2.$$

Jedes symbolische Product, das eine dieser sechs Grössen zum Factor besitzt, ist auf andere reducibel, welche entweder eine der Invarianten A resp. B zum Factor haben, oder welche durch Einführung der Symbole k resp. l als einfachere Ueberschiebungen dieser Formen über andere Formen des Systemes sich darstellen lassen. Diese letzteren Ueberschiebungen werden wir, insoweit nicht selbst wieder lineare Relationen unter ihnen bestehen, in das System $(A^{(2)})$ aufzunehmen haben.

Wir erhielten ferner folgende Beziehungen:

$$2\Delta = 2(k, k)^2 = (f, l)^2 - \frac{1}{3} A \cdot k \tag{I}$$

$$3 l \cdot k = 6(\Delta, f)^2 + B \cdot f \tag{II}$$

$$((f, l)^2, f)^2 = l \cdot k - \frac{B}{3} f + \frac{A}{3}(f, k)^2 \tag{III}$$

$$(f, k)^3 = 0.$$

Vermöge der Gleichung (I) erhält man hiezu noch die beiden Invariantenrelationen:

$$A_{ll} = (l, l)^2 = 2C + \frac{A}{3} B \tag{IV}$$

$$(k, l^2)^4 = \frac{2}{3}(B^2 + AC). \tag{V}$$

Die erste derselben entsteht aus (I), indem man diese Gleichung viermal über k schiebt:

$$2(\varDelta, k)^4 = ((f, l)^2, k)^4 - \frac{1}{3} AB$$

oder:

$$2j_k = ((f, k)^4, l)^2 - \frac{1}{3} AB$$

oder:

$$2C = \quad (l, l)^2 \quad - \frac{1}{3} AB.$$

Die zweite wird durch die viermalige Ueberschiebung von (I) über sich selbst geliefert:

$$4(\varDelta, \varDelta)^4 = ((f, l)^2, (f, l)^2)^4 - \frac{2}{3} A((f, l)^2, k)^4 + \frac{1}{9} A^2 (k, k)^4$$

oder

$$\frac{2}{3} B^2 = (ab)^4 (al)^2 (bl_1)^2 - \frac{2}{3} A\left(2C + \frac{AB}{3}\right) + \frac{1}{9} A^2 B. \qquad (\alpha)$$

Der erste Term rechts ist aber ein Glied der Ueberschiebung

$$(k, l^2)^4 = \frac{1}{3} (ab)^4 \{(al)^2 (bl_1)^2 + 2(al)(al_1)(bl)(bl_1)\},$$

welche unter Anwendung des Productsatzes auf das zweite Glied rechts in

$$(k, l^2)^4 = (ab)^4 (al)^2 (bl_1)^2 - \frac{1}{3} A \cdot A_u \qquad (\beta)$$

übergeht. Durch Substitution des hieraus sich ergebenden Werthes von $(ab)^4 (al)^2 (bl_1)^2$ in Gleichung (α) ergiebt sich die Relation (V).

259. *Aufstellung des Systemes* $S \equiv 0$ mod. $(ak)^4$. Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun im Stande, durch Ueberschiebung des Systemes $(A^{(1)})$ über das System $(B^{(1)})$ in einfacher Weise das neue System $S \equiv 0$ mod $(ak)^4$ herzustellen. Es ergiebt sich nämlich wegen der Reducenten und der letzten Relationen direct, dass hiebei überhaupt nur die Ueberschiebungen der Form k über die Formen des Systemes $(A^{(1)})$ in Betracht kommen und selbst hier nur die Ueberschiebung der ersten Potenz von k.

Denn die Form $\varDelta$ ist nach Relation (I) Nr. 258 auf $(f, l)^2$, also auf eine Form mit dem Modul $(ak)^4$, und auf k reducibel, und demnach reduciren sich die Ueberschiebungen zwischen ihr und den Formen des Systemes $(A^{(1)})$ auf die Ueberschiebungen von k.

Die Form $(\varDelta, k)$ ist wegen der nämlichen Relation gleichfalls auf Formen mit dem Modul $(ak)^4$ reducibel, sei es a priori oder sei es mittelst des Reducenten (kk_1), also ebenfalls überflüssig.

Die Formen $B = i_k$ und $C = j_k$ sind aber Invarianten. Also bleibt in der That vom ganzen Systeme $(B^{(1)})$ nur die Form k für die

zu untersuchenden Ueberschiebungen mit f, $(f, f)^2$, $((f, f)^2, f)$ übrig. Nun ist bereits $(ak)^3$ Reducent, und zwar ist $(ak)^3\, Q \equiv 0 \bmod (ak)^4$, wo Q irgend ein symbolisches Product. Folglich sind höhere als zweite Ueberschiebungen überflüssig, und wir können uns demnach auf die erste Potenz von k beschränken.

Durch ein- und zweimalige Ueberschiebung von k über die Formen des Systemes $(A^{(1)})$ entstehen aber die Covarianten:

$$(f, k), \quad (f, k)^2, \quad ((f, f)^2, k); \quad ((f, f)^2, k)^2, \quad \Big(((f, f)^2, f), k\Big),$$
$$\Big(((f, f)^2, f), k\Big)^2.$$

Die drei letzten Formen sind überflüssig; denn $((f, f)^2, k)^2$ ist schon nach Nr. 255 (II) als eine reducible Form erkannt worden. Die Form $\Big(((f, f)^2, f), k\Big)$ ist aber reducibel als Functionaldeterminante von einer Functionaldeterminante und im gleichen Sinne ist auch $\psi = \Big(((f, f)^2, f), k\Big)^2$ eine reducible Form, in so ferne die Glieder dieser Ueberschiebung durch den Productsatz in Aggregate umgestaltet werden können, deren einzelne Terme theils reducible, theils bereits in das System aufgenommene Formen zu Factoren haben. Hievon überzeugt man sich unmittelbar auch auf folgende Weise. Gemäss den Ueberschiebungsgesetzen Nr. 44 ist, da $(f, f)^5 = k^{(1)} = 0$,

$$\Big(((f, f)^2, f), k\Big)^2 = G_0 + \sum (T^{(1)}, k)^1 + \sum (T^{(2)}, k)^0 + \sum (T, k^{(2)})^0,$$

wobei das Anfangsglied $G_0 = (ab)^2 (ak)^2 (ac)\, a_x b_x^4 c_x^5 k_x^2$ und $T^{(1)}, T^{(2)}$; $k^{(1)}, k^{(2)}$ Formen sind, die aus $T = ((f, f)^2, f)$ resp. $k = (f, f)^4$ durch einmalige, resp. zweimalige Faltung entstehen. Die letzte Summe rechts hat nur den einen Summanden $T \cdot A$; alle Summanden der zweiten Summe zerfallen in Producte, deren einer Factor die Form k. Die Formen $T^{(1)}$ in der ersten Summe sind

$$(ab)^3 (ac)\, a_x^2 b_x^3 c_x^5 \qquad = \frac{1}{2} (ab)^3 a_x^2 b_x^2 c_x^5 \Big\{(ac)\, b_x - (bc)\, a_x\Big\} = \frac{1}{2} k \cdot f$$

$$(ab)^2 (ac)^2 a_x^2 b_x^4 c_x^4 \qquad = \frac{1}{4} \Big\{(ab)^2 c_x^2 + (ac)^2 b_x^2 - (bc)^2 a_x^2\Big\}^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2 = \frac{1}{2} k \cdot f$$

$$(ab)^2 (ac) (bc)\, a_x^2 b_x^3 c_x^4 = \frac{1}{2} \Big\{(ac)^2 b_x^2 + (bc)^2 a_x^2 - (ab)^2 c_x^2\Big\} (ab)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2 = 0,$$

so dass also auch die Formen $(T^{(1)}, k)^1$, wenn sie nicht verschwinden, eine der Formen k oder f zu Factoren haben. G_0 ist aber ohnehin reducibel nach Nr. 255 und damit die ganze rechte Seite.

Das ganze System $S \equiv 0 \bmod (ab)^4$ besteht demnach aus den zehn Formen:

$$\left.\begin{array}{l} f,\ \ (f, f)^2,\ \ ((f, f)^2, f) \\ k,\ \ (f, k),\ \ (f, k)^2,\ \ ((f, f)^2, k) \\ A,\ \ B,\ \ C. \end{array}\right\} S$$

260. *Ueberschiebung dieses Systemes S über* $l = (ak)^4 a_x^2$. Unsere letzte Aufgabe ist somit, die Ueberschiebungen der sieben Covarianten dieses Systemes über die Covariante

$$l = (ak)^4 a_x^2$$

zu studiren. Dabei ist es überhaupt nicht nöthig, Producte dieser Formen über l zu schieben. Denn alle sieben Covarianten sind geraden Grades, und demnach würden in jeder Ueberschiebung eines Productes dieser Formen über Potenzen von l zerfallende Glieder gebildet werden können.

Wir haben also nur die erste Potenz jeder der sieben Covarianten über Potenzen von l zu schieben.

Die Form f liefert dadurch die sechs neuen Formen

$$(f, l),\quad (f, l)^2,\quad (f, l^2)^3,\quad (f, l^2)^4,\quad (f, l^3)^5,\quad (f, l^3)^6.$$

Die Form $(f, f)^2$ giebt nur zu einer neuen Form

$$((f, f)^2, l)$$

Veranlassung; denn bereits bei der zweiten Ueberschiebung tritt der Reducent $(ab)^2 (al)^2$ auf. [Vgl. Nr. 257 (IV)].

Aus den Ueberschiebungen von $((f, f)^2, f)$ mit l entstehen überhaupt keine neuen Formen; denn die erste ist als Functionaldeterminante von einer Functionaldeterminante reducibel; alle weiteren besitzen den Reducenten $(al)^2 (ab)^2$.

Als weitere Formen des Systemes ergeben sich ferner die Ueberschiebungen

$$(k, l),\quad (k, l)^2,\quad (k, l^2)^3,$$

während die Invariante $(k, l^2)^4$ nach (V) Nr. 258 reducibel ist.

Von den Ueberschiebungen der Form (f, k) über Potenzen von l liefern die ungeraden überflüssige Formen. Denn sie enthalten resp. Glieder wie:

$$(ak)(al)\, l_x a_x^4 k_x^3$$
$$(ak)(al)^2 (al_1)\, l_x a_x^2 k_x^3$$
$$(ak)(al)^2 (al_1)^2 (al_2)\, l_{2x} k_x^3$$
$$(ak)(al)^2 (al_1)^2 (al_2)(kl_3)^2\, l_{2x} k_x,$$

welche stets wegen des Productsatzes auf andere Formen des Systems reducibel sind. So ist z. B.

$$(ak)(al)k_x l_x \cdot a_x^4 k_x^2 = a_x^4 k_x^2 \left\{ (ak)^2 l_x^2 + (al)^2 k_x^2 - (kl)^2 a_x^2 \right\}$$
$$= (f, k)^2 \cdot l + (f, l)^2 \cdot k - (f, l)^2 \cdot (k, l)^2.$$

Dagegen liefern die geraden Ueberschiebungen vier neue Formen:

$$((f, k), l)^2, \quad ((f, k), l^2)^4, \quad ((f, k), l^3)^6, \quad ((f, k), l^4)^8.$$

Hiezu tritt als weitere Covariante die erste Ueberschiebung der sechsten Covariante $(f, k)^2$ über l, also die Form

$$((f, k)^2, l),$$

während bereits ihre zweite Ueberschiebung wegen des Reducenten $(ak)^2(al)^2$ reducibel ist.

Die siebente Covariante $((f, f)^2, k)$ endlich liefert keine neue Form mehr. Denn ihre erste Ueberschiebung mit l ist nach dem nun wiederholt citirten Satze als Functionaldeterminante reducibel, und jede weitere hat den Reducenten $(ab)^2(al)^2$.

261. *Tabelle der Formen des Systemes* $(A^{(2)})$. Die Gesammtheit aller Formen des vollen Systemes von $f = a_x^6$ ist also durch folgende 26 Formen gegeben.

1) vier gerade Invarianten:

$$A, B, C, (f, l^3)^6 \text{ und eine schiefe } ((f, k), l^4)^8;$$

2) sechs quadratische Covarianten:

$$l, \quad (k, l)^2, \quad (f, l^2)^4, \quad (k, l^2)^3 \quad (f, l^3)^5, \quad ((f, k), l^3)^6;$$

3) fünf biquadratische Formen:

$$k, \quad (f, l)^2, \quad (k, l), \quad (f, l^2)^3, \quad ((f, k), l^2)^4;$$

4) fünf Covarianten sechsten Grades in x:

$$f, \quad (f, k)^2,\text{*)} \quad (f, l), \quad ((f, k)^2, l), \quad ((f, k), l)^2;$$

5) drei Covarianten achten Grades:

$$(f, f)^2, \quad (f, k), \quad ((f, f)^2, l);$$

6) eine Covariante zehnten und eine zwölften Grades, nämlich:

$$((f, f)^2, k), \text{ resp. } ((f, f)^2, f).$$

§ 27. Relationen zwischen den Formen des Systemes von $f = a_x^6$.

262. *Einführung von Ueberschiebungsgliedern in das System.* Nachdem wir durch die vorausgegangenen Untersuchungen in den Besitz sämmtlicher Formen des vollen Systemes von $f = a_x^6$ gelangt sind,

*) $(f, k)^2 = p$ bei Clebsch „Binäre Formen".



tritt an uns die Aufgabe heran, diese Formen, wenn nöthig, durch eingliedrige symbolische Producte zu ersetzen, die für die symbolische Rechnung als besonders tauglich erscheinen. Dies gilt insbesondere für die fünf Invarianten des Systemes, sowie für die sechs einfachsten Covarianten, d. i. für die sechs quadratischen Formen.

Von den Invarianten sind aber die drei ersten ohnehin einfache symbolische Producte, nämlich

$$A = (ab)^6, \quad B = (kk_1)^4,$$
$$C = (kk_1)^2 (kk_2)^2 (k_1 k_2)^2;$$

diese werden wir beibehalten. Dagegen werden wir an Stelle der Ueberschiebungen $(f, l^3)^6$, $((f, k), l^4)^8$ symbolische Producte einführen, die sich aus dem simultanen System der sechs quadratischen Covarianten ergeben.

Von den quadratischen Covarianten sind die beiden Formen l und $(k, l)^2$ durch je ein einfaches symbolisches Product dargestellt; alle übrigen ersetzen wir durch eines ihrer Glieder.

263. *Die quadratischen Formen.* Wie bei der Form fünften Grades die linearen Covarianten, so spielen hier die quadratischen eine wichtige Rolle. Auch hier ist das simultane System von vornherein bekannt, und die erste Aufgabe ist, dessen Stellung zum vollen System von $f = a_x^6$ kennen zu lernen. Diese Aufgabe aber deckt sich mit der vorhin gestellten: die complicirteren quadratischen Covarianten durch einfache symbolische Producte zu ersetzen. Setzen wir nämlich neben

$$(ak)^4 a_x^2 = l, \quad (k, l)^2 = (kl)^2 k_x^2 = m, \tag{1}$$

die wir a priori beibehalten, auch noch

$$(k, m)^2 = n,$$

dann zeigt sich, dass die in dem Systeme dieser drei Formen l, m, n auftretenden Functionaldeterminanten

$$\lambda = (m, n), \quad \mu = (n, l), \quad \nu = (l, m) \tag{2}$$

Glieder von $(k, l^2)^3$ resp. $(f, l^3)^5$, $((f, k), l^3)^6$ sind, während n an Stelle der Ueberschiebung $(f, l^2)^4$ treten kann. Denn man hat wegen der Relation [Nr. 258 (1)]

$$(f, l)^2 = 2\varDelta + \frac{1}{3} A \cdot k$$

durch zweimalige Ueberschiebung mit l die Beziehung

$$(f, l^2)^4 = 2(\varDelta, l)^2 + \frac{1}{3} A (k, l)^2.$$

Hierin ist nach unseren Bezeichnungen (1) $(k, l)^2 = m$; das erste

Glied rechts ergiebt sich aber als zweite Ueberschiebung von $\Delta = (k, k)^2$ über l aus der Reihenentwicklung

$$(kk_1)^2 k_x^2 k_{1y}^2 = \Delta_{y^2} + \frac{1}{3} B(yx)^2,$$

indem wir darin y durch l ersetzen; man erhält

$$(kk_1)^2 (k_1 l)^2 k_x^2 = (\Delta, l)^2 + \frac{1}{3} B \cdot l_x^2$$

oder

$$((k, l)^2, k)^2 = (\Delta, l)^2 + \frac{1}{3} B \cdot l$$

oder

$$(m, k)^2 = n = (\Delta, l)^2 + \frac{1}{3} B \cdot l. \tag{3}$$

Demnach wird:

$$(f, l^2)^4 = 2n - \frac{2B}{3} \cdot l + \frac{A}{3} m, \tag{4}$$

und folglich kann $(f, l^2)^4$ durch n ersetzt werden.

Es ist ferner:

$$(k, l^2)^3 = \frac{2}{2} (kl)^2 (kl_1) k_x l_x = ((k, l)^2, l) = (m, l) = -\nu$$

$$(f, l^3)^5 = \frac{3}{3} (al)^2 (al_1)^2 (al_2) a_x l_x = ((f, l^2)^4, l)$$

$$= \left(2n - \frac{2}{3} Bl + \frac{1}{3} Am, l\right) = 2(n, l) + \frac{1}{3} A (m, l)$$

$$= 2\mu - \frac{A}{3} \nu,$$

und endlich

$$-(ak)(al)^2(al_1)^2(kl_2)^2 a_x k_x = ((kl_2)^2 k_x^2, (al)^2 (al_1)^2 a_x^2)$$

$$= (m, (f, l^2)^4)$$

$$= \left(m, 2n - \frac{2B}{3} l + \frac{A}{3} m\right) = 2(m, n) + \frac{2}{3} B(l, m)$$

$$= 2\lambda + \frac{2}{3} B\nu.$$

Das symbolische Product links ist aber ein Glied der Ueberschiebung $((f, k), l^3)^6$, so dass damit der lineare Zusammenhang von λ mit dieser Form des Systemes hergestellt ist.

Die sechs quadratischen Covarianten des Systemes werden also der Reihe nach durch die Formen:

$$l = (ak)^4 a_x^2, \quad m = (kl)^2 k_x^2, \quad n = (km)^2 k_x^2 = (kl)^2 (kk_1)^2 k_{1x}^2$$
$$\lambda = (m, n), \quad \mu = (n, l), \quad \nu = (l, m)$$

ersetzt.

264. *Die fünf Invarianten.* Von den Formen

$$(f, f)^6, \quad (k, k)^4, \quad ((k, k)^2, k)^4, \quad (f, l^3)^6, \quad ((f, k), l^4)^8$$

werden, wie schon Eingangs erwähnt, die drei ersten beibehalten. Die vierte ersetzen wir durch die Invariante $(l, n)^2 = A_{ln} = D$, die fünfte durch die Combinante $-(lm)(mn)(nl) = R$. Was nämlich die Form $(f, l^3)^6$ betrifft, so hat man:

$$\begin{aligned}(f, l^3)^6 &= (al)^2(al_1)^2(al_2)^2 = ((al)^2(al_1)^2 a_x^2, l_{2x}^2)^2 \\ &= ((f, l^2)^4, l)^2 = \left(2(\varDelta, l)^2 + \frac{A}{3}m, l\right)^2 \\ &= \left(2n - \frac{2}{3}Bl + \frac{A}{3}m, l\right)^2 \\ &= 2(n, l)^2 - \frac{2}{3}B(l, l)^2 + \frac{1}{3}A(m, l)^2.\end{aligned}$$

Diese Gleichung lehrt, dass in der That an Stelle von $(f, l^3)^6$ die Form $(n, l)^2 = A_{ln}$ treten darf.

In Bezug auf die Invariante $((f, k), l^4)^8$ ergiebt sich aber, dass sie sich überhaupt nur um einen numerischen Factor von der Form $R = -(lm)(mn)(nl)$ unterscheiden kann. Denn im Systeme von $f = a_x^6$ tritt nur diese eine fundamentale schiefe Invariante auf, und sie ist vom Grade 15 in den Coefficienten von f. Die Form R ist aber gleichfalls schiefe Invariante und vom Grade 15 in den Coefficienten; sie kann also nur eine lineare Function der ersteren sein, d. h.

$$R = \varrho \cdot ((f, k), l^4)^8.$$

Die fünf Invarianten des Systemes können demnach dargestellt werden durch die symbolischen Producte

$$\begin{gathered}A = (ab)^6, \quad B = (kk_1)^4 \\ C = (kk_1)^2(k_1k_2)^2(k_2k)^2, \quad D = A_{ln} \\ R = -(lm)(mn)(nl).\end{gathered}$$

265. *Die zweiten Ueberschiebungen von $\varDelta$ und k über die quadratischen Formen l, m, n.* Neben den fundamentalen quadratischen Formen interessiren uns noch eine Reihe anderer Covarianten zweiten Grades, die wir im Folgenden berechnen wollen. Es sind das in erster Linie die zweiten Ueberschiebungen von $\varDelta$ und k über l, m, n, so weit sie nicht bisher schon in Betracht gezogen wurden.

Was die Ueberschiebungen von k betrifft, so war

Hiezu ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}(k, l)^2 = m, \quad (k, m)^2 = n \\ (k, n)^2 = \frac{Bm}{2} + \frac{Cl}{3}.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Denn es ist

$$(k, n)^2 = (kn)^2 k_x^2 = (kk_1)^2 (k_1 m)^2 k_x^2 = (kk_1)^2 (k_1 k_2)^2 (k_2 l)^2 k_x^2.$$

Nach den Gesetzen der Reihenentwicklung hat man aber

$$(k k_1)^2 (k_1 k_2)^2 k_{2y}^2 k_x^2 = \frac{1}{2} B k_{y^2} + \frac{1}{3} C (yx)^2$$

und daraus folgt unmittelbar für $y = l$ die obige Relation. Von den zweiten Ueberschiebungen der Form $\varDelta$ über l, m, n ist $(\varDelta, l)^2$ bereits berechnet [Nr. 263 (3)]. Es war

$$(\varDelta, l)^2 = n - \frac{B}{3} l.$$

Hiezu findet sich:

$$\left.\begin{aligned} (\varDelta, m)^2 &= \frac{B}{6} m + \frac{C}{3} l \\ (\varDelta, n)^2 &= \frac{B}{6} n + \frac{C}{3} m. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Die zweite dieser Relationen erhalten wir, indem wir in der Reihenentwicklung

$$(k\varDelta)^2 k_y^2 \varDelta_x^2 = \frac{B}{6} k_{y^2} + \frac{C}{3} (yx)^2 \qquad (\alpha)$$

y durch l und alsdann $(k\varDelta)^2 (kl)^2 \varDelta_x^2 = ((\varDelta, (kl)^2 k_x^2)^2$ durch $(\varDelta, m)^2$ ersetzen, während die dritte aus derselben Entwicklung (α) für $y = m$ hervorgeht.

266. *Die Ueberschiebungen von f über Producte von l, m, n.* Eine weitere Reihe quadratischer Covarianten liefern die vierten Ueberschiebungen von f über $l^2, lm, ln, m^2, mn, n^2$. Die drei ersten ergeben sich unmittelbar durch zweimalige Ueberschiebung der schon früher gegebenen Relation:

$$(f, l)^2 = 2\varDelta + \frac{A}{3} k$$

über l, m und n unter Benutzung der eben gefundenen Relationen (1) und (2). Das Resultat ist:

$$\left.\begin{aligned} (f, l^2)^4 &= -\frac{2}{3} Bl + \frac{A}{3} m + 2n \\ (f, lm)^4 &= +\frac{2}{3} Cl + \frac{B}{3} m + \frac{A}{3} n \\ (f, ln)^4 &= +\frac{1}{9} ACl + \left(\frac{2}{3} C + \frac{1}{6} AB\right) m + \frac{B}{3} n \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Hiezu treten durch nachfolgende Untersuchungen die drei weiteren Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
(f,\ m^2)^4 &= \left\{\frac{1}{2}A_{lm}+\frac{AC}{9}\right\}l+\frac{1}{6}\left\{\frac{AB}{3}-A_{ll}\right\}m+\frac{B}{3}n\\
(f,\ mn)^4 &= \left\{\frac{1}{2}A_{ln}+\frac{BC}{9}\right\}l+\frac{1}{2}\left\{\frac{B^2}{2}+\frac{AC}{3}\right\}m+\frac{1}{3}\left\{\frac{AB}{6}-A_{ll}\right\}n\\
(f,\ n^2)^4 &= \left\{\frac{1}{2}A_{mn}-\frac{C^2}{9}\right\}l+\left\{A_{ln}-\frac{CB}{18}\right\}m+\frac{1}{3}\left\{\frac{B^2}{6}-2A_{lm}\right\}n
\end{aligned}\right\}, \quad (4)$$

wenn wir die Invarianten $(l,\ l)^2$, $(l,\ m)^2$, $(l,\ n)^2$ etc. resp. mit A_{ll}, A_{lm}, A_{ln} etc. bezeichnen.

Zur Ermittelung dieser drei letzten Ueberschiebungen ist es nöthig, zuvor $(f,\ m)^2$ und $(f,\ n)^2$ zu berechnen. Wir gehen aus von der schon in Nr. 255 benutzten Reihenentwicklung (1)

$$(ak)^3 a_x^2 k_x a_y = \frac{l}{4}(yx). \qquad (\beta)$$

Ersetzen wir in ihr y durch l, so erhält man:

$$2(ak)^3 a_x^2 k_x (al) l_x = \frac{l^2}{2}.$$

Entwickelt man die linke Seite nach dem Productsatz, so kommt:

$$\begin{aligned}
\frac{l^2}{2} &= a_x^2 (ak)^2 \{(ak)^2 l + (al)^2 k_x^2 - (kl)^2 a_x^2\}\\
&= l^2 + (ak)^2 (al)^2 a_x^2 k_x^2 - (ak)^2 (kl)^2 a_x^4\}\\
&= l^2 + ((f,\ l)^2,\ k)^2 - (f,\ (kl)^2 k_x^2)^2\\
&= l^2 + \left(2\varDelta + \frac{A}{3}k,\ k\right)^2 - (f,\ m)^2\\
&= l^2 + \frac{B}{3}\cdot k + \frac{A}{3}\varDelta - (f,\ m)^2,
\end{aligned}$$

daher

$$(f,\ m)^2 = \frac{l^2}{2} + \frac{B}{3}\cdot k + \frac{A}{3}\varDelta. \qquad (5)$$

Ersetzt man dagegen in (β) y durch m, so erhalten wir

$$2(ak)^3 (am) a_x^2 k_x m_x = \frac{l\cdot m}{2}.$$

Wendet man wiederum auf die linke Seite den Productsatz an, dann erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{lm}{2} &= (ak)^2 a_x^2 \left\{(ak)^2 m_x^2 + (am)^2 k_x^2 - (km)^2 a_x^2\right\}\\
&= (f,\ k)^4\cdot m + ((f,\ m)^2,\ k)^2 - (f,\ (km)^2 k_x^2)^2\\
&= lm + \left(\frac{l^2}{2} + \frac{B}{3}k + \frac{A}{3}\varDelta,\ k\right)^2 - (f,\ n)^2.
\end{aligned}$$

Im mittleren Gliede rechts ist die Ueberschiebung $(l^2,\ k)^2$ zu berechnen.

Wir benutzen hiezu die Reihe:

$$l_x l_y \cdot l_x l_y = (l^2)_{y^2} + \frac{1}{3} A_{ll} (yx)^2. \tag{II}$$

Ersetzt man hier y durch k, so kommt

$$(lk)^2 k_x^2 \cdot l_x^2 = (l^2, k)^2 + \frac{1}{3}\left(2C + \frac{AB}{3}\right) k_x^4,$$

oder

$$(l^2, k)^2 = lm - \frac{1}{3}\left(2C + \frac{AB}{3}\right) k.$$

Trägt man diesen Werth in (6) ein, so erhält man:

$$\frac{lm}{2} = lm + \left\{\frac{1}{2}\left(lm - \frac{2}{3} Ck - \frac{1}{9} ABk\right) + \frac{B}{3}\varDelta + \frac{AB}{18} k\right\} - (f, n)^2.$$

Daraus folgt endlich:

$$(f, n)^2 = lm - \frac{1}{3} Ck + \frac{B}{3}\varDelta. \tag{7}$$

Mit Hilfe der Relationen (5) und (7) lassen sich nun in einfacher Weise die Ueberschiebungen $(f, m^2)^4$, $(f, mn)^4$, $(f, n^2)^4$ berechnen.

Es ist:

$$(f, m^2)^4 = \frac{1}{2}(l^2, m)^2 + \frac{B}{3}(k, m)^2 + \frac{A}{3}(\varDelta, m)^2.$$

Hierin ist, wenn wir in der Reihenentwicklung (II) y durch m ersetzen:

$$(l^2, m)^2 = (l, m)^2 \cdot l - \frac{1}{3} A_{ll} m.$$

Ferner hatten wir in (2) Nr. 265

$$(\varDelta, m)^2 = \frac{B}{6} m + \frac{C}{3} l,$$

und da ausserdem $(k, m)^2 = n$, $(l, m)^2 = A_{lm}$, so ist endlich:

$$(f, m^2)^4 = \frac{1}{2}\left\{A_{lm} \cdot l - \frac{1}{3} A_{ll} \cdot m\right\} + \frac{B}{3} n + \frac{A}{3}\left\{\frac{B}{6} m + \frac{C}{3} l\right\}.$$

Schieben wir aber die Relation (5) zweimal über n, so kommt:

$$(f, m \cdot n)^4 = \frac{1}{2}(l^2, n) + \frac{B}{3}(k, n)^2 + \frac{A}{3}(\varDelta, n)^2.$$

Aus der Reihe (II) folgt wiederum für $y = n$

$$(l^2, n) = (l, n)^2 \cdot l - \frac{1}{3} A_{ll} n.$$

Die Ueberschiebung wird also unter Berücksichtigung der Relationen (1) und (2) Nr. 265

$$(f, mn)^4 = \frac{1}{2}\left\{A_{ln} l - \frac{1}{3} A_{ll} n\right\} + \frac{B}{3}\left(\frac{B}{2} m + \frac{C}{3} l\right) + \frac{A}{3}\left(\frac{B}{6} n + \frac{C}{3} m\right).$$

Endlich ergiebt sich aus der Gleichung (7):

$$(f, n^2)^2 = (lm, n)^2 - \frac{1}{3} C (k, n)^2 + \frac{B}{3}(\varDelta, n)^2.$$

Zur Berechnung des ersten Gliedes der rechten Seite benutzen wir die Reihe

$$lm_y^2 + ml_y^2 = 2(lm)_{y^2} + \frac{2}{3} A_{lm}(yx)^2.$$

Ersetzt man hier y durch n, so kommt:

$$2(lm, n)^2 = lA_{mn} + mA_{ln} - \frac{2}{3} A_{lm} n.$$

Demnach wird

$$(f, n^2)^2 = \frac{1}{2}\left\{A_{mn} l + A_{ln} m - \frac{2}{3} A_{lm} n\right\} - \frac{C}{3}\left\{\frac{C}{3} l + \frac{B}{2} m\right\}$$
$$+ \frac{B}{3}\left\{\frac{B}{6} n + \frac{C}{3} m\right\}.$$

Damit wollen wir die Berechnung von quadratischen Covarianten der Form sechster Ordnung abschliessen, und zur Berechnung der Invarianten der quadratischen Fundamentalcovarianten übergehen.

267. *Berechnung der Invarianten des simultanen Systemes l, m, n.* Die drei quadratischen Covarianten besitzen ausser der schiefen Invariante $R = (lm)(mn)(ln)$ noch sechs simultane Invarianten (vgl. Nr. 131)

$$A_{ll}, \quad A_{lm}, \quad A_{ln}, \quad A_{mm}, \quad A_{mn}, \quad A_{nn},$$

die wir nun im Folgenden durch die Fundamentalinvarianten des Systemes von $f = a_x^6$ darstellen wollen.

Wir hatten bereits früher erhalten (vgl. Nr. 258 und Nr. 264)

$$\left.\begin{aligned} A_{ll} &= 2C + \frac{1}{3} AB \\ A_{lm} &= (k, l^2)^4 = \frac{2}{3}(B^2 + AC) \\ A_{ln} &= D. \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Hiezu ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} A_{mm} &= D \\ A_{mn} &= \frac{1}{3}\left\{B^3 + 2C^2 + \frac{4}{3} ABC\right\} \\ A_{nn} &= \frac{1}{2} BD + \frac{2}{9} C(B^2 + AC) \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Denn man hat:

$$A_{mm} = ((k, l)^2, m)^2 = (k, ml)^4 = ((k, m)^2, l)^2 = (n, l)^2$$
$$A_{mn} = ((k, l)^2, n)^2 = (k, nl)^4 = ((k, n)^2, l)^2 = \left(\frac{B}{2} m + \frac{C}{3} l, l\right)^2$$
$$A_{nn} = ((k, m)^2, n)^2 = (k, mn)^4 = ((k, n)^2, m)^2 = \left(\frac{B}{2} m + \frac{C}{3} l, l\right)^2.$$

268. *Die Relationen für die schiefe Invariante.* Aus der Theorie der simultanen quadratischen Formen ergiebt sich unmittelbar, dass (vgl. Nr. 133) R auch dargestellt werden kann durch

$$R = A_{l\lambda} = A_{m\mu} = A_{n\nu},$$

und dass ferner zwischen R^2 und den übrigen fundamentalen Covarianten eine Relation bestehen muss, welche aus

$$2R^2 = \begin{vmatrix} A_{ll}, & A_{lm}, & A_{ln} \\ A_{ml}, & A_{mm}, & A_{mn} \\ A_{nl}, & A_{nm}, & A_{nn} \end{vmatrix}$$

durch Substitution der in Nr. 267 berechneten Werthe der Determinantenelemente hervorgeht.

Weitere Relationen will ich nicht mehr anführen. Die schon früher in der Theorie der quadratischen Formen gewonnenen zahlreichen Beziehungen lassen sich hier direct übertragen. In ähnlicher Weise würde man auch die Theorie der biquadratischen Formen benutzen können, um Relationen zwischen den Covarianten vierten Grades des Systemes aufzustellen.

§ 28. Die Discriminante der Form sechsten Grades und irrationale Relationen.

269. *Vorbereitende Untersuchungen.* Die erste Berechnung der Discriminante einer Form sechsten Grades haben wir von Brioschi. Er benutzte hiebei die allgemeinen Differentialgleichungen, denen Invarianten überhaupt genügen, und charakterisirte dann die Discriminante, indem er ihnen specielle hinzufügte, welche nur durch Discriminanten befriedigt werden (Crelle's Journal Bd. 53. Vgl. auch Faà di Bruno, „Theorie der binären Formen", deutsche Uebersetzung von Walter, S. 275).

Die genaue Kenntniss des vollen Systemes von f gestattet uns indess hier wiederum den nun schon mehrmals eingeschlagenen directen Weg zu verfolgen (vgl. Discrim. der Form vierten und fünften Grades), indem wir uns fragen:

> „Welche Relation besteht zwischen den Invarianten A, B, C, D, wenn $f = \alpha_x^2 \cdot \varphi$, wo α_x eine lineare und φ eine biquadratische Form ist?"

Wie bei der Form fünften Grades, und wie überhaupt allgemein (vgl. Nr. 99), gehen aus der Voraussetzung $f = \alpha_x^2 \cdot \varphi$ folgende vier wichtige Beziehungen hervor:

$$(a\alpha)^6 = 0, \quad (a\alpha)^5 a_x = 0, \tag{1}$$

$$(a\alpha)^4 a_x^2 = \lambda \cdot \alpha_x^2, \tag{2}$$

$$\frac{5}{2}(ab)^2(a\alpha)^4 b_x^4 - \frac{5}{2}(k\alpha)^2 k_x^2 \cdot \alpha_x^2 = \frac{1}{3} A \cdot \alpha_x^4, \tag{3}$$

wobei Gleichung (3) aus $(a\alpha)^4 a_x$ durch die in Nr. 99 angegebene Reihenentwicklung gewonnen wird. Der Werth des Parameters λ berechnet sich gleichfalls wie früher. Wir ersetzen in (2) x durch b und multipliciren mit b_x^4, dann erhalten wir:

$$(a\alpha)^4 (ab)^2 b_x^4 = \lambda \cdot (f, \alpha^2)^2$$

und demnach wegen (3)

$$\lambda \cdot (f, \alpha^2)^2 = (k\alpha)^2 k_x^2 \cdot \alpha_x^2 + \frac{2}{15} A \cdot \alpha_x^4 \cdot \tag{4}$$

Ueberschiebt man aber diese Relation zweimal über α_x^2, so kommt in Verbindung mit Gleichung (2) direct:

$$\lambda^2 = \frac{1}{6}(k\alpha)^4. \tag{5}$$

Die nächste Aufgabe wäre nun, wiederum auch eine Relation für die erste Ueberschiebung (f, α) zu ermitteln und auf Grund der so berechneten Ueberschiebungen von f und α das Formensystem der simultanen Invarianten von f und α mit den Invarianten A, B, C, D in Beziehung zu setzen. Hiebei zeigt sich aber, dass insbesondere die höheren Ueberschiebungen von k, Δ und l über α die hervorragendste Rolle spielen, und wir suchen demnach hier von vornherein sie mit dem allgemeinen Formensystem in Beziehung zu setzen.

270. *Berechnung von* $(l\alpha)^2$ *und* $(\Delta\alpha)^2$. Zur Berechnung der Ueberschiebungen von l über α benutzen wir am geschicktesten die Relation (4), indem wir sie dreimal über k schieben. Dann kommt:

$$\lambda(a\alpha)^2(ak)^3 a_x k_x = \frac{1}{2}\{(kk_1)^2(\alpha k_1)\alpha_x + (kk_1)(\alpha k_1)^2 k_x\}(k\alpha)^2 k_{1x} - \frac{2}{15} A\,(k, \alpha^3)^3 \alpha_x$$

$$= -\frac{1}{2}(\Delta, \alpha^3)^3 \alpha_x - \frac{2}{15} A\,(k, \alpha^3)^3 \alpha_x, \tag{1}$$

weil das zweite Glied der Klammer rechts identisch verschwindet und $\Delta = (kk_1)^2 k_x^2 k_{1x}^2$ ist. Anderntheils ist aber, da nach Nr. 253, $(f, k)^3 = 0$,

$$(ak)^3 a_y^2 k_x a_x = -\frac{1}{2} l_x l_y \cdot (xy),$$

und demnach
$$(a\alpha)^2 (ak)^3 a_x k_x = \frac{1}{2}(l, \alpha) \cdot \alpha_x. \tag{2}$$

Führt man diesen Werth in (1) ein, so kommt nach Division mit $\frac{1}{2}\alpha_x$:

$$\lambda \cdot (l, \alpha) = -\left\{(\Delta, \alpha^3)^3 + \frac{4}{15} A \cdot (k, \alpha^3)^3\right\} \tag{3}$$

und hieraus durch abermalige Ueberschiebung mit α:

$$\lambda \cdot (l, \alpha^2)^2 = -\left\{(\varDelta, \alpha^4)^4 + \frac{4}{15} A \cdot (k, \alpha^4)^4\right\}. \tag{4}$$

Eine zweite Gleichung zwischen $(l\alpha)^2$ und $(\varDelta\alpha)^4$ erhalten wir durch viermalige Ueberschiebung von Relation (4) mit der Form k, nämlich

$$\lambda \cdot (l\alpha)^2 = (\varDelta, \alpha^4)^4 + \frac{2}{15} A . (k, \alpha^4)^4. \tag{5}$$

Indem wir beide Gleichungen addiren, erhalten wir wegen $(k\alpha)^4 = 6\lambda^2$

$$(l\alpha)^2 = -\frac{2}{5} A \cdot \lambda, \tag{6}$$

und indem wir sie subtrahiren

$$(\varDelta\alpha)^4 = -\frac{6}{5} A \cdot \lambda^2.$$

Nun lässt sich aber Gleichung (3) auch in der Form darstellen

$$\left(\lambda \cdot l + (\varDelta, \alpha^2)^2 + \frac{4}{15} A \cdot (k, \alpha^2)^2, \alpha\right) = 0,$$

d. h. (vgl. Nr. 99) die quadratische Form

$$\lambda \cdot l_x^2 + (\varDelta\alpha)^2 \varDelta_x^2 + \frac{4A}{15} (k\alpha)^2 k_x^2$$

ist eine Potenz von α, so dass also, wenn ϱ eine Proportionalitätsconstante, die Relation besteht

$$\varrho \cdot \alpha_x^2 - \lambda \cdot l_x^2 = (\varDelta\alpha)^2 \varDelta_x^2 + \frac{4}{15} A \cdot (k\alpha)^2 k_x^2. \tag{7}$$

Die Constante ϱ finden wir sofort, wenn wir diese Relation (7) zweimal über sich selbst schieben. Hiebei ergiebt sich links, da

$$(l, l)^2 = 2C + \frac{1}{3} AB,$$

der Werth: $$-2\lambda \cdot \varrho\, (l\alpha)^2 + \lambda^2 \left(2C + \frac{1}{3} AB\right); \tag{8}$$

rechts dagegen erhalten wir:

$$(\varDelta\alpha)^2(\varDelta_1\alpha)^2(\varDelta\varDelta_1)^2 + \frac{8}{15} A \cdot (\varDelta\alpha)^2(k\alpha)^2(\varDelta k)^2 + \frac{16}{225} A^2 \cdot (k\alpha)^2(k_1\alpha)^2(kk_1)^2,$$

oder, weil nach der Theorie der biquadratischen Formen $(\varDelta, k)^2 = \frac{B}{6} k$ und $(\varDelta, \varDelta)^2 = \frac{C}{3} k - \frac{B}{6} \varDelta$:

$$\frac{C}{3} (k\alpha)^4 - \frac{B}{6} (\varDelta\alpha)^4 + \frac{8}{90} AB \cdot (k\alpha)^4 + \frac{16}{225} A^2 \cdot (\varDelta\alpha)^4. \tag{9}$$

Tragen wir nun in (8) und (9) die Werthe von $(k\alpha)^4$, $(\varDelta\alpha)^4$, $(l\alpha)^2$ ein und setzen beide Ausdrücke wieder einander gleich, so kommt nach einfacher Reduction:

$$\varrho = \frac{1}{2} B - \frac{8}{75} A^2. \tag{10}$$

271. *Die Discriminante.* Die Relation (7) gestattet nun aber auch die Invariante $D = (m m_1)^2$ mit den simultanen Invarianten $(\varDelta \alpha)^4$ und $(k\alpha)^4$ in Beziehung zu setzen und damit erreichen wir zugleich das Ziel unserer Aufgabe. Ueberschiebt man nämlich die erwähnte Relation (7) zweimal über k, so erhält man wegen $(k, l)^2 = m$ zunächst:

$$\varrho \cdot (k, \alpha^2)^2 - \lambda \cdot m = (\varDelta \alpha)^2 (\varDelta k)^2 k_x^2 + \frac{4}{15} A \cdot (k\alpha)^2 (k_1 k)^2 k_x^2 . \quad (1)$$

Die Werthe der beiden Terme rechts ergeben sich aus den entsprechenden Reihenentwicklungen:

$$(\varDelta k)^2 \varDelta_y^2 k_x^2 = \{(\varDelta, k)^2\}_{y^2} + \frac{1}{3} (\varDelta, k)^4 (yx)^2 = \frac{B}{6} k_x^2 k_y^2 + \frac{C}{3} (y x)^2$$

$$(k k_1)^2 k_x^2 k_{1y}^2 = \{(k, k)^2\}_{y^2} + \frac{1}{3} (k, k)^4 (xy)^2 = \varDelta_x^2 \varDelta_y^2 + \frac{B}{3} (yx)^2,$$

indem man darin y durch α ersetzt. Führt man alsdann diese Werthe in (1) ein und ersetzt ϱ durch $\frac{1}{2} B - \frac{8}{75} A^2$, so kommt nach Multiplication mit -3:

$$3\lambda m = \left(B - \frac{8}{25} A^2\right) (k\alpha)^2 k_x^2 - \frac{4}{5} A \cdot (\varDelta \alpha)^2 \varDelta_x^2 - \left(C + \frac{4}{15} AB\right) \alpha_x^2 .$$

Bilden wir nun auf beiden Seiten dieser Gleichung

$$3\lambda m = P \cdot (k\alpha)^2 k_x^2 + Q \cdot (\varDelta \alpha)^2 \varDelta_x^2 + R \cdot \alpha_x^2$$

die Hesse'sche Form, so erhalten wir

$$9\lambda^2 D = P^2 (\varDelta \alpha)^4 + Q^2 ((\varDelta, \varDelta)^2, \alpha^4)^4$$
$$+ 2P \cdot Q \cdot ((\varDelta, k)^2, \alpha^4)^4 + 2P \cdot R \cdot (k\alpha)^4 + 2QR (\varDelta \alpha)^4 .$$

Ersetzen wir hierin $(\varDelta, \varDelta)^2$ und $(\varDelta, k)^2$ durch ihre Werthe $\frac{C}{3} k - \frac{B}{6} \varDelta$, resp. $\frac{B}{6} k$ und ordnen alsdann nach den Ueberschiebungen $(\varDelta \alpha)^4$ und $(k\alpha)^4$, so geht diese Gleichung über in:

$$9\lambda^2 D = (\varDelta \alpha)^4 \left\{P^2 - \frac{B}{6} Q^2 + 2QR\right\} + (k\alpha)^4 \left\{\frac{C}{3} \cdot Q^2 + \frac{B}{3} \cdot PQ + 2PR\right\}$$

oder wenn wir nun $(\varDelta \alpha)^2$, $(k\alpha)^2$, P, Q, R durch ihre Werthe ersetzen und mit λ^2 dividiren:

$$9D = -\frac{6}{5} A \left\{B^2 - \frac{8}{25} \cdot A^2 B + \frac{64}{625} A^4 + \frac{8}{5} AC\right\}$$
$$+ 6\left\{\frac{4}{3} \cdot \frac{16}{25} A^2 C - \frac{4}{5} AB^2 + \frac{32}{125} A^3 B - 2BC\right\} \cdot$$

Das ist die Invariantenrelation, welche die Voraussetzung $f = \alpha_x^2 \cdot \varphi$ zur Folge hat. Wir können sie auf die einfachere Form bringen, indem wir $\frac{2}{5} A = A_1$ setzen:

$$12 A_1^5 - 30 A_1^3 B - 20 A_1^2 C + 15 A_1 B^2 + 12 BC + 9 D = 0,$$

und die linke Seite dieser Gleichung müssen wir als Discriminante von f bezeichnen, mit der sie auch in Bezug auf den Grad in den Coefficienten übereinstimmt.

272. *Irrationale Relationen bei Combinanten.* Ehe wir die Untersuchungen über Co- und Invariantenrelationen verlassen, will ich noch auf eine Gattung von irrationalen Beziehungen zwischen Combinanten hinweisen, auf welche bereits Brill, Stephanos, Meyer und Stroh aufmerksam gemacht haben.

Sind nämlich $f = r_x^n$ und $\varphi = s_x^n$ zwei binäre Formen n^{ten} Grades, so ist nach einem Satze von Gordan (vgl. Nr. 68 und Math. Ann. Bd. V) jede Combinante der beiden Formen Covariante des Cayley'schen Ausdruckes

$$\Psi = f(x)\,\varphi(y) - \varphi(x)\,f(y),$$

also seiner Elementarcovarianten. Diese Elementarcovarianten sind in unserem Falle die ungeraden Ueberschiebungen von f über φ, da die geraden sich gegenseitig aufheben, also die Formen:

$$(f, \varphi), \quad (f, \varphi)^3, \quad (f, \varphi)^5 \ldots \text{ etc.}$$

Aber diese Covarianten können nicht von einander unabhängig sein. Denn wenn φ proportional f ist, so verschwindet Ψ und demnach alle Elementarcovarianten, und umgekehrt: Ist Ψ identisch null, so ist $f = \varrho \cdot \varphi$, wo ϱ eine Constante. Damit aber f und φ einander proportional sind, ist es bekanntlich schon hinreichend, dass ihre Functionaldeterminante (f, φ) identisch verschwindet. Wenn also schon das Verschwinden der ersten Elementarcovariante auch das Verschwinden von Ψ und damit aller übrigen Elementarcovarianten nach sich zieht, so können diese letzteren nicht mehr unabhängig sein von (f, φ). Es müssen vielmehr die Coefficienten der späteren Ueberschiebungen homogene und irrationale Functionen der Coefficienten von (f, φ) sein.

Man kann daher sich die Fragen stellen: Welches sind diese Coefficientenrelationen und wie gelangt man zu ihnen? Was die zweite Frage betrifft, so kann man zu ihrer Beantwortung einen schon mehrfach benutzten Weg einschlagen. Wir bilden eine Covariante von (f, φ) durch Ueberschiebung dieser Form über sich selbst, und sehen nach, ob sich diese Form nicht auch simultan durch eine Ueberschiebung von $F = (f, \varphi)$ über eine der übrigen Elementarcovarianten darstellen lässt. Dies ist sicher der Fall, wenn z. B. ein Glied der Ueberschiebung $(F, F)^\nu$ verschwindet, da man weiss, dass jedes Glied einer Ueberschiebung nach dieser und niedrigeren Ueberschiebungen von F über andere Formen entwickelt werden kann.

Nun tritt bereits für $\nu = 4$, also in $(F, F)^4$ ein solches Glied auf. Es ist, wenn $F = (f, \varphi) = (rs)\, r_x^{n-1} s_x^{n-1}$, das Glied

$$(rs)(r_1 s_1)(r r_1)(s r_1)(r s_1)(s s_1)\, r_x^{n-3} s_x^{n-3} r_{1x}^{n-3} s_{1x}^{n-3},$$

welches verschwindet, weil es durch Vertauschung von r mit r_1 nur sein Zeichen ändert. Es muss also eine Relation bestehen von der Form

$$0 = (F, F)^4 + \sum_{\nu=0}^{\nu=3} \varrho_\nu (F, \Phi_\mu)^\nu, \tag{I}$$

wobei Φ_μ irgend welche spätere Elementarcovarianten niedrigerern Grades als F sind. Durch Coefficientenvergleichung findet man alsdann jene Relationen, welche die Coefficienten der Formen Φ_μ mit denen von F in Beziehung setzen.

273. *Beispiel.* Wir wollen hier an einem speciellen Falle, in welchem die Functionaldeterminante $F = (f, \varphi)$ eine Form sechsten Grades ist, diese allgemeinen Betrachtungen erläutern. Die Formen f und φ sind alsdann zwei biquadratische Formen

$$f = r_x^4, \quad \varphi = s_x^4,$$

und ihre Combinanten entstehen durch Ueberschiebung der beiden einzig vorhandenen Elementarcombinanten

$$F = (rs)\, r_x^3 s_x^3 = a_x^6$$
$$\Phi = (rs)^3 r_x s_x.$$

Nach dem Vorausgegangenen sind die Coefficienten der Form Φ irrationale Functionen der Coefficienten von F, und unsere Aufgabe ist, die Beziehungen zwischen diesen Coefficienten herzustellen. Da wir es hier ausser der Combinante F nur noch mit einer Combinante Φ zu thun haben, so wird die oben aufgestellte allgemeine Relation (I) in einfacher Weise zum Ziele führen. Wir bilden demnach $(F, F)^4$, also die Covariante k von $F = a_x^6$. Da diese Form $k = (ab)^4 a_x^2 b_x^2$ aus der gemischten Polare $a_x^2 a_y^2 a_z^2$ für $y = z = b$ hervorgeht, so wollen wir zunächst diese gemischte Polare in Symbolen r, s darstellen.

Wir substituiren zu dem Zwecke in der Identität:

$$a_x^6 = (rs)\, r_x^3 s_x^3$$

für x_i den Werth $\lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i + \lambda_3 z_i$, dann kommt:

$$(\lambda_1 a_x + \lambda_2 a_y + \lambda_3 a_z)^6 = (rs)(\lambda_1 r_x + \lambda_2 r_y + \lambda_3 r_z)^3 (\lambda_1 s_x + \lambda_2 s_y + \lambda_3 s_z)^3.$$

Durch Comparation der Glieder mit dem Factor $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$ erhält man:

$$90\, a_x^2 a_y^2 a_z^2 = 36\, (rs)\, r_x r_y r_z s_x s_y s_z + 9\, (rs) \sum r_x^2 r_y s_y s_z^2,$$

wobei sich die Summe über die sechs möglichen Producte von der Gestalt $r_x^2\, r_y\, s_y\, s_z^2$ erstreckt. Addiren wir rechts sechsmal das Product $9\,(rs)\, r_x r_y r_z s_x s_y s_z$, indem wir gleichzeitig jeden solchen Summanden von je einem Gliede unter dem Summenzeichen subtrahiren, so findet man nach zweimaliger Anwendung der Identitäten

$$r_x s_y - s_x r_y = (rs)\,(xy), \quad r_x s_z - s_x r_z = (rs)\,(xz), \quad r_y s_z - r_z s_y = (rs)\,(yz)$$

die Relation:

$$90\, a_x^2\, a_y^2 a_z^2 = 90\,(rs)\, r_x r_y r_z\, s_x s_y s_z + 9\,(rs)^3 \sum (xy)^2\, r_z\, s_z.$$

Dividiren wir dieselbe durch 45 und setzen nun

$$\frac{2}{5}\,\Phi = \frac{2}{5}\,(rs)^3\, r_x s_x = p_x^2, \text{ etc.},$$

so kommt:

$$2\, a_x^2\, a_y^2\, a_z^2 = 2\,(rs)\, r_x r_y r_z\, s_x\, s_y s_z + \frac{1}{2}\, \{p_x^2\, (yz)^2 + p_y^2\,(xz)^2 + p_z^2\,(xy)^2\},$$

oder, indem wir den Productsatz

$$p_y p_z\,(xy)\,(xz) + \frac{1}{2}\, p_x^2\,(yz)^2 = \frac{1}{2}\, \{p_y^2\,(xz)^2 + p_z^2\,(xy)^2\}$$

auf den zweiten Term rechts anwenden:

$$2\, a_x^2\, a_y^2\, a_z^2 = 2\,(rs)\, r_x r_y r_z\, s_x s_y s_z + p_x^2\,(yz)^2 + p_y p_z\,(xy)\,(xz). \qquad \text{(II)}$$

Ersetzen wir hierin y und z durch b und multipliciren mit b_x^2, so kommt:

$$2\,(ab)^4\, a_x^2\, b_x^2 = 2\,(rs)\,(rb)^2\,(sb)^2\, r_x\, s_x\, b_x^2 + (bp)^2\, b_x^4. \qquad \text{(III)}$$

Der zweite Term rechts ist nichts anderes als $\frac{2}{5}\,(F,\, \Phi)^2$. Der Werth des ersten Termes ergiebt sich aus derselben Gleichung (II), wenn wir darin y durch r, z durch s ersetzen und mit $(rs)\, r_x s_x$ multipliciren; man erhält alsdann:

$$2\,(rs)\,(ar)^2\,(as)^2\, a_x^2\, r_x s_x = p_x^2 \cdot (rs)^3\, r_x s_x + (pr)\,(ps)\,(rs)\, r_x^2 s_x^2. \qquad (1)$$

Hierin ist der zweite Term rechts ein Glied der Ueberschiebung

$$(f, p)^2 = (rs)\,(r_x^3\, s_x^3,\, p_x^2)^3 = \frac{(rs)}{5}\{(pr)^2\, r_x s_x^3 + (ps)^2\, s_x r_x^3 + 3\,(pr)\,(ps)\, r_x^2 s_x^2\}.$$

Ersetzt man in der Klammer rechts die Grösse $(pr)^2\, s_x^2 + (ps)^2\, r_x^2$ nach dem Productsatz durch $2\,(pr)\,(ps)\, r_x s_x + (rs)^2\, p_x^2$, so kommt:

$$(f,\, p)^2 = (ps)\,(pr)\,(rs)\, r_x^2\, s_x^2 + \frac{1}{5}\,(rs)^3\, r_x s_x \cdot p_x^2. \qquad (2)$$

Führt man also in die Gleichung (1) den aus dieser Gleichung (2) sich ergebenden Werth von $(ps)\,(pr)\,(rs)\, s_x^2\, r_x^2$ ein, so erhalten wir

$$2\,(rs)\,(ar)^2\,(as)^2\, a_x^2\, r_x\, s_x = \frac{4}{5}\, p_x^2 \cdot (rs)^3\, r_x s_x + (f,\, p)^2,$$

oder, weil $p_x^2 = p = \frac{2}{5}(rs)^3 r_x s_x$,

$$2(rs)(ar)^2(as)^2 a_x^2 r_x s_x = 2p^2 + (f, p)^2 = \frac{8}{25}\Phi^2 + \frac{2}{5}(F, \Phi)^2.$$

Durch Substitution dieses Werthes in (III) ergiebt sich endlich nach Division mit dem Factor 2:

$$(F, F)^4 = \frac{4}{25}\Phi^2 + \frac{2}{5}(F, \Phi)^2, \tag{IV}$$

und dies ist die gesuchte Fundamentalrelation zwischen den Coefficienten von F und Φ.

274. Führen wir in dieselbe die Symbole a, k und p von F resp. $(F, F)^4$ und $\frac{2}{5}\Phi$ ein, so nimmt sie die Gestalt an

$$k = p^2 + (ap)^2 a_x^4. \tag{3}$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von x auf beiden Seiten dieser Identität erhält man fünf Gleichungen zur Berechnung der drei Grössen $p_0\ p_1\ p_2$. Doch lässt sich dieses System in einfacher Weise auf eine einzige Gleichung für die Discriminante $P = (pp_1)^2$ der quadratischen Form p reduciren. Ich überschiebe diese Identität zunächst viermal über f, und erhalte, da $(k, f)^4 = (ak)^4 a_x^2 = l$,

$$l = (f, p^2)^4 + (f, (f, p)^2)^4 = (ap)^2 (ap_1)^2 a_x^2 + (ab)^4 (bp)^2 a_x^2.$$

Der Werth des ersten Termes rechts folgt aus der Fundamentalrelation (3), indem man sie zweimal über p schiebt:

$$(f, p^2)^4 = (k, p)^2 - \frac{2}{3}P \cdot p.$$

Um das zweite Glied zu berechnen, bilde ich die Ueberschiebung

$$(k, p)^2 = (ab)^4 (a_x^2 b_x^2, p_x^2) = \frac{(ab)^4}{3}\{(bp)^2 a_x^2 + 2(ap)(bp) a_x b_x\}$$
$$= \frac{(ab)^4}{3}\{(bp)^2 a_x^2 + (ap)^2 b_x^2 + (bp)^2 a_x^2 - (ab)^2 p\}.$$

Hieraus folgt direct:

$$(ab)^4 (bp)^2 a_x^2 = (f, (f, p)^2)^4 = (k, p)^2 + \frac{A}{3}p.$$

Demnach wird

$$l = 2(k, p)^2 + \frac{1}{3}p(A - 2P). \tag{V}$$

Bildet man nun die zweite Ueberschiebung dieser Relation über p, so findet man:

$$(lp)^2 = 2(k, p^2)^4 + \frac{P}{3}(A - 2P). \tag{4}$$

Die Fundamentalrelation (3) liefert aber für $(k, p^2)^4$ unmittelbar durch viermalige Ueberschiebung über k:

$$(k, p^2)^4 = B - (lp)^2.$$

Trägt man diesen Werth in die letzte Gleichung (4) ein, so kommt:

$$3(lp)^2 = 2B + \frac{P}{3}(A - 2P). \tag{VI}$$

Gelingt es uns nun, die Ueberschiebung $(lp)^2$ noch auf eine zweite Art darzustellen, so erhalten wir in Verbindung mit Gleichung (VI) eine Relation für P.

275. Nun erinnern wir uns aber daran, dass die zweimalige Ueberschiebung von $\varDelta$ über l dargestellt ist durch (vergl. Nr. 265, 2)

$$(\varDelta, l)^2 = n - \frac{B}{3}l,$$

dass also rechts wiederum die Covariante l auftritt.

Wenn wir daher die Relation (V) zweimal über $\varDelta$ schieben, so erhalten wir eine neue Relation für l, nämlich:

$$n - \frac{1}{3}Bl = 2((k, p)^2, \varDelta)^2 + \frac{1}{3}(\varDelta, p)^2(A - 2P). \tag{5}$$

Es ist aber:

$$((k, p)^2, \varDelta_x^4)^2 = (kp)^2(k\varDelta)^2\varDelta_x^2.$$

Der Term rechts ist ein Glied der Ueberschiebung

$$((k, \varDelta)^2, p)^2 = \left(\frac{B}{6}k, p\right)^2.$$

Denn man hat:

$$((k, \varDelta)^2, p)^2 = \frac{(k\varDelta)^2}{6}\{(kp)^2\varDelta_x^2 + (\varDelta p)^2 k_x^2 + 4(kp)(\varDelta p)k_x\varDelta_x\},$$

oder, da die beiden ersten Glieder rechts die nämliche Covariante darstellen, wie man unmittelbar erkennt, wenn man $\varDelta$ durch $(k_1 k_2)^2 k_{1x}^2 k_{2x}^2$ ersetzt, und da der dritte Term der Klammer nach dem Productsatz sich durch $2(\varDelta p)^2 k_x^2 + 2(kp)^2\varDelta_x^2 - 2(k\varDelta)^2 p$ ersetzen lässt, so wird

$$((k, \varDelta)^2, p)^2 = \frac{(k\varDelta)^2}{6}\{6(kp)^2\varDelta_x^2 - 2(k\varDelta)^2 p\},$$

oder

$$\frac{B}{6}(k, p)^2 = (k\varDelta)^2(kp)^2\varDelta_x^2 - \frac{1}{3}Cp,$$

und folglich

$$2(kp)^2(k\varDelta)^2\varDelta_x^2 = \frac{1}{3}B(k, p)^2 + \frac{2}{3}Cp.$$

Durch Substitution dieses Werthes in (5) erhält man:

$$n - \frac{1}{3}Bl = \frac{1}{3}B(k, p)^2 + \frac{1}{3}(\varDelta, p)^2(A - 2P) + \frac{2}{3}Cp. \tag{6}$$

Hierin ist $(k, p)^2$ wegen Gleichung (V) bekannt. $(\varDelta, p)^2$ aber geht aus der nämlichen Relation (V) durch zweimalige Ueberschiebung über k hervor; dies liefert nämlich:

$$(k, l)^2 = m = 2(k, (k, p)^2)^2 + \frac{1}{3}(k, p)^2 (A - 2P),$$

oder:

$$m = 2(k k_1)^2 (k_1 p)^2 k_x^2 + \frac{1}{3}(k, p)^2 (A - 2P).$$

Der erste Term rechts ist ein Glied der Ueberschiebung $(\varDelta, p)^2$; denn man hat:

$$(\varDelta, p)^2 = (k k_1)^2 (k_x^2 k_{1x}^2, p)^2 = \frac{(k k_1)^2}{3} \{(k_1 p)^2 k_x^2 + 2(kp)(k_1 p) k_{1x} k_x\}$$

$$= (k k_1)^2 (k_1 p)^2 k_x^2 - \frac{1}{3} B p,$$

oder:

$$2(k k_1)^2 (k_1 p)^2 k_x^2 = 2(\varDelta, p)^2 + \frac{2B}{3} p.$$

Demnach wird:

$$m = 2(\varDelta, p)^2 + \frac{2}{3} B p + \frac{A - 2P}{3}(k, p)^2. \tag{7}$$

Wir haben also, wenn wir der Einfachheit halber

$$A - 2P = 6\varrho$$

setzen, folgende drei Relationen:

$$\frac{l}{2} = (k, p)^2 \qquad\qquad + p \cdot \varrho \qquad \text{[vgl. (V)]}$$

$$\frac{m}{2} = (k, p)^2 \cdot \varrho + (\varDelta, p)^2 + p \cdot \frac{B}{3} \qquad \text{[vgl. (7)]}$$

$$\left(\frac{n}{2} - \frac{B}{6} l\right) = (k, p)^2 \cdot \frac{B}{6} + (\varDelta, p)^2 \cdot \varrho + p \cdot \frac{C}{3} \qquad \text{[vgl. (6)]}.$$

276. Multiplicirt man die erste Gleichung mit $\varrho^2 - \frac{B}{6}$, die zweite mit $-\varrho$, die dritte mit 1 und addirt, so kommt:

$$\frac{l}{2}\left(\varrho^2 - \frac{B}{6}\right) - \frac{m}{2}\varrho + \left(\frac{n}{2} - \frac{B}{6} l\right) = p\left\{\varrho^3 - \frac{B}{6}\varrho - \frac{B}{3}\varrho + \frac{C}{3}\right\},$$

oder:

$$\left(\frac{\varrho^2}{2} - \frac{B}{4}\right) l - \frac{\varrho}{2} m + \frac{n}{2} = p\left\{\varrho^3 - \frac{B}{2}\varrho + \frac{C}{3}\right\}.$$

Ueberschiebt man endlich diese Relation zweimal über l und ersetzt A_{ll}, A_{ml}, A_{nl} durch ihre Werthe $2C + \frac{AB}{3}$, resp. $\frac{2}{3}(B^2 + AC)$ und D, so kommt als zweite Relation für $(lp)^2$:

$$\left(\frac{\varrho^2}{2} - \frac{B}{4}\right)\left(2C + \frac{AB}{3}\right) - \frac{\varrho}{3}(B^2 + AC) + \frac{D}{2} = (lp)^2\left\{\varrho^3 - \frac{B}{2}\varrho + \frac{C}{3}\right\}.$$

Ersetzen wir hierin gemäss Gleichung (VI) $(lp)^2$ durch

$$\frac{2}{3} B + \frac{P}{9}(A - 2P) = -2\varrho^2 + \frac{A}{3}\varrho + \frac{2}{3} B,$$

so kommt nach gehöriger Vereinfachung:

$$2\varrho^5 - \frac{A}{3}\varrho^4 - \frac{5B}{3}\varrho^3 + \frac{AB+5C}{3}\varrho^2 - \frac{4AC}{9}\varrho - \left(\frac{AB^2}{12} + \frac{13}{18}BC - \frac{D}{2}\right) = 0.$$

Die Discriminante P der quadratischen Form p ist also von einer Gleichung fünften Grades abhängig, deren Coefficienten die Invarianten der ersten Elementarcovariante sind. In ähnlicher Weise würde man finden, dass für zwei Formen dritten Grades f und φ die zweite Elementarcovariante, welche in diesem Falle bereits Invariante ist, durch eine quadratische Gleichung sich aus den Coefficienten der ersten Elementarcovariante berechnen lässt.

277. *Schlussbemerkungen.* Ich will die letzten Betrachtungen mit dem Hinweis auf deren Verallgemeinerung schliessen. Zunächst hatte Brill (Math. Annalen Bd. XX) die Bedeutung dieser ersten Elementarcombinante für alle übrigen Combinanten bemerkt, auch für den Fall, dass das zu Grunde gelegte simultane System aus mehr als zwei Formen f, φ besteht. Unter anderm zeigte er, dass sie eine allgemeine Form ihres Grades ist und dass ihre Discriminante in zwei rationale Factoren zerfällt. Stephanos, der in den Comptes Rendus 1882 gleichzeitig auf diese Beziehungen aufmerksam machte, hat alsdann in seinen Abhandlungen: „Mémoire sur les faisceaux de formes binaires ayant une même Jacobienne“ vom Jahre 1883, und „Mémoire sur la Théorie des Formes binaires et sur l'élimination“ vom Jahre 1884 dieselben noch eingehender untersucht. Er sowohl als Franz Meyer (Apolarität und rationale Curven, Seite 391) zeigen, dass die in unserm speciellen Falle aufgestellte Endgleichung fünften Grades für die Coefficienten der zweiten Elementarcovariante im allgemeinen Falle, wenn f und φ vom n^{ten} Grade sind, den Grad $N = \frac{(2(n-1))!}{(n-1)!\,n!}$ besitzt. Bezüglich weiterer interessanter Resultate müssen wir auf die citirten Quellen verweisen. Hier sei nur noch auf die Umkehrung der im Vorigen behandelten Aufgabe aufmerksam gemacht. Man kann sich nämlich fragen: welche Formen f und φ gehören zu einer gegebenen ersten Elementarcovariante F von f und φ? Für unser Beispiel lässt sich die Frage einfach beantworten. Es war $f = r_x^4$, $\varphi = s_x^4$, also:

$$\psi = r_x^4 s_y^4 - s_x^4 r_y^4 = \text{Const.}\, F_{y^3}(yx) + \text{Const.}\, \Phi_y(yx).$$

Da F gegeben ist, Φ durch eine Gleichung fünften Grades aus F sich berechnen lässt, y aber willkürlich ist, so erkennt man, dass zu einer gegebenen Form F stets fünf Schaaren oder lineare Systeme

$$\Psi = \mu r_x^4 + \lambda s_x^4$$

gehören. Einer solchen Schaar gehören insbesondere zwei specielle Formen an, für welche die Invariante $i = 0$ ist, also die beiden

Tetraeder der Schaar, welche durch die aus $i = 0$ sich ergebende quadratische Gleichung für $\frac{\lambda}{\mu}$ bestimmt sind. In einer Mittheilung an die Société mathématique de France (1880) hat Stephanos gezeigt, dass, wenn f und φ Formen n^{ten} Grades sind, die Zahl der linearen Systeme, welche zu einer gegebenen Functionaldeterminante zweier Formen f und φ gehören, gleich der oben angeführten Zahl $N = \frac{(2(n-1))!}{(n-1)!\,n!}$ ist.

§ 29. Typische Darstellung der Form sechsten Grades.

278. *Allgemeiner Fall.* In den Systemen von Formen gerader Ordnung treten im allgemeinen Falle lineare Covarianten nicht auf. Dagegen besitzen dieselben im Allgemeinen, wenn $n > 4$, stets mindestens zwei quadratische Covarianten φ und ψ, deren Resultante $R_{\varphi,\psi}$ nicht verschwindet. (Vergl. Clebsch, „Binäre Formen", § 102, Seite 140.) Diese zwei quadratischen Formen können nun unter anderm als Grundlage für die typische Darstellung von Formen gerader Ordnung benutzt werden, wie Clebsch und Gordan, Annali di Mat., Ser. II., t. 1, gezeigt haben. Denn zwischen vier quadratischen Formen a_x^2, l_x^2, m_x^2, n_x^2 besteht stets die Relation (vergl. Nr. 135, I, worin $y = a$ zu setzen ist)

$$a_x^2 \cdot R_{lmn} = l(a\lambda)^2 + m(a\mu)^2 + n(a\nu)^2,$$

wobei λ, μ, ν die Functionaldeterminanten $(mn)\,m_x n_x$, respective $(nl)\,n_x l_x$, $(lm)\,l_x m_x$ repräsentiren. Und diese Relation findet hier dieselbe Verwendung, wie bei den Formen ungeraden Grades die Identität

$$a_x(\alpha\beta) = \alpha_x(a\beta) - \beta_x(a\alpha).$$

Wir erheben sie auf die $\frac{n}{2}^{\text{te}}$ Potenz und erhalten die Beziehung

$$R_{lmn}^{\frac{n}{2}} \cdot f = \{l(a\lambda)^2 + m(a\mu)^2 + n(a\nu)^2\}^{\frac{n}{2}}, \tag{I}$$

aus welcher die typische Darstellung von f unmittelbar hervorgeht. Es treten dabei allerdings an Stelle der zwei alten Variabeln $x_1\,x_2$ drei neue l, m, n auf; doch sind diese nicht von einander unabhängig. Denn zwischen ihnen besteht die Relation [vergl. Nr. 134, 3, (γ)]

$$0 = \begin{vmatrix} A_{ll}, & A_{lm}, & A_{ln}, & l \\ A_{lm}, & A_{mm}, & A_{mn}, & m \\ A_{ln}, & A_{nm}, & A_{nn}, & n \\ l, & m, & n, & 0 \end{vmatrix}$$

und somit ist die typische Darstellung (I) von f in der That eine binäre.

279. Was nun die Form $f = a_x^6$ betrifft, so könnten wir deren typische Darstellung unmittelbar auf Gleichung (I) basiren. Indessen bietet in diesem Falle die in Nr. 135, (VII) gegebene Relation ein noch bequemeres Mittel, zum nämlichen Resultate zu gelangen, so lange die Invariante R von 0 verschieden ist.

Ersetzen wir in derselben nämlich f, φ, ψ durch die drei quadratischen Formen l, m, n des Systemes von $f = a_x^6$, so geht dieselbe über in:

$$\begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} & l_x^2 & l_y^2 \\ A_{lm} & A_{mm} & A_{mn} & m_x^2 & m_y^2 \\ A_{ln} & A_{mn} & A_{nn} & n_x^2 & n_y^2 \\ l_x^2 & m_x^2 & n_x^2 & 0 & (xy)^2 \\ l_y^2 & m_y^2 & n_y^2 & (xy)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickeln wir diese Determinante mit Hilfe des Additionstheorems für Determinanten (vergl. Bd. I Nr. 35 u. 36) nach Potenzen von (xy), so erhalten wir:

$$0 = -2R^2\cdot(yx)^4 - 2\begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} & l_x^2 \\ A_{lm} & A_{mm} & A_{mn} & m_x^2 \\ A_{ln} & A_{mn} & A_{nn} & n_x^2 \\ l_y^2 & m_y^2 & n_y^2 & 0 \end{vmatrix}(yx)^2 + \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} & l_x^2 & l_y^2 \\ A_{lm} & A_{mm} & A_{mn} & m_x^2 & n_y^2 \\ A_{ln} & A_{mn} & A_{nm} & n_x^2 & n_y^2 \\ l_x^2 & m_x^2 & n_x^2 & 0 & 0 \\ l_y^2 & m_y^2 & n_y^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Hierin besitzt der Coefficient von $2\,(yx)^2$ gemäss der Relation (VI) Nr. 135 den Werth $-2\,R^2\,(yx)^2$, wie sich aus derselben wiederum nach dem Additionsgesetze für Determinanten ergiebt. Demnach geht die letzte Gleichung, wenn wir überdies y durch a ersetzen und mit a_x^2 multipliciren, über in:

$$-2\,R^2\cdot f = a_x^2\begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} & l & (al)^2 \\ A_{lm} & A_{mm} & A_{mn} & m & (am)^2 \\ A_{ln} & A_{mn} & A_{nn} & n & (an)^2 \\ l & m & n & 0 & 0 \\ (al)^2 & (am)^2 & (an)^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

280. Entwickelt man diese Determinante nach den Minoren der letzten zwei Zeilen und Colonnen (vergl. insbesondere Bd. I Seite 72, Beispiel 2), so erhält man:

$$-2\,R^2\cdot f = \sum A_{nn}\,\{l^2\,(f,\,m^2)^4 - 2\,lm\,(f,\,ml)^4 + m^2\,(f,\,l^2)^4\} \qquad \text{(I)}$$
$$-2\sum A_{mn}\{l^2\,(f,\,mn)^4 - lm(f,\,ln)^4 + mn\,(f,\,l^2)^4 - nl(f,\,ml)^4\},$$

wobei jede Summe sich über drei Glieder erstreckt, deren zweites und drittes aus den angeschriebenen durch cyclische Vertauschung von $l\ m\ n$ hervorgehen.

Die in der Entwicklung rechts auftretenden quadratischen Formen

$$(f, l^2)^4,\quad (f, m^2)^4,\quad (f, n^2)^4,\quad (f, lm)^4,\quad (f, ln)^4,\quad (f, mn)^4$$

sind aber, wie wir bereits gezeigt haben, lineare Functionen der Covarianten l, m, n. Diese Entwicklung rechts ist also eine Function dritten Grades in den Variabeln l, m, n, und die darin auftretenden Coefficienten sind Invarianten. Die typische Darstellung von f ist also in der That durch die Gleichung (I) geleistet. Betrachtet man in ihr die Covarianten l, m, n als drei Coordinaten x_1, x_2, x_3, so stellt die rechte Seite dieser Gleichung eine Curve dritter Ordnung dar. Da aber nach der Schlussbemerkung in Nr. 278 dieselben drei Coordinaten den Kegelschnitt

$$\begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} & x_1 \\ A_{lm} & A_{mm} & A_{mn} & x_2 \\ l_{ln} & l_{mn} & A_{nn} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(II)}$$

befriedigen, so erkennt man: Die Wurzeln der Gleichung sechsten Grades $f = 0$ werden durch die typische Darstellung von f als Schnittpunkte einer Curve dritter Ordnung und eines Kegelschnittes erhalten.

281. *Der specielle Fall* $R = 0$. Wir hatten bisher vorausgesetzt, dass R von null verschieden sei. Nehmen wir nun an, dass R identisch verschwinde, so dürfen, wenn die typische Darstellung gleichwohl möglich sein soll, die Covarianten l, m, n keinen gemeinsamen Factor haben. Zu dem Zwecke genügt es, dass $A_{ll}A_{mm} - A_{ml}^2$ von null verschieden sei.

Wir benutzen alsdann behufs typischer Darstellung die in der Theorie der quadratischen Formen gegebene Identität [vgl. Nr. 135, (V)]

$$2\,v_x^2 \cdot v_y^2 = \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & l \\ A_{lm} & A_{mm} & m \\ l_y^2 & m_y^2 & (xy)^2 \end{vmatrix},$$

welche, nach $(xy)^2$ entwickelt, die Form annimmt:

$$(xy)^2 A_{vv} = 2\,v_x^2 v_y^2 - \begin{vmatrix} A_{ll} & l_{lm} & l \\ A_{lm} & A_{mm} & m \\ l_y^2 & m_y^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Erheben wir dieselbe auf die dritte Potenz und ersetzen alsdann y durch a, so kommt:

$$A^3_{\nu\nu}\cdot f = \prod_{i=1}^{i=3}\left\{2\nu(\nu_i a)^2 - \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & l \\ A_{lm} & A_{mm} & m \\ (l_i a)^2 & (m_i a)^2 & 0 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= 8\nu^3\cdot(f,\nu^3)^6 - 4\nu^2\sum(\nu_1 a)^2(\nu_2 a)^2 \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & l \\ A_{lm} & A_{mm} & m \\ (l_3 a)^2 & (m_3 a)^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ 2\nu\sum(\nu_1 a)^2 \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & l \\ A_{lm} & A_{mm} & m \\ (l_2 a)^2 & (m_2 a)^2 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & l \\ A_{lm} & A_{mm} & m \\ (l_3 a)^2 & (m_3 a)^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-\prod_{i=1}^{i=3}\begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & l \\ A_{lm} & A_{mm} & m \\ (l_i a)^2 & (l_i a)^2 & 0 \end{vmatrix},$$

wobei sich die beiden Summen $\sum$ über je drei Glieder erstrecken.

In der Entwicklung rechts verschwindet das erste und dritte Glied. Denn die Invarianten

$$(f,\nu^3)^6,\quad (f,\nu l^2)^6,\quad (f,\nu m^2)^6,\quad (f,\nu l m)^6,$$

welche in diesen zwei Gliedern als Coefficienten auftreten, sind schiefe Invarianten von den Graden 25, bezw. 15, 19, 17 in den Coefficienten von f, sie müssen daher, da nur die einzige schiefe Fundamentalinvariante R im Systeme existirt, diese zum Factor haben, und sonach gleichzeitig mit R verschwinden.

Es reducirt sich also die typische Darstellung auf:

$$A^3_{\nu\nu} f \equiv -\prod \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & l \\ A_{lm} & A_{mm} & m \\ (l_i a)^2 & (m_i a)^2 & 0 \end{vmatrix} - 4\nu^2\sum(\nu_1 a)^2(\nu_2 a)^2 \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & l \\ A_{lm} & A_{mm} & m \\ (l_3 a)^2 & (m_3 a)^2 & 0 \end{vmatrix}. \qquad \text{(III)}$$

Da ν als Functionaldeterminante von l und m der Relation genügt

$$-2\nu^2 = \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & l \\ A_{lm} & A_{mm} & m \\ l & m & 0 \end{vmatrix}, \qquad \text{(IV)}$$

so erhält man nach Substitution dieses Werthes von ν^2 in die drei letzten Glieder der Gleichung (III) auf der rechten Seite einen in den Formen l und m homogenen cubischen Ausdruck von der Gestalt:

$$A^3_{\nu\nu} f = C_1 l^3 + C_2 l^2 m + C_3 l m^2 + C_4 m^3.$$

Die Coefficienten C_i dieser Darstellung sind Functionen der Invarianten A_{ll}, A_{lm}, A_{mm} und ausserdem der Invarianten

$$(f,\ l^3)^6,\ \ (f,\ m^3)^6,\ \ (f,\ l^2m)^6,\ \ (f,\ lm^2)^6;$$

denn die zwei Invarianten $(f,\ \nu^2 l)^6$, $(f,\ \nu^2 m)^6$ lassen sich sofort wegen (IV) auf dieselben reduciren.

Von diesen wurde die erste bereits früher berechnet (Nr. 264):

$$(f,\ l^3)^6 = 2A_{ln} - \frac{2}{3} B A_{ll} + \frac{1}{3} A_{lm}.$$

Die drei andern ergeben sich direct aus den beiden ersten Relationen in (3) Nr. 266, indem man dieselben zweimal über m, resp. l schiebt. Die Coefficienten der typischen Darstellung

$$A_{\nu\nu}^3 \cdot f = C_1 l^3 + C_2 l^2 m + C_3 l m^2 + C_4 m^3 \tag{V}$$

sind somit vollständig bekannte Grössen.

Weitere specielle Fälle sind in Bezug auf typische Darstellung noch wenig untersucht worden. In den „Binären Formen“ Clebsch's findet sich noch neben dem eben besprochenen Fall die typische Darstellung von f, wenn $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, D und R von Null verschieden. Es ergiebt sich das Resultat:

$$D^2 f = 2n^3 + \frac{3D}{2} l^2 m,$$

wobei n und l reine Quadrate sind. (Vergl. a. a. O. Seite 467.)

§ 30. Auflösung specieller Gleichungen sechsten Grades.

282. *Ueberblick.* Von den Gleichungen sechsten Grades, welche vermöge gewisser Invarianten- oder Covariantenbedingungen den Charakter von speciellen Gleichungen tragen, sind einmal jene hervorzuheben, deren Invariantenrelationen ihre Reduction auf Gleichungen niedrigerern Grades involviren, dann aber auch jene, durch deren Invariantenbeziehungen zwar nicht ihr Grad reducirt wird, welche aber durch andere bemerkenswerthe Eigenschaften unser Interesse erregen, insofern sie mit Modulargleichungen oder Multiplicatorgleichungen identificirt werden können. Wir wollen einige wichtige Fälle dieser speciellen Gleichungen sechsten Grades im Folgenden eingehender untersuchen, insbesondere um auf die Art und Weise hinzudeuten, wie die hier einschlägigen Fragen mit unsern Mitteln behandelt werden können. Der uns zunächst interessirende Fall ist der Fall, in welchem $R = 0$, und die Resultante $R_{lm} = -2A_{\nu\nu}$ von l und m von Null verschieden ist. Hieran schliessen sich die Untersuchungen über den Fall $R = 0$, $A_{\nu\nu} = 0$, die zu drei Unterabtheilungen von Bedingungen Veranlassung geben, jenachdem das Verschwinden von $A_{\nu\nu}$ eine Folge davon, dass l und



m einen linearen Factor gemeinschaftlich besitzen, oder dass l proportional m ist, oder endlich, dass l oder m selbst identisch null wird. Im letzten Falle wird sich zeigen, dass, wenn eine der drei quadratischen Formen verschwindet, nothwendig auch die zwei andern null werden, und die Form $(f, f)^4$ entweder das Quadrat oder die vierte Potenz einer Form zweiten resp. ersten Grades ist, so dass also nur noch diese beiden Möglichkeiten zu besprechen sind, um den Fall $R = 0$, $A_{\nu\nu} = 0$ völlig zu erschöpfen.

Zum Schlusse weisen wir noch auf die beiden Fälle: $A = 0$, $C = 0$ und $B = \text{Const.} \times A^2$, $C = \text{Const.} \times A^3$ hin, unter welchen Bedingungen sich die allgemeine Gleichung sechsten Grades durch lineare Transformation auf Gleichungen mit einem einzigen Parameter reduciren lässt.

283. *Erster Fall:* $R = 0$, $A_{\nu\nu} \gtrless 0$. Die typische Darstellung der Form $f = a_x^6$ für $R = 0$ am Schlusse des letzten Paragraphen lehrt:

> „Verschwindet die Invariante R, so ist die Gleichung sechsten Grades $f = 0$ algebraisch lösbar, und ihre Wurzeln sind drei Elementenpaare einer Involution, deren Doppelpunkte durch die linearen Factoren von $\nu = 0$ bestimmt sind."

Denn durch die Substitution

$$y = \frac{l}{m}$$

geht die unter Nr. 281 gegebene Gleichung (V) über in

$$C_1 y^3 + C_2 y^2 + C_3 y + C_4 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung seien y_1, y_2, y_3; die Wurzeln von $f = 0$ werden alsdann durch die drei quadratischen Gleichungen:

$$l - y_1 m = 0, \quad l - y_2 m = 0, \quad l - y_3 m = 0 \tag{1}$$

geliefert. Da nach Voraussetzung $A_{\nu\nu} \gtrless 0$, also l und m keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so kann man diese beiden quadratischen Covarianten auf die canonische Form:

$$l = \alpha_1 \xi^2 + \beta_1 \eta^2$$
$$m = \alpha_2 \xi^2 + \beta_2 \eta^2$$

durch eine gemeinschaftliche lineare Transformation bringen (vergl. Nr. 130), wobei ξ und η die linearen Factoren von $\nu = 0$ sind. Alsdann gehen die drei quadratischen Formen (1) über in:

$$c_1 \xi^2 - c_2 \eta^2 = 0, \quad c_1' \xi^2 - c_2' \eta^2 = 0, \quad c_1'' \xi^2 - c_2'' \eta^2 = 0$$

und diese drei Gleichungen repräsentiren drei Punktepaare, welche zu den Punkten $\xi = 0$, $\eta = 0$ harmonisch liegen, was zu beweisen war.

284. *Zweiter Fall; erste Unterabtheilung:* $R=0$, $A_{\nu\nu}=0$. Wir nehmen an, das Verschwinden von $A_{\nu\nu}=A_{ll}A_{mm}-A_{lm}^2$ sei dadurch bedingt, dass l und m einen gemeinschaftlichen linearen Factor α haben. Da aber die Bedingung $R=0$ eine lineare Relation:

$$2\nu\cdot R=\begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} \\ A_{ml} & A_{mm} & A_{mn} \\ l & m & n \end{vmatrix}=c_1 l+c_2 m+c_3 n=0 \text{ (vgl. Nr. 135, IV}_b\text{)}$$

zwischen den drei Covarianten l, m, n involvirt, so muss auch n mit l und m denselben linearen Factor α gemeinschaftlich haben.

Die Bedingungen für unsern Fall lassen sich demnach auch in der Form schreiben

$$l=\alpha\cdot r,\quad m=\alpha\cdot s,\quad n=\alpha\cdot t, \tag{1}$$

wobei die linearen Factoren r, s, t von einander verschieden sein sollen. Aus diesen drei Bedingungen (1) gehen direct die Relationen

$$(l\alpha)^2=0,\quad (m\alpha)^2=0,\quad (n\alpha)^2=0 \tag{2}$$

hervor, während nach der Theorie der quadratischen Formen

$$\alpha^2=(l,\ m)=\nu \quad \text{ist.}$$

Nun ist aber die Covariante l nichts anderes als $(f,\ k)^4$, und es liegt die Frage nahe, ob eine dieser beiden Formen f und k den rationalen linearen Factor α_x besitzt. Um dies zu untersuchen, hat man nur die Ueberschiebungen von k, resp. f über α zu bilden und nachzusehen, welche derselben identisch verschwindet. Man findet alsdann:

$$(k\alpha)^3 k_x=0 \tag{3}$$

und

$$(f\alpha)^4 f_x^2=0. \tag{4}$$

Die erste Gleichung lehrt: k besitzt den Factor α_x quadratisch, die zweite: f enthält ihn cubisch*).

Denn multipliciren wir, um die Bedingungen (2) zum Beweise einführen zu können, $(k\alpha)^3 k_x$ mit $(rs)\gtrless 0$, so erhalten wir unter Anwendung des Identitätssatzes:

*) Dass die Deutung dieser beiden Gleichungen richtig ist, kann man sofort erkennen, wenn man eine Form $f=a_x^n$ mit Hilfe zweier linearer Formen α_x und β_x vermöge der Identität

$$\alpha_x(\alpha\beta)=(\alpha\beta)\alpha_x-(a\alpha)\beta_x$$

darzustellen versucht. Erhebt man dieselbe auf die n^{te} Potenz und entwickelt rechts nach dem binomischen Lehrsatz, so ergiebt sich unmittelbar unter der Voraussetzung $(f,\ \alpha)^{n-k}=0$, dass f den Factor α^{k+1} besitzt.

$$(k\alpha)^3 k_x (rs) = (k\alpha)^3 \{(ks) r_x - (kr) s_x\} = (k,\ \alpha^3 s)^4 - (k,\ \alpha^3 r)^4$$
$$= ((k, \alpha s)^2, \alpha^2)^2 - ((k, \alpha r)^2, \alpha^2)^2 = ((k, m)^2, \alpha^2)^2 - ((k, l)^2, \alpha^2)^2$$
$$= (n\alpha)^2 - (m\alpha)^2 = 0.$$

Da aber $(rs) \gtrless 0$ ist, so muss $(k\alpha)^3 k_x = 0$ sein. Es enthält demnach in der That k den Factor α_x zweifach, und folglich nach der Theorie der biquadratischen Formen auch die Hesse'sche Form Δ von k. Weil sich nun aber alle zweiten Ueberschiebungen von f über l, m, n als lineare Functionen von k, Δ, l^2, lm darstellen lassen, so muss auch jede dieser Formen $(f, l)^2$, $(f, m)^2$, $(f, n)^2$ den linearen Factor α quadratisch enthalten, d. h. es muss sein:

$$(f,\ l)^2 = a_x^4 (a\alpha)(ar) = \alpha_x^2 \cdot \varphi \tag{5}$$
$$(f,\ m)^2 = a_x^4 (a\alpha)(as) = \alpha_x^2 \cdot \psi, \tag{6}$$

wo φ und ψ quadratische Formen sind, die für $x = \alpha$ nicht verschwinden. Ueberschiebt man diese beiden Formen dreimal über α^3, so müssen diese Ueberschiebungen wegen $(\alpha,\ \alpha) = 0$ verschwinden, d. h. man hat:

$$(\alpha_x^2 \cdot \varphi,\ \alpha_x^3)^3 = a_x (a\alpha)^4 (ar) = 0$$
$$(\alpha_x^2 \cdot \psi,\ \alpha_x^3)^3 = a_x (a\alpha)^4 (as) = 0.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $-s_x$, die zweite mit r_x und addirt, so kommt

$$a_x (a\alpha)^4 ((as) r_x - (ar) s_x) = a_x^2 (a\alpha)^4 (rs) = 0,$$

oder:

$$a_x^2 (a\alpha)^4 = 0,$$

d. h. f besitzt den Factor α_x cubisch. Man hat also den Satz:

„Haben die drei quadratischen Formen l, m, n einen gemeinsamen Factor α_x, so besitzt f denselben dreifach."

285. *Umkehrung.* Diese Bedingungen sind nöthig und hinreichend. Denn besitzt f den Factor α_x dreifach, so ist zunächst

$$a_x^2 (a\alpha)^4 = 0.$$

Multipliciren wir anderntheils $(k\alpha)^3 k_x$ mit α_x^4, so erhalten wir:

$$(k\alpha)^3 k_x \cdot \alpha_x^4 = \frac{(ab)^4}{2} \{(a\alpha)^2 (b\alpha) b_x + (b\alpha)^2 (a\alpha) a_x\} \cdot \alpha_x^4,$$

oder, weil beide Terme rechts gleich sind:

$$(k\alpha)^3 k_x \cdot \alpha_x^4 = (ab)^4 (a\alpha)^2 (b\alpha) b_x \cdot \alpha_x^4$$
$$= (a\alpha)^2 (b\alpha) b_x \cdot \{b_x (a\alpha) - a_x (b\alpha)\}^4.$$

Entwickelt man rechts nach dem binomischen Lehrsatz und führt die Multiplication aus, so besitzt jedes Glied den Factor

$$(a\alpha)^4 a_x^2 = (b\alpha)^4 b_x^2 = 0.$$

Es verschwindet demnach auch die linke Seite; folglich besitzt k und mit ihm Δ den Factor α_x quadratisch. Daraus ergiebt sich endlich unmittelbar, dass

$$(l\alpha)^2 = (m\alpha)^2 = (n\alpha)^2 = 0.$$

Denn es ist:

$$(l,\ \alpha^2)^2 = (ak)^4 (a\alpha)^2,$$

also

$$\alpha^4 (l\alpha)^2 = (a\alpha)^2 \{k_x(a\alpha) - a_x(k\alpha)\}^4 = 0,$$

weil

$$(k\alpha)^3 k_x = 0,\ (a\alpha)^4 a_x^2 = 0.$$

Ferner ist:

$$(m,\ \alpha^2)^2 = (kl)^2 (k\alpha)^2,$$

also

$$\alpha^2 (m\alpha)^2 = (k\alpha)^2 \{k_x(l\alpha) - l_x(k\alpha)\}^2 = 0,$$

weil

$$(k\alpha)^3 k_x = 0,\ \ (l\alpha)^2 = 0.$$

Endlich ist:

$$(n\alpha)^2 = (km)^2 (k\alpha)^2,$$

also

$$\alpha^2 (n\alpha)^2 = (k\alpha)^2 \{k_x(m\alpha) - m_x(k\alpha)\}^2 = 0,$$

weil

$$(k\alpha)^3 k_x = 0,\ \ (m\alpha)^2 = 0.$$

Die drei quadratischen Formen l, m, n besitzen also in der That einen gemeinsamen Factor α und es ist demnach $R = 0$, $A_{rr} = 0$.

286. *Zweiter Fall; zweite Unterabtheilung.* Die Resultante von l und m verschwindet aber auch, wenn l und m zwei lineare Factoren gemeinschaftlich haben, d. h. wenn

$$m = \varrho \cdot l, \tag{1}$$

wo ϱ eine Proportionalitätsconstante. In diesem Falle ist aber auch n nur bis auf eine Constante von l und m verschieden. Denn

$$n = (k,\ m)^2 = \varrho\,(k,\ l)^2,$$

und da $(k,\ l)^2 = m$, so hat man:

$$n = \varrho \cdot m = \varrho^2 \cdot l.$$

Unter diesen Voraussetzungen aber gilt zunächst der Satz:

„Sind die drei quadratischen Covarianten l, m, n einander proportional und von null verschieden, so kann A_{ll} nicht verschwinden.“

Wir beweisen diesen Satz indirect. Wäre nämlich $A_{ll} = 0$, also l und damit auch n und m ein volles Quadrat, so hätte man zunächst

$$A_{ll} = 2C + \frac{AB}{3} = 0 \ \text{(vgl. Nr. 267)}. \tag{2}$$

Anderntheils war (vgl. Nr. 266):

$$\left.\begin{aligned}(f,\, n)^2 &= -\frac{C}{3}k + \frac{B}{3}\Delta + lm\\ (f,\, l)^2 &= \quad \frac{A}{3}k + 2\Delta.\end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Demnach ist

$$\left(f, n - \frac{B}{6}l\right)^2 = -\frac{C}{3}k + \frac{B}{3}\Delta + lm - \frac{B}{6}\left(\frac{A}{3}k + 2\Delta\right)$$

$$= lm - \frac{1}{6}\left(2C + \frac{AB}{3}\right)k,$$

oder wegen (2)

$$\left(f, n - \frac{B}{6}l\right)^2 = lm = \varrho\, l^2. \tag{4}$$

Weil aber $n = \varrho^2 l$, so ist auch

$$\left(f, n - \frac{B}{6}l\right)^2 = \left(\varrho^2 - \frac{B}{6}\right)(f,\, l)^2 \tag{5}$$

und also durch Comparation

$$(f,\, l)^2 = \frac{6\varrho}{6\varrho^2 - B}\, l^2.$$

Nun soll aber l das Quadrat einer linearen Form α_x sein; demnach können wir die letzte Gleichung auch schreiben:

$$(f,\, \alpha^2)^2 = (a\alpha)^2 a_x^4 = \frac{6\varrho}{6\varrho^2 - B}\alpha_x^4 = \text{Const.} \times \alpha_x^4.$$

Durch einmalige Ueberschiebung dieser Gleichung über α_x folgt:

$$(a\alpha)^3 a_x^3 = 0,$$

d. h. f besitzt den Factor α_x vierfach.

Dann ist aber auch k das Biquadrat von α. Denn in der Gleichung

$$\alpha^4(k,\, \alpha) = (ab)^4 \alpha^4 \cdot a_x b_x^2 (a\alpha) = (a\alpha)\, a_x b_x^2 \left\{(a\alpha)\, b_x - (b\alpha)\, a_x\right\}^4$$

verschwindet wegen $(a\alpha)^3 a_x^3 = (b\alpha)^3 b_x^3 = 0$ die ganze rechte Seite und es ist sonach

$$(k,\, \alpha) = 0, \quad \text{also} \quad k = \text{Const.} \times \alpha^4.$$

Bilden wir daher die Covariante l, also die vierte Ueberschiebung von f über k, so ist diese vierte Ueberschiebung null, weil sowohl f als k den linearen Factor α_x vierfach besitzen. Es wäre demnach unter der Annahme $A_{ll} = 0$

$$(f,\, k)^4 = l = 0,$$

das ist aber gegen die Voraussetzung, und sonach muss $A_{ll} \gtrless 0$ sein.

287. *Schärfere Formulirung unserer Voraussetzungen.* Wir können nun unsere Bedingungen schärfer abgrenzen. Sind die drei quadratischen Formen einander proportional, so muss l, wegen $A_{ll} \gtrless 0$, zwei von einander verschiedene lineare Factoren besitzen, d. h. es muss sein:

$$m = \varrho \cdot l = \varrho \cdot \alpha \cdot \beta \quad \text{und} \quad n = \varrho^2 \cdot \alpha \cdot \beta,$$

wo α und β die beiden linearen Factoren sind. Es ist demnach

$$\begin{matrix} (l\alpha)^2 = 0, & (m\alpha)^2 = 0, & (n\alpha)^2 = 0 \\ (l\beta)^2 = 0, & (m\beta)^2 = 0, & (n\beta)^2 = 0. \end{matrix} \qquad (1)$$

Da aber:

$$m = \varrho \cdot \alpha \cdot \beta = (k, l)^2 = \varrho (k, \alpha\beta)^2$$

ist, so erhalten wir hieraus:

$$\left.\begin{matrix} ((k, \alpha\beta)^2, \alpha^2)^2 = (k, \alpha^3\beta)^4 = 0 \\ (k, \alpha\beta^3)^4 = 0 \end{matrix}\right\}. \qquad (2_a)$$

und ebenso:

Ebenso folgen aus diesen Gleichungen (1) für die Form Δ die beiden Relationen:

$$\left.\begin{matrix} (\Delta, \alpha^3\beta) = 0 \\ (\Delta, \alpha\beta^3) = 0 \end{matrix}\right\}, \qquad (2_b)$$

wie man erkennt, wenn man diese Ueberschiebungen mit $(\alpha\beta)^2$ multiplicirt, und alsdann $(\alpha\beta)^2 (k k_1)^2$ nach dem Identitätssatze entwickelt.

Nun sind die zweiten Ueberschiebungen von f über l und m lineare Functionen von k, Δ und l^2. Wenn wir daher $(f, l)^2$ und $(f, m)^2$ noch viermal über $\alpha^3 \cdot \beta$ schieben, so verschwinden die so entstehenden Invarianten, d. h. es ist:

$$\left.\begin{matrix} (f, \alpha^4\beta^2)^6 = 0 \\ (f, \alpha^2\beta^4)^6 = 0 \end{matrix}\right\}. \qquad (3)$$

In die Relationen (2_a) können wir noch die Symbole von f einführen. Es ist:

$$(k, \alpha^3\beta)^4 = (ab)^4 (a_x^2 b_x^2, \alpha_x^3 \beta_x)^4 = (ab)^4 (a\alpha)^2 (b\alpha)(b\beta) = \Theta.$$

Multipliciren wir diesen Ausdruck mit $(\alpha\beta)^4$, und wenden auf $(ab)^4 (\alpha\beta)^4$ den Identitätssatz an, so kommt:

$$0 = (ab)^4 (\alpha\beta)^4 (a\alpha)^2 (b\alpha)(b\beta) = (a\alpha)^2 (b\alpha)(b\beta) \{(a\alpha)(b\beta) - (b\alpha)(b\beta)\}^4.$$

Entwickelt man die rechte Seite nach dem binomischen Lehrsatz, so findet man, dass alle Glieder bis auf das erste wegen der Relationen (3) für sich allein verschwinden. Es muss sonach das erste Glied selbst null sein, d. h. wir haben statt der Relationen (1) die beiden folgenden:

$$\left.\begin{matrix} (a\alpha)^6 \cdot (a\alpha)(a\beta)^5 = 0 \\ (a\beta)^6 \cdot (a\beta)(a\alpha)^5 = 0 \end{matrix}\right\}, \qquad (4)$$

wobei die zweite aus der ersten durch Vertauschung von α mit β gewonnen wurde. Hiezu treten die beiden Relationen (3), welche wir schreiben können:

$$\left.\begin{matrix} (a\alpha)^4 (a\beta)^2 = 0 \\ (a\beta)^4 (a\alpha)^2 = 0 \end{matrix}\right\}. \qquad (5)$$

Die vier Gleichungen (4) und (5) müssen also zusammen bestehen, wenn $m = \varrho \cdot l = \varrho \cdot \alpha \cdot \beta$ und $n = \varrho^2 \cdot \alpha \cdot \beta$ ist.

Nun kann das erste Gleichungspaar (4) aus drei verschiedenen Ursachen verschwinden. Es kann sein

$$(a\alpha)^6 = 0, \quad (a\beta)(a\alpha)^5 = 0\,^{*)} \tag{1}$$
$$(a\alpha)^6 = 0, \quad (a\beta)^6 = 0 \tag{2}$$
$$(a\alpha)(a\beta)^5 = 0, \quad (a\beta)(a\alpha)^5 = 0. \tag{3}$$

Demnach spaltet sich der Fall

$$n = \varrho\, m = \varrho^2 l$$

in drei Gruppen, deren jede wir nun einzeln untersuchen wollen.

288. *Erste Gruppe von Bedingungen.* Es sei:

$$(a\alpha)^6 = 0, \tag{1}$$
$$(a\alpha)^5 (a\beta) = 0, \tag{2}$$

und hiezu

$$(a\alpha)^4 (a\beta)^2 = 0, \tag{3}$$
$$(a\beta)^4 (a\alpha)^2 = 0. \tag{4}$$

Sondert man von den ersten drei Bedingungen einen Moment den Factor $(a\alpha)^4$, ab, so sind die übrigbleibenden Factoren

$$(a\alpha)^2, \quad (a\alpha)(a\beta), \quad (a\beta)^2$$

die Coefficienten von α_x und β_x in der Entwicklung

$$(\alpha\beta)^2 a_x^2 = \{(a\beta)\,\alpha_x - (a\alpha)\,\beta_x\}^2.$$

Multiplicirt man demnach diese Relation wieder mit $(a\alpha)^4$, so kommt:

$$(a\alpha)^4 a_x^2 (\alpha\beta)^2 = (a\alpha)^4 (a\beta)^2 \alpha_x^2 - 2(a\alpha)^5 (a\alpha)\, a_x \beta_x + (a\alpha)^6 \beta_x^2 = 0.$$

Es ist daher:

$$(a\alpha)^4 a_x^2 = 0, \text{ d. h.}$$

„der Factor α_x ist ein cubischer Factor von f“.

Dieser Fall führt also zu dem nämlichen Resultaten wie der bereits vorhin behandelte:

$$l = \alpha r, \quad m = \alpha s, \quad n = \alpha t.$$

289. *Zweite Gruppe von Bedingungen.* Es möge ferner stattfinden:

$$\left.\begin{aligned} (a\alpha)^6 &= 0, & (a\beta)^6 &= 0 \\ (a\alpha)^4 (a\beta)^2 &= 0, & (a\beta)^4 (a\alpha)^2 &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{II}$$

Versucht man die Form f mit Hilfe der linearen Factoren α_x und β_x darzustellen, so erhält man aus der binomischen Entwicklung

---

*) Der Fall $(a\beta)^6 = 0$, $(a\alpha)(a\beta)^5 = 0$ ist nicht verschieden von (1); denn er entsteht durch Vertauschung von α mit β.

$$\{(\alpha\beta)a_x\}^6 = \{(a\beta)\alpha_x - (a\alpha)\beta_x\}^6$$

unter Anwendung der Relationen (II) das Resultat:

$$(\alpha\beta)^6 a_x^6 = -6(a\beta)(a\alpha)\alpha_x\beta_x\left\{(a\beta)^4\alpha_x^4 + \frac{10}{3}(a\beta)^2(a\alpha)^2\alpha_x^2\beta_x^2 + (a\alpha)^4\beta_x^4\right\},$$

d. h. die Form sechsten Grades zerfällt in das Product einer biquadratischen Form Ψ, multiplicirt in die Covariante $l = \alpha\beta$. Die Gleichung sechsten Grades kann also in diesem Falle durch Division mit der bekannten Covariante l auf eine biquadratische reducirt werden. Der biquadratische Factor steht aber noch in engerem Zusammenhange mit l. Untersucht man nämlich wie bisher auch die Ueberschiebungen von k über Potenzen von α und β, so zeigt sich, dass die vierte Ueberschiebung von k über $\alpha^3\beta$ und über $\beta^3\alpha$ verschwindet. Denn man erhält, wenn man um auf die Bedingungen zu gelangen,

$$(k\alpha)^3(k\beta) = 2(ab)^4(a\alpha)^2(b\alpha)(b\beta)$$

mit $(\alpha\beta)^4$ multiplicirt:

$$\begin{aligned}(ab)^4(\alpha\beta)^4(a\alpha)^2(b\alpha)(b\beta) &= (a\alpha)^2(b\alpha)(b\beta)\{(b\beta)(a\alpha) - (a\beta)(b\alpha)\}^4 \\ = (a\alpha)^6(b\alpha)(b\beta)^5 - 4(b\beta)^4(b\alpha)^2(a\alpha)^5(a\beta) &+ 6(a\alpha)^4(a\beta)^2(b\alpha)^3(b\beta)^3 \\ - 4(b\alpha)^4(b\beta)^2(a\alpha)^3(a\beta)^3 &+ (a\beta)^4(a\alpha)^2(b\alpha)^5(b\beta) = 0.\end{aligned}$$

Es ist also in der That

$$(k, \alpha^3\beta)^4 = 0 \quad \text{und ebenso} \quad (k, \beta^3\alpha)^4 = 0,$$

und deshalb auch [vgl. Nr. 287 (2_a) und (2_b)]

$$(\Delta, \alpha^3\beta)^4 = 0 \quad \text{und} \quad (\Delta, \beta^3\alpha)^4 = 0.$$

Will man also k oder Δ durch α und β darstellen, so verschwinden aus diesem Grunde die Coefficienten der ungeraden Potenzen von α_x und β_x, d. h. k sowohl als Δ werden dadurch in die Normalform transformirt. Demnach sind α und β gemäss der Theorie der biquadratischen Formen (vgl. Nr. 179) nichts anderes, als die linearen Factoren einer der drei irrationalen quadratischen Covarianten, in welche die Form t von k sich spalten lässt, d. h.

> „Die Form f ist das Product einer biquadratischen Form in einer ihrer irrationalen quadratischen Covarianten.“

290. *Dritte Gruppe von Bedingungen.* Ist endlich:

$$(a\alpha)(a\beta)^5 = 0, \quad (a\beta)(a\alpha)^5 = 0,$$
$$(a\alpha)^4(a\beta)^2 = 0, \quad (a\beta)^4(a\alpha)^2 = 0,$$

so reducirt sich

$$\{(\alpha\beta)\,a_x\}^6 = \{(\alpha\beta)\,\alpha_x - (a\alpha)\,\beta_x\}^6$$

auf die drei Glieder:

$$(\alpha\beta)^6\,a_x^6 = (a\beta)^6\,\alpha_x^6 - 20\,(\alpha\beta)^3\,(a\alpha)^3\,\alpha_x^3\,\beta_x^3 + (a\alpha)^6\,\beta_x^6,$$

d. h. $f = 0$ reducirt sich durch die Substitution $\alpha_x^3 = x_1$, $\beta_x^3 = x_2$ auf eine quadratische Gleichung. Untersucht man überdies die Ueberschiebungen von k über α und β, so findet sich, dass nicht nur

$$(k,\ \alpha^3\beta)^4 = 0 \quad \text{und} \quad (k,\ \alpha\beta^3)^4 = 0,$$

sondern auch, dass

$$(k\alpha)^4 = 0 \quad \text{und} \quad (k\beta)^4 = 0,$$

wovon man sich leicht auf dem nun schon öfters eingeschlagenen Wege überzeugen kann. Daraus geht aber hervor, dass k das Quadrat von l ist; denn in der binomischen Entwicklung

$$k_x^4\,(\alpha\beta)^4 = \{(k\beta)\,\alpha_x - (k\alpha)\,\beta_x\}^4$$

verschwinden alle Glieder bis auf das Glied $(k\alpha)^2\,(k\beta)^2\,\alpha_x^2\,\beta_x^2$.

291. *Zusammenfassung der Resultate.* Wir haben demnach folgende Sätze: Ist

$$m = \varrho \cdot l = \varrho \cdot \alpha \cdot \beta,$$

so ist

1) entweder α_x ein cubischer Factor von f, und α_x ergiebt sich rational nach der Methode für Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von f und l,
2) oder f zerfällt in eine biquadratische Form und die Covariante l, welche zugleich Factor der Form t von jener Form k ist,
3) oder endlich f lässt sich durch die Substitution

$$x_1 = \alpha_x^3, \quad x_2 = \beta_x^3$$

auf eine quadratische Gleichung reduciren.

292. *Zweiter Fall; dritte Unterabtheilung.* Die Resultante A_{rr} verschwindet endlich auch, wenn eine der quadratischen Formen l oder m null ist. Verschwindet l, so ist m a priori null, da ja $m = (k,\ l)^2$ ist. Man kann aber auch beweisen, dass, wenn $m = 0$, nothwendig auch l verschwinden muss. Nehmen wir nämlich an, l sei $\gtrless 0$, wenn $m = 0$, dann ist wegen

$$0 = (\Delta,\ m)^2 = \frac{B}{6}\,m + \frac{C}{3}\,l \text{ (vgl. Nr. 265, 2)},$$

$$\frac{C}{3}\,l = 0, \quad \text{also} \quad C = 0,$$

und demnach, da ja $A_{lm} = (l,\ m)^2 = 0 = \frac{2}{3}\,(B^2 + AC)$ auch $B = 0$.

Es ist aber

$$2C + \frac{AB}{3} = A_u$$

und somit verschwindet auch A_u.

Nun ist (vgl. Nr. 266, 5)

$$0 = (f, m)^2 = \frac{l^2}{2} + \frac{B}{3} k + \frac{A}{3} \varDelta,$$

also

$$0 = \frac{l^2}{2} + \frac{A}{3} \varDelta.$$

Schieben wir anderntheils $(f, m)^2$ zweimal über f, so erhalten wir

$$\begin{aligned}((f, m)^2, f)^2 &= \frac{1}{2} (l^2, f)^2 + \frac{A}{3} (\varDelta, f)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{\left(2\varDelta + \frac{A}{3} k\right) l - \frac{1}{3} A_u f\right\} + \frac{A}{3} \left\{\frac{lk}{2} + \frac{B}{6} f\right\} \\ &= l\varDelta + \frac{lkA}{3}.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist null, da $(f, m)^2$ verschwindet; da aber l nach Annahme von null verschieden sein soll, so ist

$$\varDelta + \frac{A}{3} k = 0.$$

Schieben wir diesen Ausdruck zweimal über k, so kommt

$$(\varDelta, k)^2 + \frac{A}{3} \varDelta = 0 = \frac{B}{6} f + \frac{A}{3} \varDelta.$$

Daher ist:

$$\frac{A}{3} \varDelta = 0.$$

Es müsste also auch wegen

$$\frac{l^2}{2} + \frac{A}{3} \varDelta = 0$$

$l^2 = 0$ sein, was gegen unsere Annahme ist.

Wenn also eine der drei quadratischen Formen verschwindet, so verschwinden auch die beiden andern.

Nehmen wir nun an

$$(1)\ l = 0, \quad (2)\ k \lesseqgtr 0.$$

Dann ist, wegen $(f, l)^2 = 2\varDelta + \frac{A}{3} k = 0$

$$\varDelta = \varrho \cdot k,$$

d. h. nach der Theorie der biquadratischen Formen: k ist entweder ein volles Quadrat, etwa

$$k = \alpha^2 \cdot \beta^2$$

oder auch k ist ein Biquadrat, etwa

$$k = \alpha^4.$$

Im ersten Falle, in welchem $(\alpha\beta) \lesseqgtr 0$, ist also nach Voraussetzung

$$l = (f, k)^4 = 0.$$

Weil aber nach Nr. 253 (1) in jedem Falle $(f, k)^3$ gleich null ist, so hat man auch:

$$(ak)^3 a_x^3 k_y = 0,$$

da die Elementarcovarianten rechts verschwinden. Ersetzen wir links k durch $\alpha^2\beta^2$, so erhalten wir

$$a_x^3 (a\alpha)(a\beta)\{\alpha_y (a\beta) + \beta_y (a\alpha)\} = 0.$$

Nun sind α und β von einander verschieden und da diese Relation für jeden Werth von y gilt, so müssen die Coefficienten von α_y und β_y einzeln verschwinden, d. h. es muss sein:

$$a_x^3 (a\alpha)(a\beta)^2 = 0$$
$$a_x^3 (a\alpha)^2 (a\beta) = 0.$$

Multipliciren wir die erste Gleichung mit α_x, die zweite mit $-\beta_x$ und addiren, so kommt:

$$a_x^3 (a\alpha)(a\beta)\{(a\beta)\alpha_x - (\alpha a)\beta_x\} = a_x^4 (a\alpha)(a\beta)(\alpha\beta) = 0,$$

also:

$$a_x^4 (a\alpha)(a\beta) = 0.$$

Versucht man daher a_x^6 vermittelst der Identität

$$a_x^6 (\alpha\beta)^6 = \{(\alpha\beta)\alpha_x - (a\alpha)\beta_x\}^6$$

darzustellen, so reducirt sich die binomische Entwicklung in diesem Falle auf

$$a_x^6 (\alpha\beta)^6 = (a\beta)^6 \alpha_x^6 - (a\alpha)^6 \beta_x^6,$$

d. h. „Die Form f reducirt sich auf eine binomische Gleichung, wenn

$$R = 0, \quad l = 0, \quad k = \alpha^2\beta^2.\text{“}$$

Ist aber neben $l = 0$ die Form k ein Biquadrat, also

$$k = \alpha^4, \tag{1}$$

dann ist immer noch:

$$(f, k)^3 = 0,$$

also wegen (1)

$$a_x^3 (a\alpha)^3 = 0,$$

d. h. „Die Form f besitzt den linearen Factor α vierfach.“

Umgekehrt: Besitzt f einen vierfachen linearen Factor α, so ist k ein Biquadrat und l identisch null. Denn es ist dann:

$$\begin{aligned} \alpha^4 (k\alpha) &= (ab)^4 \alpha^4 \cdot (a\alpha)\, \alpha_x\, \beta_x^2 \\ &= (a\alpha)\, a_x\, b_x^2 \left\{ (a\alpha)\, b_x - (b\alpha)\, a_x \right\}^4 \\ &= 0, \quad \text{wegen } a_x^3 (a\alpha)^3 = 0. \end{aligned}$$

Also: $$(k,\ \alpha) = 0, \quad \text{d. h. } k = \alpha_x^4.$$

Deshalb ist aber auch $(f,\ k)^4 = 0$, d. h. $l = 0$, wie behauptet wurde.

Anmerkung. Ist k identisch null, dann ist f entweder eine Octaederform und kann nach der in Nr. 195 gegebenen Methode aufgelöst werden, oder f besitzt einen linearen Factor α_x mindestens fünffach [vgl. § 19, über die Formen, für welche $(f,\ f)^4 = 0$].

293. *Dritter Fall*: $A = 0,\ C = 0$. Wir wollen endlich noch zwei Fälle erwähnen, in welchen die Invariantenrelationen zwar nicht auf algebraisch, so doch mit Hilfe elliptischer Functionen lösbare Gleichungen herführen. (Vgl. Clebsch § 114 der „Binären Formen".) Bildet man nämlich das Formensystem der Modulargleichung (Jacobi, „Fundamenta", S. 27) mit dem einen Parameter u:

$$v^6 + 4u^5v^5 + 5u^2v^4 - 5u^4v^2 - 4uv - u^6 = 0 \tag{1}$$

für die Transformation fünfter Ordnung*), so zeigt sich, dass die Invarianten A und C identisch verschwinden. Umgekehrt hat dann Clebsch (a. a. O.) gezeigt, dass $f = a_x^6$ sich durch eine lineare Transformation in die Form

$$\varphi = \xi^6 + 5\xi^4\eta^2 + 15\xi^2\eta^4 - 4Z\xi\eta^5 - 5\eta^6 \tag{2}$$

mit dem einen Parameter Z, welche aus (1) durch die Substitution

$$v = u\,\frac{\frac{\xi}{\eta} + u^4}{1 - u^4\,\frac{\xi}{\eta}}$$

hervorgeht, stets überführen lässt, sobald ihre Invarianten A und C verschwinden. In diesem Falle besitzen die beiden quadratischen Covarianten l und μ einen gemeinsamen Factor und

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{l\sqrt{-BD}}{2\mu}$$

ist die erwähnte lineare Transformation der Form f in φ.

---

*) Zur Erklärung möge hier beigefügt werden: Ist k der Modul des elliptischen Integrals $\int^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, λ der Modul des neuen Integrals, das aus ihm durch eine Transformation fünfter Ordnung hervorgeht, dann besteht zwischen $\sqrt[4]{k} = u$ und $\sqrt[4]{\lambda} = v$ die Gleichung (1).

294. *Vierter Fall*: $B = \frac{7}{50} A^2$, $C = -\frac{9}{500} A^3$. Eine zweite Gleichungsgattung mit einem einzigen Parameter repräsentirt die Multiplicatorgleichung von Brioschi:

$$z^6 - 4z^5 + 256 k^2 k'^2 (z + 1) = 0, \quad (k'^2 = 1 - k^2), \tag{3}$$

auf welche die Frage nach dem Multiplicator M führt, vermöge welchem die Beziehung besteht:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - \lambda^2 y^2)}} = \frac{1}{M} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2)}}.$$

Dieser Multiplicator M hängt mit v in (1) durch die Gleichung

$$M = \frac{v(1 - uv^3)}{v - u^5}$$

und mit z in (3) durch

$$M = \frac{1}{z + 1}$$

zusammen. Setzt man in (3) $z = \lambda \cdot \frac{\xi}{\eta}$, so kann man sie nach Clebsch in der Form schreiben:

$$a_0 \xi^6 + 6 a_1 \xi^5 \eta + 6 a_5 \xi \eta^5 + a_6 \eta^6 = 0, \tag{4}$$

wobei

$$a_0 = \varrho \cdot \lambda^6, \quad a_1 = -\frac{2}{3} \varrho \lambda^5,$$

$$a_5 = \frac{128}{3} \varrho \cdot \lambda k^2 k'^2, \quad a_6 = 256 \varrho \cdot k^2 k'^2$$

und

$$a_0 a_6 + 9 a_1 a_5 = 0.$$

Für diese Gleichung (4) findet man nun durch directe Rechnung die beiden sie charakterisirenden Invarianteneigenschaften:

$$B = \frac{7}{50} A^2, \quad C = -\frac{9}{500} A^3,$$

und umgekehrt sind dieselben genügend, um die allgemeine Form f durch die aus

$$-8 (a_1^3 a_6^2 + a_0^2 a_5^3) \xi \cdot \eta = m - \frac{A}{10} l$$

sich ergebende Transformation in die Form (4) überzuführen.

Anmerkung 1. Die Modulargleichung (1) wurde von Hermite zur Auflösung der Gleichung fünften Grades benutzt. Er fand, dass diese Gleichung sechsten Grades eine Resolvente fünften Grades besitzt, für welche $C = 0$ ist, die sich also in die Form bringen lässt:

$$t^5 - t - \frac{1}{5\sqrt[4]{z}} = 0.$$

Brioschi dagegen ging von der Multiplicatorgleichung (3) aus und kam von dieser auf dieselbe Resolvente wie Hermite. (Vgl. die diesbezüglichen interessanten historischen Entwicklungen in: Klein, „Vorlesungen über das Ikosaeder“, insbesondere § 3, S. 144.)

Anmerkung 2. Ich erwähne hier noch der Vollständigkeit halber die beiden Brill'schen Normalformen der Gleichung sechsten Grades

$$x^6 + 2px^5 + 3qx^4 + 4rx^3 + 3x^2 + 2px + q = 0$$

$$x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + 1 = 0,$$

in welche sich jede Gleichung sechsten Grades nach Adjunction einer Wurzel einer Gleichung fünften Grades (vgl. Nr. 273—276) linear transformiren lässt. Die Discriminante dieser Gleichungen zerfällt in zwei rationale Factoren (vgl. Math. Annalen, Bd. XX, S. 330).

§ 31. Simultanes System einer quadratischen und cubischen Form.

295. *Allgemeine Betrachtungen.* Die simultanen Systeme mehrerer binärer Formen spielen in vielen Problemen der Mathematik eine hervorragende Rolle. Ich erinnere nur an die Lösung der Gleichung neunten Grades, welcher die neun Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung genügen, an die Dreitheilung elliptischer und hyperelliptischer Functionen, an die Reduction elliptischer Integrale erster Gattung auf die Normalform, an die Theorie rationaler Curven, an die Untersuchungen über apolare und involutorische Systeme etc. Es erscheint daher angezeigt, an Beispielen zu zeigen, in welcher Weise derartige Systeme aufgestellt werden. Die einfachsten und sofort allgemein zu behandelnden derartigen Systeme sind simultane Systeme von n linearen Formen, die aus den n Formen selbst und den $\frac{n(n-1)}{2}$ Determinanten (ab) bestehen; ferner das simultane System von n quadratischen Formen, das wir bereits früher aufgestellt haben. Es bietet auch wenig Schwierigkeiten, die Formen des vollständigen Systemes zu ermitteln, das entsteht, wenn ein bereits bekanntes volles System mit dem vollen System von n linearen oder n quadratischen Formen überschoben werden soll. Dagegen werden die Untersuchungen bereits complicirter, sobald es sich auch nur um das simultane System von zwei Formen handelt, von denen keine quadratisch oder linear ist. Wir werden demnach im Folgenden zwei Beispiele ins Auge fassen; in dem ersten wird eine der Grundformen eine quadratische Form sein, die andere cubisch; im zweiten werden beide Formen den dritten Grad besitzen. Wir wenden uns nun dazu, das simultane System einer quadratischen und cubischen Form zu studiren.

296. *Disposition der Aufgabe.* Die beiden gegebenen Formen seien

$$f = a_x^2, \quad \varphi = \alpha_x^3;$$

das volle System von f besteht aus den zwei Formen

$$f, \quad A_{ff},$$

das von φ aus den vier Formen

$$\varphi, \quad \Delta, \quad Q, \quad R = A_{\Delta\Delta}. \qquad (2)$$

Durch Ueberschiebung vollständiger Systeme entstehen wieder vollständige Systeme. Das volle simultane System von f und φ erhalten wir also, wenn wir Producte

$$U = f^\varrho \cdot A_{ff}^\sigma$$

mit Producten

$$V = \varphi^\varkappa \cdot \Delta^\lambda \cdot Q^\mu \cdot A_{\Delta\Delta}^\nu$$

überschieben, d. h. mit einander multipliciren und auf alle möglichen Arten zur Faltung bringen. Da bei der Faltung Invarianten nicht betheiligt sind, und da ferner Q Functionaldeterminante von φ und Δ ist, so können wir in diesen Producten von Factoren A_{ff} und $A_{\Delta\Delta}$ absehen und höhere Potenzen von Q nach der Relation

$$Q^2 = -\frac{1}{2}\{\Delta^3 + A_{\Delta\Delta}\varphi^2\}$$

durch φ und Δ ersetzt denken. Unsere Aufgabe reducirt sich daher darauf:

> „Alle jene nicht zerfallenden Formen zu finden, die aus den Faltungen
>
> $$(U, V)^\alpha = (f^\varrho, \varphi^\varkappa \cdot \Delta^\lambda \cdot Q)^\alpha$$
>
> hervorgehen, wenn ϱ, $\varkappa$, λ, α alle möglichen Werthe annehmen."

Wir gehen hiebei, wie früher, schrittweise vor, indem wir zunächst solche Producte V mit f^ϱ falten, die nur eine Form φ^μ, oder Δ^μ, oder Q enthalten. Erst in zweiter Linie werden Faltungen mit Producten V untersucht, die mehr als eine der drei Formen zu Factoren haben.

297. *Erste Gruppe von Ueberschiebungen.* Wir haben demnach zunächst zu untersuchen: Zu welchen Formen geben die Ueberschiebungen

$$(f^\varrho, \Delta^\mu)^\alpha, \quad (f^\varrho, \varphi^\mu)^\alpha, \quad (f^\varrho, Q)^\alpha$$

Veranlassung? Aus dem ersten Operationsymbol ergeben sich nur zwei Formen:

$$(f, \Delta) \quad \text{und} \quad (f, \Delta)^2 = A_{f\Delta},$$

wie aus der Theorie zweier quadratischer Formen bekannt ist. Das zweite Operationssymbol führt zunächst zu folgenden sechs Formen:

$$(f, \varphi), \quad (f, \varphi)^2, \quad (f^2, \varphi)^3, \quad (f^2, \varphi^2)^4, \quad (f^3, \varphi^2)^5, \quad (f^3, \varphi^2)^6.$$

Von diesen sind aber die vierte und fünfte Form reducibel. Denn

$(f^2, \varphi^2)^4$ enthält das zerfallende Glied $(f, \varphi)^2 \cdot (f, \varphi)^2$

und

$(f^3, \varphi^2)^5$ „ „ „ „ $(f, \varphi)^2 \cdot (f^2, \varphi)^3$.

Die vier anderen Formen weisen dagegen keine zerfallenden Glieder auf. Höhere Potenzen von f und φ brauchen nicht mehr überschoben zu werden. Denn jede solche Ueberschiebung $(f^\varrho, \varphi^\mu)^\alpha$ würde a priori ein Glied besitzen, welches zerfällt, nämlich das Glied

$$(f^3, \varphi^2)^6 \cdot (f^{\varrho-3}, \varphi^{\mu-2})^{\alpha-6}.$$

Das dritte Operationssymbol endlich liefert überhaupt nur drei Formen

$$(Q, f), \quad (Q, f)^2, \quad (Q, f^2)^3,$$

von denen die erste als Functionaldeterminante einer Functionaldeterminante reducibel ist, während die beiden anderen Formen in das System aufgenommen werden müssen.

298. *Zweite Gruppe von Ueberschiebungen.* Wir überschieben nun Producte V über f^ϱ von der Form

$$V = \Delta\varphi, \quad \Delta Q, \quad \Delta\varphi Q, \quad \varphi Q.$$

Allein da die drei ersten Producte den Factor Δ besitzen, so wird jede der Ueberschiebungen

$$(f^\varrho, \Delta\varphi)^\alpha, \quad (f^\varrho, \Delta Q)^\alpha, \quad (f^\varrho, \Delta\varphi Q)^\alpha$$

ein Glied enthalten, welches eine Potenz von $A_{f\Delta}$ zum Factor hat, also zerfällt. Es erübrigt daher nur noch, die Ueberschiebungen

$$(f^\varrho, \varphi Q)^\alpha$$

zu untersuchen. Hiebei muss α a priori grösser als 3 und demnach ϱ mindestens gleich 2 sein. Wir haben somit zunächst die drei Formen:

$$(f^2, \varphi Q)^4, \quad (f^3, \varphi Q)^5, \quad (f^3, \varphi Q)^6.$$

Nur die letzte derselben, eine Invariante, enthält kein zerfallendes Glied; die erste dagegen enthält das Glied $(f, \varphi)^2 \cdot (f, Q)^2$, die zweite das Glied $(f, \varphi)^2 \cdot (f^2, Q)^3$. Weitere Ueberschiebungen zu untersuchen ist überflüssig; sie besitzen stets Glieder, welche die Invariante $(f^3, \varphi Q)^6$ zum Factor haben.

299. *Zusammenfassung der Resultate.* Das simultane vollständige System von f und φ besteht demnach aus folgenden 15 Formen:

Drei cubische Covarianten: $\varphi,\ Q,\ (f,\ \varphi) = \vartheta$

Drei quadratische „ $f,\ \Delta,\ (f,\ \Delta) = \Theta$

Vier lineare „ $(f,\ \varphi)^2,\ (f^2,\ \varphi)^3,\ (f,\ Q)^2,\ (f^2,\ Q)^3$

Fünf Invarianten: $A_{ff},\ A_{\Delta\Delta},\ A_{f\Delta},\ (f^3,\ \varphi^2)^6,\ (f^3,\ \varphi\cdot Q)^6.$

Zwischen den fünf Invarianten muss eine Relation bestehen. Denn die beiden Formen f und φ besitzen nur sieben Constante, von denen drei durch lineare Transformation zum Verschwinden gebracht werden können: demnach können nur vier von einander unabhängig sein.

300. *Einführung einfacherer Symbole für die Formen des Systemes.* Für die symbolische Rechnung ist es wiederum vortheilhaft, jene Formen des Systemes, die noch nicht durch ein einfaches symbolisches Product dargestellt sind, durch eines ihrer Glieder zu ersetzen. Solche Formen sind die beiden linearen Covarianten $(f,\ Q)^2$ und $(f^2,\ Q)^3$ und die beiden Invarianten $(f^3,\ \varphi^2)^6$, $(f^3,\ \varphi\cdot Q)^6$. Setzen wir nämlich

$$(f,\ \varphi)^2 = (a\alpha)^2\alpha_x = p$$
$$(f^2,\ \varphi)^3 = (a\alpha)^2(b\alpha)\,b_x = q = (f,\ p),$$

so lassen sich an Stelle der beiden andern linearen Covarianten $(f,\ Q)^2$ und $(f^2,\ Q)^3$ die Formen:

$$(p,\ \Delta) = (p\Delta)\,\Delta_x = r \tag{1}$$

resp.:

$$(\Theta,\ p) = (\Theta p)\,\Theta_x = s \tag{2}$$

und an Stelle der beiden erwähnten Invarianten die Formen

$$(f,\ p^2)^2 = (ap)^2 = F \tag{3}$$

resp.

$$(\Theta,\ p)^2 = (sp) = -M \tag{4}$$

einführen.

Denn es ist:

$$(f,\ Q)^2 = (a_x^2,\ (\alpha\Delta)\,\Delta_x\,\alpha_x^2)^2$$

und $(\alpha\Delta)(a\alpha)^2\Delta_x = (p,\ \Delta) = r$ ist ein Glied dieser Ueberschiebung. Es ist ferner:

$$(f^2,\ Q)^3 = (a_x^2 b_x^2,\ (\alpha\Delta)\,\Delta_x\,\alpha_x^2)^3.$$

Greifen wir auch hier das Glied heraus, das durch Faltung der Factoren a_x^2 mit α_x^2, b_x mit Δ_x entsteht, so können wir dasselbe durch:

$$(a\alpha)^2(\alpha\Delta)(b\Delta)\,b_x = (p\Delta)(b\Delta)\,b_x$$

darstellen. Das symbolische Product $(p\Delta)(b\Delta)\,b_x$ ist aber ein Glied der Ueberschiebung $(p,\ (b\Delta)\,b_x\,\Delta_x) = (p,\ \Theta)$, und demnach lässt sich in der That $(f^2,\ \Theta)^3$ durch $(\Theta,\ p) = -(p,\ \Theta)$ ersetzen.

Des weitern besitzt die Invariante $(f^3, \varphi^2)^6$ das Glied

$$(a\alpha)^2 (b\beta)^2 (c\alpha)(c\beta) = (f, p^2)^2 = (ap)^2 = F$$

und endlich die Invariante $(f^3, \varphi \cdot Q)^6 = (a_x^2 b_x^2 c_x^2, \alpha_x^3 \cdot (\beta\Delta)\Delta_x \beta_x^2)^6$ das Glied:

$$(\beta\Delta)\cdot(a\alpha)^2(b\alpha)\cdot(b\Delta)(c\beta)^2 = -((b\Delta)b_x \Delta_x, p^2)^2 = -(\Theta, p)^2.$$

Die Tabelle des simultanen Formensystemes wird demnach nach Einführung dieser neuen Symbole:

1) $\varphi = \alpha_x^3$, $\quad Q = (\alpha\Delta)\alpha_x^2\Delta_x$, $\quad \vartheta = (a\alpha)a_x\alpha_x^2$;

2) $f = a_x^2$, $\quad \Delta = (\alpha\beta)^2\alpha_x\beta_x$, $\quad \Theta = (a\Delta)a_x\Delta_x$;

3) $p = (a\alpha)^2\alpha_x$, $\quad q = (ap)a_x$, $\quad r = (p\Delta)\Delta_x$,
$\quad s = (\Theta p)\Theta_x$;

4) $A_{ff} = (ab)^2$, $\quad A_{\Delta\Delta} = (\Delta\Delta_1)^2$, $\quad A_{f\Delta} = (a\Delta)^2$,
$\quad F = (ap)^2$, $\quad M = -(\Theta p)^2$.

Die Ueberschiebungen dieser Formen geben zu zahlreichen Relationen Veranlassung, welche bei den verschiedenen Aufgaben, in denen gerade dieses simultane System eine Rolle spielt, von Wichtigkeit werden. Wir gelangen zu diesen Relationen einmal, indem wir frühere allgemeine Theorien über simultane Systeme oder Functionaldeterminanten benutzen, dann durch directes Ueberschieben, insbesondere der quadratischen über die linearen Formen, und der linearen unter sich, endlich aber auch, indem wir versuchen, ein und dieselbe Form auf mehrere Arten darzustellen. Jedem dieser drei Wege entsprechend, wollen wir nun eine Reihe von Relationen ermitteln.

301. *Erste Reihe von Relationen.* Das simultane System von f und Δ, welches aus den sechs Formen

$$f,\quad \Delta,\quad \Theta,\quad A_{ff},\quad A_{\Delta\Delta},\quad A_{f\Delta}$$

besteht, liefert sofort eine Reihe von Relationen, die wir schon in der Theorie simultaner quadratischer Formen aufgestellt haben. Wir erhielten damals (vgl. Nr. 127):

$$\left.\begin{aligned} 2A_{\Theta\Theta} &= A_{ff}A_{\Delta\Delta} - A_{f\Delta}^2 \\ A_{f\Theta} &= 0, \quad A_{\Delta\Theta} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned} &(1) & 2(\Theta, f) &= A_{ff}\Delta - A_{f\Delta}f \\ &(2) & 2(\Delta, \Theta) &= A_{\Delta\Delta}f - A_{f\Delta}\Delta \\ &(3) & -2\Theta^2 &= A_{ff}\Delta^2 - 2A_{f\Delta}f\Delta + A_{\Delta\Delta}f^2 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II)}$$

Die letzte dieser Relationen liefert sofort die in Nr. 299 erwähnte Invarianten-Beziehung; denn ersetzen wir in ihr x durch p und setzen einstweilen

$$(\Delta p)^2 = L,$$

so kommt:

$$-2M^2 = A_{ff}L^2 - 2A_{f\Delta}F\cdot L + A_{\Delta\Delta}F^2. \tag{III}$$

Wie wir hier das Quadrat der beiden schiefen Formen Θ und M durch gerade Formen dargestellt haben, so können wir auch die Quadrate der drei anderen schiefen Formen, q, r, s des Systemes durch gerade Formen darstellen. Man findet nämlich in einfacher Weise

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & q^2 = f\cdot F - \frac{1}{2}p^2 A_{ff} \\ (2) & r^2 = \Delta\cdot L - \frac{1}{2}p^2 A_{\Delta\Delta} \\ (3) & -s^2 = \Theta\cdot M + \frac{1}{2}p^2 A_{\Theta\Theta} \end{array}\right\}, \tag{IV}$$

indem man entweder die früher aufgestellten Sätze über Functionaldeterminanten zu Grunde legt, oder noch kürzer, indem man Identitäten wie $p_x(ab) = a_x(bp) - b_x(ap)$ und die beiden analogen quadrirt.

302. *Zweite Reihe von Relationen.* Wir können ferner Formenbeziehungen aufstellen durch directe Ueberschiebung der Formen p, q, r, s unter sich oder über die Formen f, Δ, Θ. Sie sind durchwegs leicht zu berechnen, und wir können uns daher auf solche Beispiele beschränken, die wir später bei der typischen Darstellung von f und φ verwenden werden. Das sind zunächst die Ueberschiebungen von f über die linearen Covarianten. Man findet:

$$\left.\begin{array}{l} (f,\ p) = \quad q \quad \text{(vgl. Nr. 300)} \\ (f,\ q) = -\frac{1}{2}A_{ff}p \\ (f,\ r) = -s + \frac{1}{2}A_{f\Delta}p\text{*)} \\ (f,\ s) = +\frac{1}{2}\left\{A_{f\Delta}q + A_{ff}r\right\} \end{array}\right\}. \tag{V}$$

Zur Verification der drei letzten Relationen dieser Gruppe mögen die Entwicklungen dienen:

$$(f,\ q) = (f,\ (f,\ p)) = (ab)(bp)a_x = \frac{1}{2}(ab)\{(bp)a_x - (ap)b_x\}$$
$$= -\frac{1}{2}(ab)^2\cdot p$$

$$(f,\ r) = (f, (p, \Delta)) = (p\Delta)(a\Delta)a_x;\ (a\Delta)a_x\Delta_y = \Theta_x\Theta_y + \frac{1}{2}A_{f\Delta}(xy)$$

[vgl. Nr. 125 (2)]

$$(f,\ s) = ((f, (\Theta, p)) = (\Theta p)(a\Theta)a_x = -((\Theta, f), p) = -\frac{1}{2}(A_{ff}\Delta - A_{f\Delta}f, p).$$

*) In Clebsch, „Binäre Formen“ ist $(f,\ r) = +s$.

Wir fügen hinzu:

$$\left.\begin{aligned}
(qp) &= ((f, p), p) = (ap)^2 = F \\
(rp) &= -((\varDelta, p), p) = -(\varDelta p)^2 = -L \\
(sp) &= ((\Theta, p), p) = (\Theta p)^2 = -M \\
(qr) &= ((f, p), (p, \varDelta)) = (-(f, \varDelta), p^2)^2 = -(\Theta p)^2 = +M \\
(qs) &= ((f, p), (\Theta, p)) = ((f, \Theta), p^2)^2 = -\frac{1}{2}\left\{A_{ff}L - A_{f\varDelta}F\right\} \\
(rs) &= ((\varDelta, p), (\Theta, p)) = ((\varDelta, \Theta), p^2)^2 = -\frac{1}{2}\left\{A_{f\varDelta}L - A_{\varDelta\varDelta}F\right\}
\end{aligned}\right\} . \quad \text{(VI)}$$

Mit Hilfe dieser beiden Gruppen (V) und (VI) von Relationen lassen sich nun auch sofort die Werthe jener Invarianten anschreiben, welche entstehen, wenn wir die Form f zweimal über irgend ein Product zweier linearer Covarianten schieben. Man findet unmittelbar:

$$\left.\begin{aligned}
(f, pq)^2 &= (q, q) = 0 \\
(f, pr)^2 &= (q, r) = +M \\
(f, ps)^2 &= (q, s) = -\frac{1}{2}\left\{A_{ff}L - A_{f\varDelta}F\right\} \\
(f, qr)^2 &= -\frac{1}{2}A_{ff}(p, r) = -\frac{1}{2}A_{ff}L \\
(f, qs)^2 &= -\frac{1}{2}A_{ff}(p, s) = -\frac{1}{2}A_{ff}M \\
(f, rs)^2 &= \left(-s + \frac{1}{2}A_{f\varDelta}p, s\right) = \frac{1}{2}A_{f\varDelta}M
\end{aligned}\right\} . \quad \text{(VII)}$$

303. *Dritte Reihe von Relationen.* Die dritte Reihe von Relationen hat ihren Ursprung in der Fundamentalrelation dieses simultanen Systemes

$$\Theta = (f, \varDelta) = (\varphi, p). \quad \text{(VIII)}$$

Wir beweisen dieselbe, indem wir die Form

$$\Theta = (a\varDelta)\, a_x \varDelta_x = (\alpha\beta)^2 (a\alpha)\, a_x \beta_x$$

mit Hilfe des Identitätssatzes umformen. Man hat nämlich

$$\begin{aligned}
\Theta = (\alpha\beta)^2 (a\alpha)\, a_x \beta_x &= (a\alpha)(\alpha\beta)\beta_x \left\{\alpha_x (a\beta) - \beta_x (a\alpha)\right\} \\
&= (a\alpha)(a\beta)(\alpha\beta)\alpha_x\beta_x - (a\alpha)^2(\alpha\beta)\beta_x^2 \\
&= -(a\alpha)^2(\alpha\beta)\beta_x^2,
\end{aligned}$$

da das erste Glied rechts identisch verschwindet. Führen wir aber in $(a\alpha)^2(\alpha\beta)\beta_x$ das Symbol $p_x = (a\alpha)^2\alpha_x$ ein, so kommt:

$$\Theta = -(p\beta)\beta_x^2 = (\varphi, p).$$

Aus dieser fundamentalen Relation (VIII) gehen insbesondere folgende wichtige Beziehungen hervor:

$$\left.\begin{aligned}
s &= (\Theta, p) = ((\varphi, p), p) = (\varphi, p)^2 = (\alpha p)^2 \alpha_x \\
M &= -(s, p) = -((\varphi, p)^2, p) = -(\alpha p)^3 \\
-r &= (\varDelta p)\varDelta_x = (\alpha\beta)^2(\beta p)\alpha_x^2 = (\alpha_x^3, (\beta p)\beta_x)^2 = (\varphi, \Theta)^2 \\
L &= (\varDelta p)^2 = (\alpha\beta)^2(\alpha p)(\beta p) = ((\alpha p)\alpha_x^2, (\beta p)\beta_x^2) = A_{\Theta\Theta} \\
&= \frac{1}{2}\left\{A_{ff}A_{\varDelta\varDelta} - A_{f\varDelta}^2\right\} \\
(\Theta, f) &= p^2 + (\varphi, q)
\end{aligned}\right\} \quad \text{(IX)}$$

Was die letzte dieser Relationen betrifft, so ergiebt sich ihre Richtigkeit aus folgender Entwicklung. Es ist

$$\begin{aligned}
(\Theta, f) &= ((\varphi, p), f) = ((\alpha p)\alpha_x, a_x^2) = (\alpha p)(\alpha a)\alpha_x a_x \\
&= (\alpha a)\alpha_x\{\alpha_x(ap) + p_x(\alpha a)\} \\
&= (\alpha q)\alpha_x^2 + p_x^2 = (\varphi, q) + p^2.
\end{aligned}$$

Wir wollen damit die Untersuchungen über die Covariantenbeziehungen des simultanen Systemes von f und φ beschliessen und nun zu einigen Anwendungen übergehen.

304. *Typische Darstellung.* Die beiden Formen f und φ lassen sich mit Hilfe zweier ihrer vier simultanen linearen Invarianten typisch darstellen. Gehen wir zu dem Zwecke wiederum von Identitäten wie

$$(pq)^2 a_x^2 = \{(aq)p_x - (ap)q_x\}^2$$
$$(pq)^3 \alpha_x^3 = \{(\alpha q)p_x - (\alpha p)q_x\}^3$$

aus, so ergeben sich für die erste derselben die Werthe der typischen Coefficienten unmittelbar aus den Relationen in Nr. 302. Man hat beispielsweise:

$$\begin{aligned}
F^2 \cdot f &= (aq)^2 \cdot p_x^2 - 2(ap)(aq)p_x q_x + (ap)^2 q_x^2 \\
&= (f, q)^2 \cdot p_x^2 - 2(f, pq)p_x q_x + (f, p)^2 \cdot q_x^2 \\
&= \frac{1}{2} A_{ff} F \cdot p_x^2 + F \cdot q_x^2
\end{aligned}$$

oder

$$F \cdot f = \frac{1}{2} A_{ff} p_x + q_x^2,$$

ein Resultat, das wir auch schon an anderer Stelle (Nr. 301, IV) ermittelt haben.

Die typischen Coefficienten für die zweite Identität

$$-F^3 \cdot \varphi = (\alpha q)^3 p_x^3 - 3(\alpha q)^2(\alpha p)p_x^2 q_x + 3(\alpha q)(\alpha p)^2 p_x q_x^2 - (\alpha p)^3 q_x^3$$

berechnet man mit Hilfe der in Nr. 303 entwickelten Relationen:

$$\Theta = (\varphi, p) = (\alpha p)\alpha_x^2$$
$$s = (\varphi, p)^2 = (\alpha p)^2 \alpha_x.$$

Aus diesen ergiebt sich sofort:

$$(\alpha p)^3 \quad = (sp) = - M$$

$$(\alpha p)^2 (\alpha q) = (s q) = \frac{1}{2} \{ A_{ff} L - A_{f\varDelta} F \}$$

$$(\alpha p)(\alpha q)^2 = (\Theta, q^2)^2 = \left(\Theta, F \cdot f - \frac{1}{2} A_{ff} p^2\right)^2 = - \frac{1}{2} A_{ff} (\Theta p)^2 = \frac{M}{2} \cdot A_{ff}$$

$$(\alpha q)^3 \quad = ((\alpha q)\, \alpha_x^2,\, q^2)^2 = \left((\alpha q)\, \alpha_x^2,\, Ff - \frac{1}{2} A_{ff} p^2\right)^2$$

$$= F \cdot (\alpha q)(\alpha a)^2 - \frac{1}{2} A_{ff} \cdot (\alpha q)(\alpha p)^2 = F \cdot (pq) - \frac{1}{2} A_{ff} (sq).$$

In ebenso einfacher Weise würden sich die typischen Coefficienten berechnen lassen, wenn wir f und φ durch irgend zwei andere lineare Covarianten hätten darstellen wollen.

305. *Ausnahmefälle für typische Darstellung.* Die typische Darstellung wird unmöglich, sobald die beiden Invarianten

$$F = (ap)^2$$
$$L = (\varDelta p)^2$$

gleichzeitig identisch verschwinden; denn in diesem Falle verschwinden auch alle Invarianten

$$(pq), \quad (pr), \quad (ps), \quad (qr), \quad (qs), \quad (rs),$$

wie ein Blick auf die Relationen (VI) Nr. 302 lehrt, und demnach sind die vier linearen Covarianten nicht mehr von einander unabhängig.

Das Verschwinden von F und L sagt aber nichts anderes aus, als dass f und $\varDelta$ den gemeinsamen Factor p besitzen. In diesem Falle muss aber φ den linearen Factor p quadratisch enthalten. Denn multipliciren wir

$$(ap)\, \varDelta_x - (\varDelta p)\, a_x = (a \varDelta)\, p_x \tag{1}$$

mit

$$a_y \varDelta_x + \varDelta_y a_x = 2\, (a_x \varDelta_x)_y, \tag{2}$$

so kommt:

$$((ap)\, \varDelta_x - (\varDelta p)\, a_x)\, (a_y \varDelta_x + \varDelta_y a_x) = 2\, ((a \varDelta)\, a_x \varDelta_x)_y\, p_x.$$

Ersetzen wir aber hierin y durch p, so erhalten wir

$$(ap)^2 \varDelta_x^2 - (\varDelta p)^2 a_x^2 = 2 p_x (\Theta, p).$$

Die linke Seite ist null wegen $F = L = 0$; also ist auch

$$(\Theta, p) = (\alpha p)^2 \alpha_x = 0,$$

d. h. φ besitzt den Factor p im zweiten Grade.

Ebenso findet man umgekehrt, dass, wenn φ einen linearen Factor von f quadratisch besitzt, F und L verschwinden müssen und sonach p, q, r, s einander proportional sind.

F und L verschwinden auch, wenn $\varDelta$ proportional f ist, also wenn $\Theta = 0$; dann kann aber überhaupt nicht mehr von einem simultanen System von f und φ die Rede sein.

306. *Resultante von f und φ.* Um die Resultante von f und φ aufzustellen, benutzen wir die nämlichen Principien, wie wir sie beim Aufsuchen der Discriminanten der Form fünfter und sechster Ordnung verwendeten. Es möge λ der gemeinsame Factor von f und φ sein. Diesen Factor besitzt alsdann insbesondere auch die erste Ueberschiebung von φ über λ. Sei μ der zweite lineare Factor von f, ν der zweite von (φ, λ), so können wir unsere Bedingungen formuliren:

$$a_x^2 = \lambda\mu, \quad \alpha_x^2(\alpha\lambda) = \lambda\nu.$$

Versuchen wir auf Grund dieser Annahmen die Invarianten des Systemes zu berechnen, so wird sich zwischen denselben eine Relation ergeben, die gemäss der Voraussetzung und nach dem Grade in den Coefficienten nur die Resultante von f und φ sein kann.

Wir berechnen zunächst die Invariante $F = (ap)^2$. Die Form p war dargestellt durch:

$$p = (\alpha a)^2\alpha_x, \quad \text{oder weil} \quad a_x^2 = \lambda\mu,$$

$$p = (\alpha\lambda)(\alpha\mu)\alpha_x = ((\alpha\lambda)\alpha_x^2, \mu) = (\lambda\nu, \mu).$$

Nun ist:

$$(\lambda\nu, \mu) = \frac{1}{2}\nu(\lambda\mu) + \frac{1}{2}\lambda(\nu\mu).$$

Da aber

$$\nu(\lambda\mu) = (\nu\mu)\lambda + (\lambda\nu)\mu,$$

so kommt:

$$(\lambda\nu, \mu) = \lambda(\nu\mu) + \frac{1}{2}\mu(\lambda\nu) = p.$$

Bilden wir somit die zweite Ueberschiebung $(ap)^2 = F$, so erhalten wir

$$F = \left(a_x^2, \lambda^2(\nu\mu)^2 + \lambda\cdot\mu(\nu\mu)(\lambda\nu) + \frac{1}{4}\mu^2(\lambda\nu^2)\right)^2,$$

oder weil $a_x^2 = \lambda\cdot\mu$, und demnach das erste und dritte Ueberschiebungsglied gleich null, so wird:

$$F = (a_x^2, b_x^2(\nu\mu)(\lambda\nu))^2 = (\nu\mu)(\lambda\nu)\cdot A_{ff}. \tag{1}$$

Berechnen wir sodann die simultane Invariante $A_{f\varDelta}$, so findet man:

$$A_{f\varDelta} = (\varDelta\lambda)(\varDelta\mu) = (\alpha\beta)^2(\beta\lambda)(\alpha\mu).$$

Der Ausdruck rechts ist nichts anderes als die zweite Ueberschiebung

$$((\beta\lambda)\beta_x^2, (\alpha\mu)\alpha_x^2)^2 = (\lambda\nu, (\alpha\mu)\alpha_x^2)^2 = (\alpha\lambda)(\alpha\nu)(\alpha\mu).$$

Nun ist aber:

$$(\alpha\lambda)(\alpha\nu)(\alpha\mu) = ((\alpha\lambda)\alpha_x^2, \mu\nu)^2 = (\lambda\nu, \mu\nu) = \frac{1}{2}(\nu\mu)(\lambda\nu),$$

somit:

$$2A_{f\Delta} = (\nu\mu)(\lambda\nu). \tag{2}$$

Setzen wir den Werth von $(\nu\mu)(\lambda\nu)$ in die Relation (1) ein, so kommt:

$$F - 2A_{f\Delta} \cdot A_{ff} = 0.$$

Diese Relation besteht also unter der Voraussetzung, dass f und φ einen gemeinsamen Factor haben. Sie ist überdies vom Grade $2 + 3 = 5$ in den Coefficienten, und ihre linke Seite darf somit als Resultante von f und φ betrachtet werden.

§ 32. Das simultane System zweier cubischer Formen.

307. *Erste Formulirung der Aufgabe.* Das vollständige System einer cubischen Form besteht aus den vier Formen:

$$a_x^3 = f, \quad (f, f)^2 = \Delta, \quad (f, \Delta) = Q, \quad (\Delta, \Delta)^2 = A_{\Delta\Delta}.$$

Es sei φ eine zweite cubische Form; die Formen ihres vollen Systemes wollen wir bezeichnen mit

$$\alpha_x^3 = \varphi, \quad (\varphi, \varphi)^2 = \nabla, \quad (\varphi, \nabla) = K, \quad (\nabla, \nabla)^2 = A_{\nabla\nabla}.$$

Wir stellen uns die Aufgabe, das simultane System der beiden Formen f und φ zu ermitteln. Nach den allgemeinen Sätzen, § 38, erhalten wir dasselbe, wenn wir die beiden Producte

$$U = f^{\lambda_1} \cdot Q^{\lambda_2} \cdot \Delta^{\lambda_3}$$
$$V = \varphi^{\mu_1} \cdot K^{\mu_2} \cdot \nabla^{\mu_3}$$

über einander schieben, d. h. also mit einander multipliciren und das Product $U \cdot V$ auf alle möglichen Arten in bekannter Weise falten. Enthält eine solche Ueberschiebung

$$F = (U, V)^\varrho = (f^{\lambda_1} \cdot Q^{\lambda_2} \cdot \Delta^{\lambda_3}, \varphi^{\mu_1} \cdot K^{\mu_2} \cdot \nabla^{\mu_3})^\varrho$$

kein zerfallendes Glied, so liefert sie eine Form des Systemes.

308. *Reduction der Aufgabe.* Die Zahl der zu faltenden Producte $U \cdot V$ lässt sich von vornherein reduciren, insofern sich bis auf wenige Ausnahmen leicht erkennen lässt, welche derselben auf Ueberschiebungen mit zerfallenden Gliedern führen.

Erstens: Producte, welche höhere als die zweite Potenz von Δ resp. ∇ enthalten, bleiben unberücksichtigt, wegen der bekannten Relation:

$$\Delta^3 + 2Q^2 + A_{\Delta\Delta} f^2 = 0.$$

Zweitens: Enthält U eine Form Δ und gleichzeitig V eine Form ∇, so sind höhere Faltungen als die zweite ausgeschlossen, da stets Glieder mit dem Factor $A_{\Delta\nabla} = (\Delta, \nabla)^2$ gebildet werden können.

Drittens: Bei Ueberschiebungen, welche den Grad 3 übersteigen, kann U nur Einen Factor f oder Q, und V nur Einen Factor φ oder K enthalten, da diese Formen von gleichem Grade sind und somit stets Glieder auftreten würden, welche die dritten Ueberschiebungen $(f, \varphi)^3$, $(f, K)^3$, $(\varphi, Q)^3$ zum Factor haben. Bei niedrigeren Ueberschiebungen ist aber ohnehin der Fall ausgeschlossen, dass U oder V aus mehr als aus einem Factor besteht, wenn dieser dritten Grades ist.

Viertens: Ueberschiebungen einer Potenz von f, oder Q, über eine Potenz von ∇, bleiben unberücksichtigt, da schon $(f^2, \nabla^2)^4$, oder $(Q^2, \nabla^2)^4$ Glieder enthalten, welche Producte früherer Ueberschiebungen sind, nämlich: $(f, \nabla)^2 \cdot (f, \nabla)^2$ oder $(Q, \nabla)^2 \cdot (Q, \nabla)^2$.

Von allen Producten $U \cdot V$ sind also nur jene zu falten, in welchen

1) sowohl U als V nur eine Form enthält,
2) U (oder V) eine Form, V (oder U) eine zweite Potenz von ∇ (resp. Δ).

309. *Aufstellung der einzelnen Formen.* Wir bilden nun die einzelnen Ueberschiebungen:

1) $$U = f, \quad V = \varphi.$$

Ihre Ueberschiebung liefert drei Formen:

$$(f, \varphi) = \vartheta, \ (f, \varphi)^2 = \Theta, \ (f, \varphi)^3 = J.$$

2) $$U = f, \ V = \nabla, \quad \text{oder} \quad U = \Delta, \ V = \varphi.$$

Wir erhalten sechs Formen:

$$(f, \nabla), \ (f, \nabla)^2, \ (f, \nabla^2)^3$$
$$(\varphi, \Delta), \ (\varphi, \Delta)^2, \ (\varphi, \nabla^2)^3.$$

3) $$U = \Delta, \quad V = \nabla.$$

Es entstehen die zwei Formen:

$$(\Delta, \nabla) \quad \text{und} \quad (\Delta, \nabla)^2.$$

4) $$U = Q \text{ und } V$$

sei irgend eine Form des zweiten Systems. Als erste Ueberschiebungen treten die Formen auf:

$$(Q, \varphi), \ (Q, \nabla), \ (Q, K),$$

und entsprechend

$$(K, f), \ (Q, \Delta);$$

sie sind als Functionaldeterminanten von Functionaldeterminanten reducibel.

Als zweite Ueberschiebungen erhält man:

$$(Q, \varphi)^2, \ (Q, \nabla)^2, \ (Q, K)^2$$
$$(K, f)^2, \ (Q, \Delta)^2.$$

Von diesen ist $(Q, K)^2$ reducibel; denn falten wir das Product

$$a_x^2 \varDelta_x (a \varDelta) \cdot \alpha_x^2 \nabla_x (\alpha \nabla)$$

zweimal, und bilden insbesondere das Glied

$$G = a_x \alpha_x (a \nabla)(\alpha \nabla)(a \varDelta)(\alpha \varDelta),$$

so lässt sich auf dasselbe der Productsatz unmittelbar anwenden und man findet

$$G = a_x \alpha_x (a \nabla)(\alpha \nabla)(a \varDelta)(\alpha \varDelta)$$
$$= \frac{1}{2} a_x \alpha_x \{(\nabla \alpha)^2 (\varDelta a)^2 + (\nabla a)^2 (\varDelta \alpha)^2 - (\nabla \varDelta)^2 (a \alpha)^2\}.$$

Das erste Glied rechts ist wegen $(\varDelta a)^2$ oder $(\nabla \alpha)^2$ null. [Vergl. Nr. 145, (I).] Das zweite ist $(f, \nabla)^2 \cdot (\varphi, \varDelta)^2$, das dritte $(\nabla, \varDelta)^2 \cdot (f, \varphi)^2$. Es ist somit das Glied G reducibel, folglich $(Q, K)^2$ selbst.

Als dritte Ueberschiebungen erhält man endlich:

$$(Q, \varphi)^3, \; (Q, f)^3, \; (Q, K)^3$$
$$(Q, \nabla^2)^3, \; (K, \nabla^2)^3.$$

Von diesen Ueberschiebungen sind die beiden letzten reducibel. Es ist nur nöthig, dies von $(K, \varDelta^2)^3$ zu zeigen; für die Form $(Q, \nabla^2)^3$ folgt die Reducibilität aus der entsprechenden Bedeutung der Formen Q und ∇. Die dritte Polare von K ist:

$$K_{y^3} = (\alpha \nabla) \alpha_y^2 \nabla_y,$$

ferner die dritte Polare von $\varDelta_x^4$

$$\varDelta_{y^3}^2 = \varDelta_{y^2} \varDelta_{1y} \varDelta_{1x}.$$

Indem wir das Product

$$(\alpha \nabla) \alpha_y^2 \nabla_y \cdot \varDelta_{y^2} \varDelta_{1y} \varDelta_{1x}$$

auf alle möglichen Arten dreimal falten, erhalten wir die Ueberschiebung

$$(K, \varDelta^2)^3 = \frac{1}{3} (\alpha \nabla)(\alpha \varDelta)^2 (\nabla \varDelta_1) \varDelta_{1x} + \frac{2}{3} (\alpha \nabla)(\alpha \varDelta_1)(\nabla \varDelta)(\alpha \varDelta).$$

Die Differenz dieser beiden Glieder ist aber null, da sie den Factor $(\alpha \nabla)^2$ enthält (vergl. Nr. 145), folglich sind beide einander gleich, und wir erhalten:

$$(K, \varDelta^2)^3 = (\alpha \nabla)(\alpha \varDelta)^2 (\nabla \varDelta_1) \varDelta_{1x}.$$

Ersetzen wir hier $\varDelta_1$ durch $(ab)^2 a_x b_x$, so kommt:

$$(K, \varDelta^2)^3 = (ab)^2 (\alpha \varDelta)^2 (\alpha \nabla)(\nabla a) b_x$$
$$= (\alpha \nabla)(\nabla a) b_x \{(b \varDelta)(a \alpha) - (a \varDelta)(b \alpha)\}^2.$$

Entwickelt man rechts nach dem binomischen Lehrsatz, so ist das erste und letzte Glied null wegen des Factors $(b \varDelta)^2$. Es reducirt sich also:

$$(K, \Delta^2)^3 = -2(\alpha\nabla)(\nabla a)(a\alpha)(b\alpha)(a\Delta)(b\Delta)b_x$$
$$= -2(\alpha\nabla)(a\Delta)(b\Delta)(a\alpha)b_x\{(\nabla b)(a\alpha) - (ab)(\nabla\alpha)\}$$
$$= -2(a\alpha)^2(\alpha\nabla)(\nabla b)(a\Delta)(b\Delta)b_x.$$

Da rechts der Klammerfactor $(a\alpha)^2$ auftritt, so suchen wir diesen Ausdruck mittelst der Reihenentwicklung

$$(a\alpha)^2 a_y \alpha_x = \Theta_x \Theta_y + \frac{1}{2} J(yx)$$

umzuformen. Ersetzt man nämlich in ihr y durch Δ, x durch ∇, so kommt:

$$(a\alpha)^2(a\Delta)(\alpha\nabla) = (\Theta\nabla)(\Theta\Delta) + \frac{1}{2} J(\Delta\nabla).$$

Tragen wir dies in $(K, \Delta^2)^3$ ein, so erhalten wir:

$$(K, \Delta^2)^3 = -2b_x(b\Delta)(\nabla b)\{(\Theta\nabla)(\Theta\Delta) + \frac{1}{2} J(\Delta\nabla)\}$$
$$= +2b_x(b\Delta)(\Theta\Delta)(b\nabla)(\Theta\nabla) + J(\Delta\nabla)(b\Delta)(b\nabla)b_x.$$

Für das erste Glied liefert der Productsatz:

$$(b\Delta)(\Theta\Delta)(b\nabla)(\Theta\nabla) = \frac{1}{2}\{(b\Delta)^2(\Theta\nabla)^2 + (\Theta\Delta)^2(b\nabla)^2 - (\Delta\nabla)^2(b\Theta)^2\}.$$

Das erste Glied in dieser Summe ist null wegen $(b\Delta)^2$. Man erhält also:

$$(K, \Delta^2)^3 = (\Theta, \Delta)^2 \cdot (f, \nabla)^2 - (\Delta, \nabla)^2 \cdot (f, (f, \varphi))^2 + J \cdot (f, (\Delta, \nabla))^2.$$

Die beiden Covarianten $(K\Delta^2)^3$ und $(Q\nabla^2)^3$ sind somit reducibel und das ganze Formensystem der zwei cubischen Formen f und φ besteht also aus 26 Formen.

Eine biquadratische:

$$(f, \varphi) = (a\alpha)a_x^2\alpha_x^2 = \vartheta.$$

Sechs cubische:

$$f,\ \varphi,\ Q,\ K,\ (f, \nabla),\ (\varphi, \Delta).$$

Sechs quadratische:

$$\Delta,\ \nabla,\ (f, \varphi)^2 = \Theta,\ (\Delta, \nabla),\ (Q, \varphi)^2,\ (K, f)^2.$$

Sechs lineare:

$$(f, \nabla)^2,\ (\varphi, \Delta)^2,\ (f, \nabla^2)^3,\ (\varphi, \Delta^2)^3,\ (Q, \nabla)^2,\ (K, \Delta)^2.$$

Sieben Invarianten:

$$A_{\Delta\Delta},\ A_{\nabla\nabla},\ A_{\Delta\nabla},\ (f, \varphi)^3 = J,\ (Q, K)^3,\ (Q, \varphi)^3,\ (Q, f)^3.$$

Von den linearen Formen erhalten zwei eine besondere Bezeichnung. Wir setzen

$$(f, \nabla)^2 = (a\nabla)^2 a_x = \pi_x = \pi$$
$$(\varphi, \Delta)^2 = (\alpha\Delta)^2\alpha_x = p_x = p.$$

310. *Exposition der folgenden Aufgaben.* Nachdem wir im Vorhergehenden die Formen ermittelt haben, aus denen das vollständige System von f und φ bestehen muss, wird unser nächstes Ziel nach den Beziehungen und Relationen gerichtet sein, welche, sei es zwischen den Formen des Systemes selbst, sei es zwischen deren Ueberschiebungen bestehen. Die allgemeinen Wege, welche dazu führen, sowie die hiebei sich einstellende Nothwendigkeit der Einführung neuer gleich berechtigter Formen an Stelle alter Formen, haben wir wiederholt an den geeigneten Stellen klar gelegt. Wir greifen hier indes der systematischen Methode vor, indem wir uns zunächst, in Folge der Wichtigkeit der sich hiebei einstellenden Resultate, mit den linearen Covarianten p und π beschäftigen, deren erste Ueberschiebung über f und φ sowohl, als deren Quadrate wir vor allem berechnen wollen. Hiebei ist es, wie überhaupt bei allen kommenden Untersuchungen, stets hinreichend, die Berechnungen für eine je zweier gleich berechtigter Formen (f, p) und (φ, π), oder (f, π) und (φ, p), oder p^2 und π^2 durchzuführen, da die Resultate für die andere der beiden Formen einfach durch Vertauschung von a mit α gewonnen werden.

311. *Die ersten Ueberschiebungen von f und φ über p und π.* Die erste Ueberschiebung von f über p ist dargestellt durch:

$$(f, p) = a_x^2 (a\alpha)(\alpha\Delta)^2.$$

Subtrahiren wir auf der rechten Seite die Grösse

$$0 = (a\alpha)(a\Delta)^2 \alpha_x^2,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}(f, p) &= (a\alpha)\{a_x^2(\alpha\Delta)^2 - \alpha_x^2(a\Delta)^2\} \\ &= (a\alpha)\{a_x(\alpha\Delta) + \alpha_x(a\Delta)\}\{a_x(\alpha\Delta) - \alpha_x(a\Delta)\}.\end{aligned}$$

Der letzte Factor rechts ist aber gleich $-(a\alpha)\Delta_x$ gemäss dem Identitätssatze. Folglich ist:

$$(f, p) = -(a\alpha)^2\Delta_x\{a_x(\alpha\Delta) + \alpha_x(a\Delta)\},$$

oder:

$$(f, p) = -2((a\alpha))^2 a_x\alpha_x, \Delta) = -2(\Theta, \Delta). \tag{1}$$

Also ebenso:

$$(\varphi, \pi) = -2(\Theta, \nabla). \tag{2}$$

Es ist ferner:

$$(f, \pi) = a_x^2(ab)(b\nabla)^2.$$

Vertauscht man wegen des Factors (ab) das Symbol a mit b und nimmt die halbe Summe, so kommt:

$$\begin{aligned}(f, \pi) &= \frac{1}{2}(ab)\{a_x^2(b\nabla)^2 - b_x^2(a\nabla)^2\} \\ &= -\frac{1}{2}(ab)^2\nabla_x\{a_x(b\nabla) + b_x(a\nabla)\},\end{aligned}$$

oder: $$(f, \pi) = -((ab)^2 a_x b_x, \nabla) = -(\Delta, \nabla). \tag{3}$$
Also auch:
$$(\varphi, p) = -(\nabla, \Delta). \tag{4}$$

Diese beiden Ueberschiebungen sind also bis aufs Vorzeichen einander gleich, und man gewinnt daher aus (3) und (4) die Fundamentalrelation:
$$(f, \pi) + (\varphi, p) = 0. \tag{5}$$

312. *Eine Untersuchung über die Fundamentalrelation* $(f, \pi)+(\varphi, p) = 0$. Ehe wir dazu übergehen, die Quadrate von p und π zu berechnen, wollen wir uns die Frage vorlegen, ob nicht die Formen p und π bereits durch die Relation
$$(f, \pi) + (\varphi, p) = 0 \tag{1}$$
vollständig definirt sind. Die zu stellende Frage können wir in der Form aussprechen: Für welche Werthe von y und z wird die Summe der beiden Polaren $$f_y + \varphi_z$$
identisch null? So lange f und φ Formen beliebiger Ordnung sind, wird es nicht möglich sein, wenn nicht anderweitige Bedingungen stattfinden, solche Werthe zu bestimmen. Nur in dem Falle, wo f und φ quadratische Formen, giebt es unendlich viele Werthe. Bei Formen dritter Ordnung findet man nur ein einziges Werthsystem, bei biquadratischen überhaupt keines, wenn nicht eine bestimmte simultane Invariante verschwindet. Dies lehrt schon eine einfache Constantenabzählung.

Wenn wir nun hier für cubische Formen die Frage beantworten wollen, so verlangt zunächst die Identität:
$$f_y + \varphi_z = 0,$$
da sie unabhängig von x erfüllt sein soll, dass die Coefficienten von $x_1^2, 2x_1x_2, x_2^2$ für sich allein verschwinden. Das liefert drei Gleichungen ersten Grades für die Verhältnisse der vier Grössen $y_1\ y_2\ z_1\ z_2$, nämlich:
$$\begin{aligned}\bar{a}_0 y_1 + \bar{a}_1 y_2 + \bar{\alpha}_0 z_1 + \bar{\alpha}_1 z_2 &= 0\\ \bar{a}_1 y_1 + \bar{a}_2 y_2 + \bar{\alpha}_1 z_1 + \bar{\alpha}_2 z_2 &= 0\\ \bar{a}_2 y_1 + \bar{a}_3 y_2 + \bar{\alpha}_2 z_1 + \bar{\alpha}_3 z_2 &= 0.\end{aligned}$$

Gemäss der Theorie der Auflösung linearer Gleichungen (vergl. Bd. I, Nr. 111) sind also die Werthe von $y_1\ y_2\ z_1\ z_2$ proportional den einzelnen Determinanten der Matrix
$$V = \begin{vmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{\alpha}_0 & \bar{\alpha}_1 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{\alpha}_2 & \bar{\alpha}_3 \end{vmatrix}.$$



Es ist:

$$\varrho y_1 = \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{\alpha}_0 & \bar{\alpha}_1 \\ \bar{a}_2 & \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 \\ \bar{a}_3 & \bar{\alpha}_2 & \bar{\alpha}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^2 a_2 & \alpha_1^3 & \beta_1^2 \beta_2 \\ a_1 a_2^2 & \alpha_1^2 \alpha_2 & \beta_1 \beta_2^2 \\ a_2^3 & \alpha_1 \alpha_2^2 & \beta_2^3 \end{vmatrix} = a_2 \alpha_1 \beta_2 (a\alpha)(a\beta)(\alpha\beta).$$

Vertauscht man rechts α mit β und nimmt die halbe Summe, so kommt:

$$\varrho y_1 = \frac{1}{2} a_2 (\alpha\beta)^2 (a\alpha)(a\beta)$$

oder:

$$\varrho y_1 = \frac{1}{2} a_2 (a\nabla)^2 = \frac{1}{2} \bar{\pi}_2.$$

Ebenso:

$$\varrho y_2 = -\frac{1}{2} a_1 (a\nabla)^2 = -\frac{1}{2} \bar{\pi}_1$$

$$\varrho z_1 = \frac{1}{2} \alpha_2 (\alpha\Delta)^2 = \frac{1}{2} \bar{p}_2$$

$$\varrho z_2 = -\frac{1}{2} \alpha_1 (\alpha\Delta)^2 = -\frac{1}{2} \bar{p}_1.$$

Man erkennt, p und π sind die einzigen Werthe, für welche die Identität (1) besteht, und sie sind demnach durch sie vollständig definirt.

Bei quadratischen Formen wäre die Matrix V nur zweizeilig gewesen; zwei lineare homogene Gleichungen mit vier Unbekannten werden aber durch unendlich viele Werthe befriedigt; bei biquadratischen Gleichungen aber wäre die Matrix V vierzeilig gewesen, und die Bedingung, dass vier lineare homogene Gleichungen mit vier Unbekannten durch ein bestimmtes Werthsystem derselben befriedigt werden können, ist gerade durch das Verschwinden dieser Determinante V ausgedrückt.

313. *Berechnung von p^2 und π^2.* Unsere nächste Aufgabe ist, p^2 als lineare Function quadratischer Covarianten darzustellen. Es war

$$p = (\beta\Delta)^2 \beta_x = (\alpha\Delta)^2 \alpha_x.$$

Führen wir für Δ seinen Werth $(ab)^2 a_x b_x$ ein, so wird:

$$p = (ab)^2 (a\beta)(b\beta)\beta_x.$$

Multipliciren wir die beiden so erhaltenen Werthe für p, so kommt:

$$p^2 = (\alpha\Delta)^2 \alpha_x (ab)^2 (a\beta)(b\beta)\beta_x.$$

Hierin fordern die beiden quadratischen Klammerfactoren zur Benutzung der Identität auf:

$$(\alpha\Delta)^2 (ab)^2 = \{(a\alpha)(b\Delta) - (b\alpha)(a\Delta)\}^2.$$

Wegen der rechts auftretenden Factoren $(b\Delta)^2$, $(a\Delta)^2$ reducirt sich also der Werth von p^2 nach Einführung dieses Werthes von

$(a\Delta)^2(ab)^2$ auf:

$$p^2 = -2(a\alpha)(b\alpha)(a\beta)(b\beta)(a\Delta)(b\Delta)\alpha_x\beta_x.$$

Diesen Ausdruck wird man wegen der vier ersten Factoren mit Hilfe des Productsatzes umformen. Man erhält:

$$p^2 = -(a\Delta)(b\Delta)\alpha_x\beta_x\{(a\alpha)^2(b\beta)^2 + (a\beta)^2(b\alpha)^2 - (ab)^2(\alpha\beta)^2\}.$$

Die beiden ersten Glieder rechts gehen durch Vertauschung von a mit b in einander über, sind also einander gleich; daher:

$$p^2 = (ab)^2(\alpha\beta)^2(a\Delta)(b\Delta)\alpha_x\beta_x - 2(a\alpha)^2(b\beta)^2(a\Delta)(b\Delta)\alpha_x\beta_x. \quad (6)$$

Der erste Term rechts ist nichts anderes als das Product

$$(ab)^2(a\Delta)(b\Delta)(\alpha\beta)^2\alpha_x\beta_x = A_{\Delta\Delta}\cdot\nabla. \quad (7)$$

Um den zweiten Term umzuformen, benutzen wir wegen des Factors $(a\alpha)^2$ die Reihenentwicklung:

$$(a\alpha)^2 a_y\alpha_x = \Theta_x\Theta_y + \frac{1}{2}J(yx). \quad (8)$$

Denken wir uns in ihr y durch Δ ersetzt und alsdann den Werth von $(a\alpha)^2(a\Delta)\alpha_x$ in den zweiten Term (6) eingetragen, so wird derselbe:

$$-2(a\alpha)^2(a\Delta)\alpha_x\cdot(b\beta)^2(b\Delta)\beta_x = -2(b\beta)^2(b\Delta)\beta_x\left\{\Theta_x(\Theta\Delta) + \frac{1}{2}J\Delta_x\right\}.$$

Transformiren wir die Factoren vor der Klammer nochmals durch dieselbe Reihenentwicklung (8), so kommt:

$$\begin{aligned} &-2(a\alpha)^2(a\Delta)\alpha_x\cdot(b\beta)^2(b\Delta)\beta_x \\ &= -2\Theta_x(\Theta\Delta)\cdot\left\{\Theta'_x(\Theta'\Delta) + \frac{1}{2}J\Delta_x\right\} - J\Delta_x\left\{\Theta_x(\Theta\Delta) + \frac{1}{2}J\Delta_x\right\} \\ &= -2(\Theta\Delta)\Theta_x(\Theta'\Delta)\Theta'_x - 2J\Delta_x(\Theta\Delta)\Theta_x - \frac{J^2}{2}\Delta \\ &= -2(\Theta\Delta)(\Theta'\Delta)\Theta_x\Theta'_x - 2J(\Theta,\Delta) - \frac{J^2}{2}\Delta. \end{aligned} \quad (9)$$

Das erste Glied rechts ist aber nach dem Productsatze:

$$\begin{aligned} 2(\Theta\Delta)(\Theta'\Delta)\Theta_x\Theta'_x &= \{(\Theta\Delta)^2\Theta' + (\Theta'\Delta)^2\Theta - (\Theta\Theta')^2\Delta\} \\ &= 2A_{\Theta\Delta}\cdot\Theta - A_{\Theta\Theta}\cdot\Delta. \end{aligned} \quad (10)$$

Es wird also, wenn wir die in (7), (9) und (10) berechneten Werthe in (6) eintragen und überdies $-2(\Theta,\Delta)$ durch (f,p) ersetzen [vergl. Nr. 310, (1)]

$$p^2 = A_{\Delta\Delta}\nabla - 2A_{\Theta\Delta}\Theta + \left(A_{\Theta\Theta} - \frac{J^2}{2}\right)\Delta + J(f,p), \quad (11)$$

und demgemäss, da J bei Vertauschung von a mit α das Zeichen wechselt:

$$\pi^2 = A_{\nabla\nabla}\Delta - 2A_{\Theta\nabla}\Theta + \left(A_{\Theta\Theta} - \frac{J^2}{2}\right)\nabla - J(\varphi,\pi). \quad (12)$$

314. *Exposition der folgenden Aufgaben.* Die vorausgegangenen Abschnitte dienten dazu, uns über einige Eigenschaften jener beiden linearen Covarianten p und π zu instruiren, die im ganzen System eine so hervorragende Rolle spielen. Wir können nun wiederum zu einer systematischen Methode zurückkehren, die uns über die Beziehungen der Formen des Systemes Aufschluss verschaffen soll. Indem wir diese Relationen zu ermitteln streben, werden wir uns gleichzeitig veranlasst sehen, gewisse Ueberschiebungen des Systemes durch ein geeignetes ihrer Glieder zu ersetzen. Wir beginnen damit, die Ueberschiebungen der einzelnen Covariantengruppen des Systemes der Reihe nach zu studiren, so weit sie für uns Interesse haben. Daran schliessen sich die Untersuchungen über die Relationen zwischen den Invarianten des Systemes, deren nothwendig zwei existiren müssen, da zwei cubische Formen nur $8 - 3 = 5$ unabhängige Constante besitzen, während doch 7 Invarianten im Systeme auftraten.

315. *Die biquadratische Covariante* ϑ. Die einzige Form vierter Ordnung, die im simultanen System von f und φ auftritt, ist die schiefe Covariante: $\vartheta = (f, \varphi) = (a\alpha)\, a_x^2\, \alpha_x^2$.

Von den Ueberschiebungen dieser Form über andere besprechen wir hier vier, die ein allgemeineres Interesse haben, nämlich die dritte Ueberschiebung über f und φ, die erste über p und π. Es ist:

$$(\vartheta, f)^3 = ((a\alpha)\, a_x^2\, \alpha_x^2,\, b_x^3)^3 = \frac{1}{2}\,(a\alpha)\left\{(ab)^2(\alpha b)\,\alpha_x + (\alpha b)^2(ab)\,a_x\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\,(a\alpha)(ab)(\alpha b)\left\{(ab)\,\alpha_x + (\alpha b)\,a_x\right\}.$$

Das letzte Glied $(\alpha b)a_x$ in der Klammer kann durch $\frac{1}{2}\,(ab)\alpha_x$ ersetzt werden, da die Identität besteht:

$$(\alpha b)\,a_x + (a\alpha)\,b_x = (ab)\,\alpha_x$$

und $(\alpha b)\,a_x$ hier mit $(a\alpha)\,b_x$ gleichbedeutend ist. Man erhält also:

$$(\vartheta, f)^3 = \frac{3}{4}\,(a\alpha)(ab)^2(\alpha b)\,\alpha_x,$$

oder, da $\Delta = (ab)^2\,a_x\,b_x$:

$$(\vartheta, f)^3 = \frac{3}{4}\,(\Delta\alpha)(\alpha\Delta)\,\alpha_x = -\frac{3}{4}\,(\varphi, \Delta)^2 = -\frac{3}{4}\,p. \qquad (1)$$

Folglich auch, da ϑ durch Vertauschung von a mit α sein Zeichen ändert:

$$(\vartheta, \varphi)^3 = +\frac{3}{4}\,\pi.$$

Zur Berechnung der ersten Ueberschiebung von ϑ über p und π gehen wir aus von der Fundamentalrelation Nr. 310, (5)

$$a_x^2\,(a\pi) + \alpha_x^2\,(\alpha p) = 0.$$

Schieben wir diese Relation einmal über f, so kommt:

$$0 = (ab)(a\pi)\,a_x b_x^2 + (\alpha b)(\alpha p)\,\alpha_x b_x^2. \tag{2}$$

Das zweite Glied geht aus der Reihe

$$(a\alpha)\,a_x^2\,\alpha_x\,\alpha_y = \vartheta_y - \frac{1}{2}\,\Theta(yx)$$

hervor, wenn wir in ihr a durch b und y durch p ersetzen; es folgt dann

$$(\alpha b)(\alpha p)\,\alpha_x b_x^2 = -(\vartheta, p) + \frac{1}{2}\,\Theta p. \tag{3}$$

Vertauschen wir im ersten Glied der Relation (2) a mit b und nehmen die halbe Summe, so erhalten wir:

$$(ab)(a\pi)\,a_x b_x^2 = \frac{1}{2}\,(ab)\,a_x b_x \left\{(a\pi)\,b_x - (b\pi)\,a_x\right\} = \frac{1}{2}\,(ab)^2 a_x b_x \cdot \pi. \tag{4}$$

Tragen wir diese Werthe der beiden Glieder aus (3) und (4) in (2) ein, so erhalten wir:

$$0 = \frac{\pi \varDelta}{2} - (\vartheta, p) + \frac{1}{2}\,\Theta p,$$

oder:

$$(\vartheta, p) = \frac{1}{2}\left\{\varDelta\pi + \Theta p\right\}, \tag{5}$$

und demgemäss:

$$(\vartheta, \pi) = -\frac{1}{2}\left\{\nabla p + \Theta\pi\right\}. \tag{6}$$

316. *Die cubischen und quadratischen Covarianten.* Die Formen dritter Ordnung, welche das simultane System aufweist, wollen wir genau so beibehalten, wie sie der Faltungsprocess bei Aufstellung des Systemes geliefert hat. Es sind sechs an der Zahl:

$$f,\ \varphi,\ Q,\ K,\ (f, \nabla),\ (\varphi, \varDelta).$$

Zu weitern Untersuchungen von Ueberschiebungen derselben über einander oder über andere Formen haben wir hier keine Veranlassung.

Von den sechs quadratischen Formen, die im Systeme auftreten, wollen wir drei durch andere ersetzen, nämlich die drei Formen $(\varDelta, \nabla)$, $(Q, \varphi)^2$ und $(K, f)^2$. Die Gründe, die uns hiezu bewegen, sind rein praktischer Natur. Clebsch hatte dieselben ersetzt durch die drei Functionaldeterminanten der drei andern quadratischen Formen $\varDelta$, ∇, Θ. Wir wollen an ihrer Stelle einführen: (f, π), (f, p), (φ, π), also Ueberschiebungen über lineare Formen. Dass wir $(\varDelta, \nabla)$ durch (f, π) ersetzen können, geht aus Nr. 311, (3) hervor.

Berechnet man ferner die zweite Ueberschiebung von Q über φ, so findet man Folgendes. Die zweite Polare von Q ist [vgl. Nr. 146, (2)]:

$$Q_x Q_y^2 = (a\varDelta)\,a_y^2\,\varDelta_x,$$

Ersetzen wir darin y durch α, und multipliciren mit α_x, so kommt:

$$(Q, \varphi)^2 = (a\varDelta)(a\alpha)^2 \varDelta_x \alpha_x.$$

Der Ausdruck rechts entsteht aber aus $(a\alpha)^2 a_y \alpha_x$, wenn wir darin y durch $\varDelta$ ersetzen und mit $\varDelta_x$ multipliciren. Wir erhalten [vergl. Nr. 313, (8)] daher:

$$(Q, \varphi)^2 = (\Theta, \varDelta) + \frac{J}{2} \varDelta,$$

also wegen Nr. 311, (1)

$$(Q, \varphi)^2 = -\frac{1}{2}(f, p) + \frac{1}{2} J \varDelta. \qquad (1)$$

Man darf also in der That $(Q, \varphi)^2$ durch (f, p) ersetzen und demgemäss auch $(K, f)^2$ durch (φ, π). Die sechs quadratischen Formen sind also:

$$\varDelta,\ \Theta,\ \nabla,\ (f, p),\ (\varphi, \pi),\ (f, \pi) = -(\varphi, p).$$

317. *Die sechs linearen Formen.* Von den sechs linearen Formen des Systemes behalten wir die beiden Formen p und π im Folgenden bei. Dagegen ersetzen wir die vier übrigen durch

$$(\varDelta, p),\ (\varDelta, \pi),\ (\nabla, p),\ (\nabla, \pi).$$

Dass dies gestattet ist, kann man leicht zeigen. Denn da die zweite Polare von Q, wie schon erwähnt, sich auf $(a\varDelta) a_y^2 \varDelta_x$ reducirt, so wird

$$(Q, \nabla)^2 = (a\varDelta)(a\nabla)^2 \varDelta_x.$$

Nun ist aber die lineare Form

$$\pi_x = (a\nabla)^2 a_x,$$

also

$$(Q, \nabla)^2 = ((a\nabla)^2 a_x, \varDelta) = (\pi, \varDelta) \qquad (1)$$

und ebenso

$$(K, \varDelta)^2 = ((\alpha\varDelta)^2 \alpha_x, \nabla) = (p, \nabla). \qquad (2)$$

Man erhält ferner:

$$(\varphi, \varDelta^2)^3 = (\alpha\varDelta)^2 (\alpha\varDelta_1) \varDelta_{1x},$$

oder, weil:

$$(\alpha\varDelta)^2 \alpha_x = p,$$

$$(\varphi, \varDelta^2)^3 = ((\alpha\varDelta)^2 \alpha_x, \varDelta_1) = (p, \varDelta), \qquad (3)$$

und ebenso

$$(f, \nabla^2)^3 = ((a\nabla)^2 a_x, \nabla_1) = (\pi, \nabla). \qquad (4)$$

Die sechs linearen Covarianten des Systemes sind also:

$$p,\ \pi,\ (\varDelta, p),\ (\varDelta, \pi),\ (\nabla, p),\ (\nabla, \pi).$$

318. *Weitere lineare Covarianten.* Den eben besprochenen sechs Formen, insbesondere den beiden Ueberschiebungen von f und φ über

∇, resp. Δ, sehr nahe liegend sind auch die beiden Ueberschiebungen von f und φ über die andere quadratische Form Θ, nämlich $(f, \Theta)^2$ und $(\varphi, \Theta)^2$. Wir erhalten:

$$(\Theta, f)^2 = (a\alpha)^2(ab)(\alpha b)\, b_x$$
$$= \frac{1}{2}\{(a\alpha)^2(ab)(\alpha b) b_x + (b\alpha)^2(ba)(\alpha a)\, a_x\}$$
$$= \frac{1}{2}(a\alpha)(ab)(\alpha b)\{(a\alpha) b_x + (\alpha b)\, a_x\}$$
$$= \frac{1}{2}(a\alpha)(ab)^2(\alpha b)\alpha_x = -\frac{1}{2}(a\alpha)(b\alpha)(ab)^2\alpha_x,$$

oder, weil $(ab)^2 a_x b_x = \Delta$ und nach Nr. 309, $(\varphi, \Delta)^2 = p$,

$$(f, \Theta)^2 = -\frac{1}{2}(\Delta, \varphi)^2 = -\frac{1}{2}p, \tag{1}$$

also auch

$$(\varphi, \Theta)^2 = -\frac{1}{2}(\nabla, f)^2 = -\frac{1}{2}\pi. \tag{2}$$

Wir haben damit auch für die beiden wichtigen linearen Covarianten p und π einen neuen Ausdruck gefunden.

Eine zweite Reihe einfach zu berechnender verwandter linearer Covarianten ergiebt sich aus den Ueberschiebungen von f und φ über Producte und Potenzen von p und π, also die Covarianten:

$$(f, p^2)^2,\ (f, p\pi)^2,\ (f, \pi^2)^2;\ (\varphi, p^2),\ (\varphi, p\pi)^2,\ (\varphi, \pi^2)^2.$$

Da wir die Werthe von p^2 und π^2 bereits als lineare Functionen quadratischer Formen ermittelt haben, so hat die Berechnung dieser Covarianten keine weitere Schwierigkeit. Wir schieben die Relation

$$p^2 = A_{\Delta\Delta}\nabla - 2A_{\Theta\Delta}\Theta + \left(A_{\Theta\Theta} - \frac{J^2}{2}\right)\Delta + J(f, p)$$

zweimal über f und erhalten:

$$(f, p^2)^2 = (ap)^2 a_x = A_{\Delta\Delta}(f, \nabla)^2 - 2A_{\Theta\Delta}(f, \Theta)^2 + \left(A_{\Theta\Theta} - \frac{J^2}{2}\right)(f, \Delta)^2$$
$$+ J(f, (ap)\, a_x^2)^2$$
$$= A_{\Delta\Delta}\pi + A_{\Theta\Delta}p + J(ab)^2(ap)\, b_x,$$

weil ja die Ueberschiebung $(f, \Delta)^2 = 0$ ist. Es ist aber

$$(ab)^2(ap)\, b_x = (\Delta, p),$$

somit

$$(f, p^2)^2 = A_{\Delta\Delta}\pi + A_{\Theta\Delta}p + J(\Delta, p), \tag{3}$$

und ebenso

$$(\varphi, \pi^2)^2 = A_{\nabla\nabla}p + A_{\Theta\nabla}\pi - J(\nabla, \pi). \tag{4}$$

Ferner ergiebt sich:

$$(\varphi, p^2)^2 = (\alpha p)^2\alpha_x = A_{\Delta\Delta}(\varphi, \nabla)^2 - 2A_{\Theta\Delta}(\varphi, \Theta)^2 + \left(A_{\Theta\Theta} - \frac{J^2}{2}\right)(\varphi, \Delta)^2$$
$$+ J(\varphi, (ap)\, a_x^2)^2.$$

In dieser Relation ist einestheils $(\varphi, \nabla)^2 = 0$, und andererntheils:

$$(\varphi, (ap)a_x^2)^2 = (ap)(\alpha a)^2\alpha_x = (a\alpha)^2\{a_x(p\alpha) + p_x(a\alpha)\}$$
$$= (a\alpha)^3 p + (a\alpha)^2(p\alpha)a_x.$$

Da aber wegen der Fundamentalrelation $(f, \pi) + (\varphi, p) = 0$:

$$(\alpha a)^2(p\alpha)a_x = ((p\alpha)\alpha_x^2, a_x^3)^2 = ((b\pi)b_x^2, a_x^3)^2 = (ab)^2(b\pi)a_x = (\Delta, \pi),$$

so erhalten wir:

$$(\varphi, (ap)a_x^2)^2 = Jp + (\Delta, \pi).$$

Es wird sonach, unter Berücksichtigung dieser Werthe der einzelnen Glieder, und wegen Nr. 318, (2):

$$(\varphi, p^2)^2 = A_{\Theta\Delta}\pi + \left(A_{\Theta\Theta} + \frac{J^2}{2}\right)p + J(\Delta, \pi), \tag{5}$$

also auch

$$(f, \pi^2)^2 = A_{\Theta\nabla}p + \left(A_{\Theta\Theta} + \frac{J^2}{2}\right)\pi - J(\nabla, p). \tag{6}$$

Nun kann man die Ueberschiebung $(\varphi, p^2)^2$ auch schreiben:

$$((\varphi, p), p);$$

weil aber $(\varphi, p) = -(f, \pi)$, so ist auch

$$(\varphi, p^2)^2 = -((f, \pi), p)^2 = -(f, \pi\cdot p)^2,$$

und ebenso

$$(f, \pi^2)^2 = -((\varphi, p), \pi)^2 = -(\varphi, p\cdot\pi)^2.$$

Diese beiden letzten linearen Covarianten haben sonach dieselben Werthe, die wir bereits in (5) und (6) berechnet haben.

319. *Die Invarianten des simultanen Systems.* Von den sieben Invarianten, auf welche wir durch Aufstellung des Systemes geführt wurden, behalten wir folgende vier bei: J, $A_{\Delta\Delta}$, $A_{\nabla\nabla}$, $A_{\Delta\nabla}$. Die drei übrigen: $(f, K)^3$, $(\varphi, Q)^3$, $(Q, K)^3$ ersetzen wir durch andere, indem wir die übrigen Invarianten des simultanen Systemes Δ, ∇, Θ zu Hilfe nehmen. Es ist nämlich:

$$(f, K)^3 = (\alpha\nabla)(a\alpha)^2(a\nabla) = ((a\alpha)^2 a_x\alpha_x, \nabla)^2 = (\Theta, \nabla)^2 = A_{\Theta\nabla}, \tag{1}$$

und ebenso

$$(\varphi, Q)^3 = A_{\Theta\Delta}.$$

Ferner ist ein Glied der Ueberschiebung $(Q, K)^3$ dargestellt durch:

$$G = (a\Delta)(\alpha\nabla)(a\alpha)^2(\Delta\nabla).$$

Die rechte Seite geht aus der schon mehrmals benutzten Reihenentwicklung hervor:

$$(a\alpha)^2 a_y\alpha_x = \Theta_x\Theta_y + \frac{1}{2}J(yx),$$

wenn wir in ihr y durch Δ, x durch ∇ ersetzen und mit $(\Delta\nabla)$ multipliciren. Wir erhalten:

$$G = (\varDelta \nabla)\left\{(\Theta\nabla)(\Theta\varDelta) + \frac{1}{2} J(\varDelta\nabla)\right\}$$

$$= (\varDelta\nabla)(\Theta\nabla)(\Theta\varDelta) + \frac{1}{2} J A_{\varDelta\nabla}.$$

Man kann somit $(Q, K)^3$ ersetzen durch das erste Glied rechts

$$\Omega = (\varDelta\nabla)(\Theta\nabla)(\Theta\varDelta), \tag{2}$$

welches nichts anderes ist, als die simultane Invariante der drei quadratischen Formen $\varDelta$, ∇ und Θ.

Diese Form Ω lässt sich auch noch auf eine andere Weise darstellen. Wir hatten gefunden [vergl. Nr. 311, (1)]

$$(f, p) = (ap)a_x^2 = 2(\varDelta, \Theta) = 2(\varDelta\Theta)\varDelta_x\Theta_x.$$

Aus dem Ausdrucke rechts geht aber Ω hervor, wenn man diese Relation zweimal über ∇ schiebt; man erhält also:

$$((ap)a_x^2, \nabla)^2 = 2((\varDelta\Theta)\varDelta_x\Theta_x, \nabla)^2,$$

oder

$$(a\nabla)^2(ap) = -2\Omega.$$

Es ist aber

$$(a\nabla)^2(ap) = ((a\nabla)^2 a_x, p) = (\pi, p);$$

also ist

$$2\Omega = (p, \pi).$$

Es erübrigt noch, den Werth der nicht zum System gehörigen Invariante $A_{\Theta\Theta}$ zu bestimmen. Zu dem Zwecke ersetzen wir in der Reihenentwicklung

$$(a\alpha)^2 a_y \alpha_x = \Theta_x\Theta_y + \frac{1}{2} J(yx)$$

y durch b und x durch β und multipliciren die Entwicklung mit $(b\beta)^2$; dann erhalten wir:

$$(a\alpha)^2(ab)(\alpha\beta)(b\beta)^2 = (b\beta)^2\left\{(\Theta\beta)(\Theta b) + \frac{J}{2}(b\beta)\right\}$$

$$= (\Theta, (b\beta)^2 b_x\beta_x) + \frac{J^2}{2}$$

$$= A_{\Theta\Theta} + \frac{J^2}{2}. \tag{3}$$

Um den Ausdruck links umzuformen beachte man, dass wegen des Factors (ab) es vortheilhaft ist, a mit b zu vertauschen und die halbe Summe zu nehmen; dann wird:

$$(a\alpha)^2(b\beta)^2(ab)(\alpha\beta) = \frac{1}{2}(ab)(\alpha\beta)\{(a\alpha)^2(b\beta)^2 - (b\alpha)^2(a\beta)^2\}$$

$$= \frac{1}{2}(ab)(\alpha\beta)\{(a\alpha)(b\beta) + (b\alpha)(a\beta)\}$$
$$\{(a\alpha)(b\beta) - (b\alpha)(a\beta)\}$$

$$= \frac{1}{2}(ab)^2(\alpha\beta)^2\{(a\alpha)(b\beta) + (b\alpha)(a\beta\}.$$

Die beiden Terme rechts stimmen überein; also ist:

$$(a\alpha)^2(b\beta)^2(ab)(\alpha\beta) = (ab)^2(\alpha\beta)^2(a\alpha)(b\beta) = (\varDelta \nabla)^2 = A_{\varDelta\nabla}. \quad (4)$$

Substituirt man daher (4) in (3), so erhält man:

$$A_{\Theta\Theta} = A_{\varDelta\nabla} - \frac{J^2}{2}. \quad (5)$$

Fassen wir wiederum die sieben Invarianten des Systemes zusammen, so sind dieselben repräsentirt durch:

$$A_{\varDelta\varDelta},\ A_{\nabla\nabla},\ J,\ A_{\varDelta\nabla},\ A_{\varDelta\Theta},\ A_{\nabla\Theta},\ \Omega = R_{\varDelta\nabla\Theta}.$$

Zwischen diesen sieben Invarianten müssen, wie schon früher erwähnt, zwei Relationen bestehen. Wir wollen sie im Folgenden berechnen.

320. *Invariantenrelation für* Ω^2. Zunächst weiss man aus der Theorie der quadratischen Formen, dass das Quadrat der schiefen Invariante Ω sich darstellen lässt durch [vgl. Nr. 134, (2) β)] die Determinante:

$$2\Omega^2 = \begin{vmatrix} A_{\varDelta\varDelta}, & A_{\Theta\varDelta}, & A_{\nabla\varDelta} \\ A_{\varDelta\Theta}, & A_{\Theta\Theta}, & A_{\nabla\Theta} \\ A_{\varDelta\nabla}, & A_{\Theta\nabla}, & A_{\nabla\nabla} \end{vmatrix}.$$

Wir bezeichnen diese Determinante mit U und ihre Unterdeterminanten mit U_{ik}. Diese Unterdeterminanten U_{ik} sind nach der Theorie der quadratischen Formen nichts anderes als die zweiten Ueberschiebungen von Functionaldeterminanten der drei Formen $\varDelta$, ∇, Θ. Denn ersetzen wir die dort [vgl. Nr. 134, (1) β) und γ)] mit f, φ, ψ bezeichneten quadratischen Formen durch $\varDelta$, resp. Θ, ∇ und demnach $\vartheta_1 = (\varphi, \psi)$, $\vartheta_2 = (\psi, f)$, $\vartheta_3 = (f, \varphi)$ durch (Θ, ∇), resp. $(\nabla, \varDelta)$, $(\varDelta\Theta)$, so erhalten wir unmittelbar die folgenden sechs Relationen:

$$\begin{aligned}
2A_{\vartheta_1\vartheta_1} &= 2((\Theta, \nabla), (\Theta, \nabla))^2 = A_{\Theta\Theta}A_{\nabla\nabla} - A_{\nabla\Theta}^2 &&= + U_{11} \\
2A_{\vartheta_2\vartheta_2} &= 2((\nabla, \varDelta), (\nabla, \varDelta))^2 = A_{\nabla\nabla}A_{\varDelta\varDelta} - A_{\nabla\varDelta}^2 &&= + U_{22} \\
2A_{\vartheta_3\vartheta_3} &= 2((\varDelta, \Theta), (\varDelta, \Theta))^2 = A_{\varDelta\varDelta}A_{\Theta\Theta} - A_{\varDelta\Theta}^2 &&= + U_{33} \\
2A_{\vartheta_1\vartheta_2} &= 2((\Theta, \nabla), (\nabla, \varDelta))^2 = A_{\nabla\varDelta}A_{\nabla\Theta} - A_{\nabla\nabla}A_{\varDelta\Theta} &&= - U_{12} \\
2A_{\vartheta_1\vartheta_3} &= 2((\Theta, \nabla), (\varDelta, \Theta))^2 = A_{\Theta\varDelta}A_{\nabla\Theta} - A_{\Theta\Theta}A_{\varDelta\nabla} &&= + U_{13} \\
2A_{\vartheta_2\vartheta_3} &= 2((\nabla, \varDelta), (\varDelta, \Theta))^2 = A_{\varDelta\Theta}A_{\varDelta\nabla} - A_{\varDelta\varDelta}A_{\Theta\nabla} &&= - U_{23}.
\end{aligned}$$

Diese Unterdeterminanten spielen bei der typischen Darstellung von $\varDelta$, ∇ und Θ eine besondere Rolle. Denn sie sind es, welche die typischen Coefficienten liefern. Sie dienen ferner dazu, die Relation, welche das Product ΩJ mit den andern fundamentalen Invarianten bildet, in einfacher Weise darzustellen.

321. *Invariantenrelation für $\Omega \cdot J$.* Man hat für das Product dieser beiden Invarianten den symbolischen Ausdruck:

$$2J \cdot \Omega = (a\alpha)^3 \cdot (p\pi),$$

oder, indem wir den Identitätssatz benutzen:

$$\begin{aligned} 2J \cdot \Omega &= (a\alpha)^2 \{(ap)(\alpha\pi) - (a\pi)(\alpha p)\} \\ &= (a\alpha)^2 (ap)(\alpha\pi) - (a\alpha)^2 (a\pi)(\alpha p) \\ &= ((ap)a_x^2, (\alpha\pi)\alpha_x^2)^2 - ((a\pi)a_x^2, (\alpha p)\alpha_x^2)^2 \\ &= ((f, p), (\varphi, \pi))^2 - ((f, \pi), (\varphi, p))^2. \end{aligned}$$

Nun bestehen aber nach dem Früheren die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} (f, \pi) &= -\ (\Delta, \nabla) \\ (\varphi, p) &= -\ (\nabla, \Delta) \\ (f, p) &= -2(\Theta, \Delta) \\ (\varphi, \pi) &= -2(\Theta, \nabla) \end{aligned}\right\}. \qquad (I)$$

Demnach wird die Relation für $2J \cdot \Omega$:

$$\begin{aligned} 2J \cdot \Omega &= 4((\Theta, \Delta), (\Theta, \nabla))^2 - ((\Delta, \nabla), (\nabla, \Delta))^2 \\ &= ((\nabla, \Delta), (\nabla, \Delta))^2 - 4((\Theta, \nabla), (\Delta, \Theta))^2, \end{aligned}$$

oder:

$$4J \cdot \Omega = U_{22} - 4U_{13}.$$

Hiemit seien die Untersuchungen über die Relationen der Formen des Systems von f und φ beschlossen.

322. *Zusammenfassung.* Ehe wir zu Anwendungen der bisherigen theoretischen Untersuchungen übergehen, dürfte es angezeigt sein, eine tabellarische Uebersicht über die gewonnenen Resultate zu entwerfen.

Die 26 Formen des simultanen Systemes von f und φ sind durch folgende Symbole dargestellt:

$$\vartheta = (a\alpha)a_x^2\alpha_x^2,$$

$f = a_x^3,$	$\Delta = (ab)^2 a_x b_x,$	$\pi = (a\nabla)^2 a_x,$	$A_{\Delta\Delta}$
$\varphi = \alpha_x^3,$	$\nabla = (\alpha\beta)^2 \alpha_x\beta_x,$	$p = (\alpha\Delta)^2\alpha_x,$	$A_{\nabla\nabla}$
$Q = (a\Delta)a_x^2\Delta_x,$	$\Theta = (a\alpha)^2 a_x\alpha_x,$	$(\Delta, p),$	$A_{\Delta\nabla}$
$K = (\alpha\nabla)\alpha_x^2\nabla_x,$	$(f, p),$	$(\Delta, \pi),$	$A_{\Delta\Theta}$
$(f, \nabla),$	$(\varphi, \pi),$	$(\nabla, p),$	$A_{\nabla\Theta}$
$(\varphi, \Delta),$	$(f, \pi) = -(\varphi, p),$	$(\nabla, \pi),$	$J = (a\alpha)^3$

$$\Omega = (\Delta\nabla)(\nabla\Theta)(\Delta\Theta).$$

Zwischen den Ueberschiebungen dieser Formen bestehen insbesondere folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned}(f,\,\Theta)^2 &= -\tfrac{1}{2}\,p, & (\vartheta,\,f)^3 &= -\tfrac{3}{4}\,p\\ (\varphi,\,\Theta)^2 &= -\tfrac{1}{2}\,\pi, & (\vartheta,\,\varphi)^3 &= +\tfrac{3}{4}\,\pi\end{aligned}\right\} \tag{I}$$

$$\left.\begin{aligned}(f,\,p) &= -2(\Theta,\,\Delta), & (\vartheta,\,p) &= \tfrac{1}{2}\{\Delta\pi + \Theta p\}\\ (\varphi,\,\pi) &= -2(\Theta,\,\nabla), & (\vartheta,\,\pi) &= -\tfrac{1}{2}\{\nabla p + \Theta\pi\}\end{aligned}\right\} \tag{II}$$

$$\left.\begin{aligned}(f,\,\pi) &= -(\Delta,\,\nabla)\\ (\varphi,\,p) &= -(\nabla,\,\Delta)\end{aligned}\right\},\ \text{daher: } (f,\,\pi) + (\varphi,\,p) = 0 \tag{III}$$

$$\left.\begin{aligned}p^2 &= A_{\Delta\Delta}\nabla - 2A_{\Theta\Delta}\Theta + \left(A_{\Theta\Theta} - \frac{J^2}{2}\right)\Delta + J(f,\,p)\\ \pi^2 &= A_{\nabla\nabla}\Delta - 2A_{\Theta\nabla}\Theta + \left(A_{\Theta\Theta} - \frac{J^2}{2}\right)\nabla - J(\varphi,\,\pi)\end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

$$\left.\begin{aligned}(f,\,p^2)^2 &= A_{\Delta\Delta}\pi + A_{\Theta\Delta}p + J(\Delta,\,p)\\ (\varphi,\,\pi^2)^2 &= A_{\nabla\nabla}p + A_{\Theta\nabla}\pi - J(\nabla,\,\pi)\\ (\varphi,\,p^2)^2 &= A_{\Theta\Delta}\pi + \left(A_{\Theta\Theta} + \frac{J^2}{2}\right)p + J(\Delta,\,\pi) = -(f,\,\pi p)^2\\ (f,\,\pi^2)^2 &= A_{\Theta\nabla}p + \left(A_{\Theta\Theta} + \frac{J^2}{2}\right)\pi - J(\nabla,\,p) = -(\varphi,\,\pi p)^2\end{aligned}\right\} \tag{V}$$

$$A_{\Theta\Theta} = A_{\nabla\Delta} - \frac{J^2}{2} \tag{VI}$$

$$2\Omega = (p\pi),\quad 2\Omega^2 = (A_{\Delta\Delta}\,A_{\Theta\Theta}\,A_{\nabla\nabla}). \tag{VII}$$

Die Unterdeterminanten U_{ik} dieser Determinante $(A_{\Delta\Delta}\,A_{\Theta\Theta}\,A_{\nabla\nabla})$ sind den sechs Invarianten, die zum simultanen System der drei Functionaldeterminanten (Θ,∇), (∇,Δ), (Δ,Θ) gehören, proportional. (Vergl. Nr. 320.) Endlich ist:

$$4\,\Omega J = U_{22} - 4\,U_{13}. \tag{VIII}$$

§ 33. Anwendungen des simultanen Formensystems zweier cubischer Formen.

323. *Typische Darstellung der quadratischen Covarianten* Δ, Θ, ∇. Die ersten Anwendungen, die wir von den im vorhergegangenen Paragraphen gewonnenen Resultaten machen, beziehen sich auf typische Darstellungen von Formen des Systemes unter Zugrundelegung der beiden linearen Covarianten p und π. Um eine der drei quadratischen Covarianten Δ, ∇ oder Θ, etwa die Covariante Δ, typisch darzustellen, gehen wir wiederum aus von der Identität

$$(p\pi)\Delta_x = (\Delta\pi)p_x - (\Delta p)\pi_x.$$

Wir erheben sie auf die zweite Potenz und erhalten:

$$4\Omega^2\Delta = (\Delta\pi)^2 p^2 - 2(\Delta p)(\Delta\pi)p\pi + (\Delta p)^2\pi.$$

Für die typischen Coefficienten $(\Delta\pi)^2$, $(\Delta p)(\Delta\pi)$, $(\Delta p)^2$ ergeben sich aber unmittelbar die Werthe:

$$(\Delta p)^2 = 2\,U_{33} = 2\,\{A_{\Delta\Delta}A_{\Theta\Theta} - A^2_{\Delta\Theta}\}$$
$$(\Delta p)(\Delta\pi) = U_{23} \quad = A_{\Theta\nabla}A_{\Delta\Delta} - A_{\Theta\Delta}A_{\nabla\Delta}$$
$$(\Delta\pi)^2 = \frac{1}{2}\,U_{22} = \frac{1}{2}\,\{A_{\Delta\Delta}A_{\nabla\nabla} - A^2_{\nabla\Delta}\}.$$

Denn es ist (vergl. Nr. 320 und 322):

$$2\,U_{33} = 4((\Delta,\Theta),(\Delta,\Theta))^2 = ((f,p),(f,p))^2 = (ab)^2(ap)(bp) = (\Delta p)^2$$
$$U_{23} = 2((\nabla,\Delta),(\Theta,\Delta))^2 = ((f,p),(f,\pi))^2 = (ab)^2(ap)(b\pi) = (\Delta p)(\Delta\pi)$$
$$\frac{1}{2}\,U_{22} = ((\Delta,\nabla),(\Delta,\nabla))^2 = ((f,\pi),(f,\pi))^2 = (ab)^2(a\pi)(b\pi) = (\Delta\pi)^2.$$

In derselben Weise gelangt man zu den typischen Coefficienten von ∇ und Θ. Man braucht nur die Ueberschiebungen:

$$((\varphi,\pi),(\varphi,\pi))^2,\quad ((\varphi,\pi),(\varphi,p))^2,\quad ((\varphi,p),(\varphi,p))^2$$
$$((f,p),(\varphi,p))^2,\quad ((f,\pi),(\varphi,p))^2,\quad ((f,\pi),(\varphi,\pi))^2$$

zu berechnen.

324. *Die typischen Coefficienten von f und φ.* Ebenso bietet, nachdem wir die Ueberschiebungen

$$(f,p^2)^2,\quad (f,p\pi)^2,\quad (f,\pi^2)^2$$
$$(\varphi,p^2)^2,\quad (\varphi,p\pi)^2,\quad (\varphi,\pi^2)^2$$

bereits berechnet haben, die typische Darstellung von f und φ mit Hilfe der linearen Covarianten p und π keine Schwierigkeiten mehr. Wir haben die für diese Ueberschiebungen gegebenen Relationen (vgl. Nr. 322) nur noch einmal über die Formen p und π zu schieben und hiebei die sich aus den Betrachtungen in Nr. 323 ergebenden Werthe für $(\Delta p)^2$, $(\Delta\pi)^2$ etc. zu benutzen.

Sind auf diese Weise die typischen Coefficienten berechnet, so ist die typische Darstellung von f und φ wieder durch die Identitäten:

$$(p\pi)^3 a_x^3 = \{(a\pi)p_x - (ap)\pi_x\}^3$$
$$(p\pi)^3 \alpha_x^3 = \{(\alpha\pi)p_x - (\alpha p)\pi_x\}^3$$

unmittelbar gegeben.

Die leicht auszuführende Rechnung ergiebt, dass f und φ in der typischen Darstellung bis auf einen Invariantenfactor als die beiden

ersten Differentialquotienten einer gewissen Form vierten Grades erscheinen, nämlich der Form:

$$F = -8\Omega^3\{f\pi + \varphi p\}$$
$$= Ap^4 + 4Bp^3\pi + 3Cp^2\pi^2 + 4Dp\pi^3 + E\pi^4.$$

Diese Eigenschaft hat Clebsch für das Problem der Transformation dritter Ordnung in der Theorie der elliptischen Functionen ausgebeutet. Da sie auch noch anderweitig interessante Beziehungen bietet, so wollen wir bei Betrachtung dieser Form F noch ein wenig verweilen.

325. *Die ersten Polaren der Form F nach p und π.* Wir werden zunächst noch in anderer Weise zeigen, dass, wenn

$$F = f\pi + \varphi p$$

ist, die ersten Differentialquotienten von F nach p und π, oder was dasselbe ist, die ersten Polaren nach p und π proportional sind den Formen f resp. φ.

Setzen wir nämlich etwa

$$F = r_x^4,$$

so ist:

$$4(F, \pi) = 4r_x^3(r\pi);$$

und wegen der Voraussetzung auch

$$4(F, \pi) = 3(f, \pi)\pi + (\pi, \pi)f + 3(\varphi, \pi)p + \varphi(p, \pi)$$
$$= 3(a\pi)a_x^2\pi_x + 3(\alpha\pi)\alpha_x^2 p_x + \varphi(p, \pi).$$

Berücksichtigen wir, dass $(f, \pi) = -(\varphi, p)$, so wird

$$4r_x^3(r\pi) = -3(\alpha p)\alpha_x^2\pi_x + 3(\alpha\pi)\alpha_x^2 p_x + \varphi(p\pi)$$
$$= 3\alpha_x^2\{(\alpha\pi)p_x - (\alpha p)\pi_x\} + \varphi(p\pi)$$
$$= 4\varphi(p\pi) = 8\Omega\varphi.$$

Demnach ist:

$$r_x^3(r\pi) = 2\Omega\varphi, \tag{1}$$

und ebenso findet sich:

$$r_x^3(rp) = -2\Omega f. \tag{2}$$

326. *Das System der Form F.* Dasselbe besteht bekanntlich aus den Formen:

$$\varDelta_F = (F, F)^2, \quad t_F = (F, \varDelta_F), \quad i_F = (F, F)^4, \quad j_F = (F, \varDelta_F)^4.$$

Mit Hilfe der Relationen (1) und (2) können wir dasselbe leicht durch die simultanen Formen von f und φ ausdrücken.

Ueberschiebt man nämlich diese beiden Relationen dreimal übereinander, so kommt:

$$(rr_1)^3(r\pi)(r_1 p) = 4\Omega^2 J.$$

Vertauscht man links r mit r_1 und nimmt die halbe Summe, so kommt:

$$-\frac{1}{2}(rr_1)^4(p\pi) = 4\Omega^2 J,$$

oder, da $(p\pi) = 2\Omega$:

$$i_F = -4\Omega J. \tag{1}$$

Ebenso findet man durch einmalige Ueberschiebung von (1) und (2):

$$(rr_1)(r\pi)(r_1 p) r_x^2 r_{1x}^2 = -4\Omega^2(\varphi, f) = 4\Omega^2\vartheta.$$

Vertauscht man wieder r mit r_1 und nimmt die halbe Summe, so kommt:

$$-\Omega\Delta_F = \quad 4\Omega^2\vartheta,$$

oder

$$\Delta_F = -4\Omega\vartheta. \tag{2a}$$

Zur Berechnung von t_F und j_F benutzen wir die in Nr. 322 aufgestellten vier Relationen:

$$\left.\begin{array}{ll} (\vartheta, f)^3 = -\frac{3}{4}p, & (\vartheta, \varphi)^3 = +\frac{3}{4}\pi \\ (\vartheta, p) = \frac{1}{2}(\Delta\pi + \Theta p), & (\vartheta, \pi) = -\frac{1}{2}(\nabla p + \Theta\pi) \end{array}\right\}. \tag{2b}$$

Es ist dann:

$$\begin{aligned} j_F = (F, -4\Omega\vartheta)^4 &= -4\Omega(f\pi + \varphi p, \vartheta)^4 \\ &= -4\Omega\{(\vartheta, f\pi)^4 + (\vartheta, fp)^4\} \\ &= -4\Omega\{((\vartheta, f)^3, \pi) + ((\vartheta, \varphi), p)\} \\ &= -4\Omega\left\{-\frac{3}{4}(p\pi) + \frac{3}{4}(\pi p)\right\}, \end{aligned}$$

also:

$$j_F = +12\Omega^2. \tag{3}$$

Ferner geht mit Rücksicht auf die Formeln (2a) und (2b) und (1) und (2) Nr. 325 aus der Identität:

$$(F, \Delta_F)(p, \pi) = (F, p)(\Delta_F, \pi) - (F, \pi)(\Delta_F, p)$$

die Relation hervor:

$$\begin{aligned} t_F \cdot 2\Omega = (-2\Omega f)\Big(-4\Omega \cdot -\frac{1}{2}\{\nabla p + \Theta\pi\}\Big) \\ -(+2\Omega\varphi)\Big(-4\Omega \cdot \frac{1}{2}(\Delta\pi + \Theta p)\Big), \end{aligned}$$

oder:

$$t_F = 2\Omega \cdot \{\varphi(\Delta\pi + \Theta p) - f(\nabla p + \Theta\pi)\}. \tag{4}$$

Die eben angestellten Berechnungen zeigen einen merkwürdigen Zusammenhang zwischen den drei Formen F, p, π einerseits und den beiden Formen f und φ andererseits. Sind die Coefficienten einer biquadratischen Form so beschaffen, dass die Invariante j proportional der Invariante $(p\pi)$, dass also die Relation (3)

$$12\Omega^2 = j_F$$

besteht, so stimmt das simultane System von F, p, π überein mit dem simultanen System zweier cubischen Formen f und φ, welche p und π zu linearen Covarianten haben. In der That reducirt sich auch durch die Relation (3) die Zahl 9 der Constanten von F, p und π auf 8 willkürliche, was mit der Zahl der unabhängigen Coefficienten von f und φ übereinstimmt.

327. *Resultante von f und φ.* Die Resultante zweier Formen F_1 und F_2, also R_{F_1, F_2}, ist bis auf den Factor $(p\pi)^3$ gleich der Resultante der beiden Formen $\pi_2 F_1 - \pi_1 F_2$ und $p_2 F_1 - p_1 F_2$, d. h. es ist:

$$(p\pi)^3 R_{F_1, F_2} = R_{\pi_2 F_1 - \pi_1 F_2,\ p_2 F_1 - p_1 F_2}, \text{ (vgl. Bd. I Nr. 256)},$$

wenn F_1 und F_2 Formen dritten Grades in x sind. Sind nun F_1 und F_2 die ersten Differentialquotienten von F, so ist einestheils R_{F_1, F_2} gleich der Discriminante R von F und anderntheils ist wegen der Relationen (1) und (2) Nr. 325

$$R_{\pi_2 F_1 - \pi_1 F_2,\ p_2 F_1 - p_1 F_2} = R_{2\Omega\varphi,\ -2\Omega f},$$

also bis auf einen Zahlenfactor gleich

$$\Omega^6 R_{f, \varphi}.$$

Man hat also die Relation (von einem Zahlenfactor abgesehen):

$$\Omega^3 R = \Omega^6 R_{f, \varphi},$$

oder weil, wiederum von numerischen Factoren abgesehen,

$$R = 6 j_F^2 - i_F^3 = 6 \cdot 12^2 \Omega^4 - 64\, \Omega^3 \cdot J^3,$$

so ist: $$R_{f, \varphi} = 32 \{ 27 \Omega - 2 J^3 \}.$$

328. *Fälle, in denen die typische Darstellung unmöglich ist.* Sind alle sechs linearen Formen

$$p, \quad (\Delta, p), \quad (\nabla, p)$$
$$\pi, \quad (\Delta, \pi), \quad (\nabla, \pi)$$

einander proportional, so kann eine typische Darstellung durch lineare Formen nicht mehr geleistet werden. In diesem Falle verschwindet zunächst jedenfalls $\Omega = (p\pi)$. Dies kann eine Folge des Verschwindens aller Unterdeterminanten U_{ik} sein oder nicht, und je nachdem werden entweder alle linearen Covarianten identisch verschwinden, oder alle einander proportional sein, oder bei nicht verschwindenden U_{ik} zwei von einander verschiedene lineare Formen existiren. Wir wollen daher der Reihe nach folgende zwei Fragen untersuchen:

1) Welche Eigenschaften haben f und φ, wenn $\Omega = 0$, $U_{ik} \lessgtr 0$?
2) Welche Eigenschaften haben f und φ, wenn $U_{ik} = 0$, und also auch $\Omega = 0$?

329. *Beantwortung der ersten Frage.* Wir setzen voraus:

$$\Omega = 0, \quad U_{ik} \gtrless 0.$$

Wenn Ω verschwindet, also immer p für einen bestimmten Werth von λ mit $\lambda \cdot \pi$ übereinstimmt, so muss wegen der Relation:

$$(f, \pi) + (\varphi, p) = 0$$

die Ueberschiebung:

$$(f, \pi) + \lambda \cdot (\varphi, p) = (f + \lambda \varphi, \pi)$$

identisch verschwinden. Das Verschwinden der Functionaldeterminante

$$(f + \lambda \varphi, \pi) = 0$$

lehrt aber, dass $f + \lambda \varphi$ eine Potenz von π sein muss. Wir haben also in diesem Falle:

$$f + \lambda \varphi = c \cdot \pi^3,$$

d. h. es giebt eine Combination der beiden Formen f und φ, welche ein vollständiger Cubus ist.

Umgekehrt: Ist $f + \lambda \varphi$ ein vollständiger Cubus, also

$$f + \lambda \varphi = r_x^3,$$

dann ist die zweite Ueberschiebung von $f + \lambda \varphi$ über ∇, wegen $(\varphi, \nabla)^2 = 0$:

$$p = r (\nabla r)^2 \tag{1}$$

und ferner ist die zweite Ueberschiebung über Δ, wegen $(f, \Delta)^2 = 0$:

$$\lambda \pi = r (\Delta r)^2 \tag{2}$$

Aus der Comparation von (1) mit (2) folgt:

$$p = \lambda \cdot \frac{(\nabla r)^2}{(\Delta r)^2} \cdot \pi = \varrho \cdot \pi$$

und demnach:

$$\Omega = \frac{(p \pi)}{2} = 0.$$

330. *Beantwortung der zweiten Frage.* Wir setzen voraus:

$$U_{ik} = 0, \quad \text{und demnach} \quad \Omega = 0, \quad i \text{ und } k = 1, 2, 3.$$

In diesem Falle sind aber auch p und π identisch null. Um diesen Lehrsatz zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, dass Δ, resp. ∇ identisch verschwindet; dann ist auch

$$(\varphi, \Delta)^2 = p = 0, \quad \text{und} \quad (f, \nabla)^2 = \pi = 0.$$

Nun ist (vgl. Nr. 323)

$$U_{33} = \frac{1}{2} (\Delta p)^2.$$

Da aber $U_{33} = 0$, so folgt

$$(\Delta p)^2 = 0$$

und ebenso $(\nabla p)^2 = 0, \ (\Theta p)^2 = 0$ etc.

Diese Relationen lehren, dass Δ, ∇, Θ den Factor p im ersten Grade besitzen. Nun ist aber:

$$\Theta_x^2(\Delta p)^2 - \Delta_x^2(\Theta p)^2 = (\Theta_x(\Delta p) + \Delta_x(\Theta p))(\Theta_x(\Delta p) - \Delta_x(\Theta p))$$
$$= (\Theta_x(\Delta p) + \Delta_x(\Theta p))(\Delta\Theta p)p_x$$
$$= ((\Delta\Theta)\Delta_x\Theta_x, p)p$$
$$= ((\Delta, \Theta), p)p.$$

Die linke Seite ist null; folglich auch, wenn $p \gtrless 0$ ist:

$$((\Delta, \Theta), p) = 0.$$

Es ist aber (vgl. Nr. 322):

$$(\Delta, \Theta) = \frac{1}{2}(f, p) = \frac{1}{2}(ap)a_x^2,$$

also

$$(ap)^2 a_x = 0$$

und ebenso

$$(\alpha p)^2 \alpha_x = 0,$$

d. h. die cubischen Formen f und φ besitzen p als quadratischen Factor. Daraus folgt nach der Theorie der cubischen Formen, dass auch Δ und ∇ ihn quadratisch enthalten. Ebenso aber auch Θ. Denn wenn f und φ den Factor p quadratisch enthalten, so besitzt ihn auch $f + \lambda\varphi$ und demnach auch die Hesse'sche $\Delta_{f+\lambda\varphi}$ dieser Form. Nun ist

$$\Delta_{f+\lambda\varphi} = \Delta + 2\lambda\Theta + \lambda^2\nabla.$$

Hierin besitzen $\Delta_{f+\lambda\varphi}$, Δ, ∇ den Factor p quadratisch, also auch Θ. Wenn aber Δ, ∇, Θ diesen Factor quadratisch enthalten, so ist

$$(\Delta p)\Delta_x = 0, \quad (\nabla p)\nabla_x = 0, \quad (\Theta p)\Theta_x = 0.$$

Bilden wir also:

$$\Theta_x^2(\Delta p)\Delta_x - \Delta_x^2(\Theta p)\Theta_x = \Theta_x\Delta_x\{(\Delta p)\Theta_x - (\Theta p)\Delta_x\}$$
$$= p\cdot(\Delta\Theta)\Theta_x\Delta_x = p\cdot(\Delta, \Theta),$$

so ist, da die linke Seite verschwindet und p von Null verschieden sein soll:

$$(\Delta, \Theta) = (f, p) = a_x^2(ap) = 0,$$

d. h. f besitzt den Factor p im dritten Grade, und also ebenso auch φ. Wenn aber f und φ reine Cuben sind, dann verschwinden ihre Hesse'schen Formen und folglich ist, wie behauptet wurde:

$$(\varphi, \Delta)^2 = p = 0, \quad (f, \nabla)^2 = \pi = 0.$$

331. *Folgerungen für f und φ.* Wir setzen also voraus

$$p = 0, \quad \pi = 0.$$

Wenn p und π identisch verschwinden, so müssen ihre Coefficienten $p_1\ p_2\ \pi_1\ \pi_2$ einzeln null sein, d. h. (vgl. Nr. 312) es müssen die Determinanten der Matrix

$$V = \begin{vmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{\alpha}_0 & \bar{\alpha}_1 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{\alpha}_2 & \bar{\alpha}_3 \end{vmatrix}$$

verschwinden. Es mögen hiebei zunächst wenigstens die Minoren dieser Determinanten von null verschieden sein. Wir multipliciren alsdann mit dieser Matrix Zeile für Zeile die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ \Delta_1 & -\Delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & \nabla_2 & -\nabla_1 \end{vmatrix}.$$

Das Product ist einerseits Null, da alle Determinanten von V verschwinden. Andererseits ist es dargestellt durch die Matrix:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & Q_{11} & \varphi_{11} & K_{11} \\ f_{12} & Q_{12} & \varphi_{12} & K_{12} \\ f_{22} & Q_{22} & \varphi_{22} & K_{22} \end{vmatrix}.$$

Sie verschwindet, d. h. ihre einzelnen Determinanten sind null, nicht aber deren Minoren. Greifen wir nun etwa die erste Determinante heraus

$$\begin{vmatrix} f_{11} & Q_{11} & \varphi_{11} \\ f_{12} & Q_{12} & \varphi_{12} \\ f_{22} & Q_{22} & \varphi_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Da die Minoren nicht verschwinden, so muss φ eine lineare Function von f und Q sein. Denn die Determinante (1) lässt sich schreiben:

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_0 x_1 + \bar{a}_1 x_2, & \bar{Q}_0 x_1 + \bar{Q}_1 x_2, & \bar{\alpha}_0 x_1 + \bar{\alpha}_1 x_2 \\ \bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2, & \bar{Q}_1 x_1 + \bar{Q}_2 x_2, & \bar{\alpha}_1 x_1 + \bar{\alpha}_2 x_2 \\ \bar{a}_2 x_1 + \bar{a}_3 x_2, & \bar{Q}_2 x_1 + \bar{Q}_3 x_2, & \bar{\alpha}_2 x_1 + \bar{\alpha}_3 x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Zerlegt man diese Determinante in ihre 8 Summanden und fasst gleiche Potenzen von x zusammen, so müssen die Coefficienten von x^λ einzeln verschwinden. Nun ist z. B. der Coefficient von x_1^3

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_0 & \bar{Q}_0 & \bar{\alpha}_0 \\ \bar{a}_1 & \bar{Q}_1 & \bar{\alpha}_1 \\ \bar{a}_2 & \bar{Q}_2 & \bar{\alpha}_2 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. es müssen die Gleichungen bestehen:

$$k\bar{a}_0 + \lambda\bar{Q}_0 + \varrho\bar{\alpha}_0 = 0$$
$$k\bar{a}_1 + \lambda\bar{Q}_1 + \varrho\bar{\alpha}_1 = 0$$
$$k\bar{a}_2 + \lambda\bar{Q}_2 + \varrho\bar{\alpha}_2 = 0.$$

Daraus geht aber die Richtigkeit der Behauptung direct hervor, dass $\varphi = \alpha_x^3$ eine lineare Function $f = a_x^3$ und $Q = Q_x^3$ ist.

Wenn also p und π identisch null sind, so ist φ keine selbstständige Form, sondern eine Covariante $f + \mu Q$. Dies gilt, so lange die Minoren der Determinanten $\gtrless 0$ sind. Verschwinden auch diese identisch, die, in so weit sie aus den beiden ersten resp. aus den beiden letzten Colonnen von V entnommen sind, nichts anderes als die Coefficienten von Δ und ∇ darstellen, so sind f und φ vollständige Cuben, da Δ und ∇ in diesem Falle null sind.

Wir haben demnach folgende Resultate:

„Ist $\Omega = 0$, aber U_{ik} im Allgemeinen von null verschieden, so existirt eine lineare Combination $f + \lambda\varphi$, welche dem Cubus der linearen Form π proportional ist."

„Ist $U_{ik} = 0$, i und $k = 1, 2, 3$ und daher $\Omega = 0$, so ist entweder $\varphi =$ Const. $(f + \mu Q)$, oder f und φ sind vollständige Cuben; in diesen beiden Fällen ist eine typische Darstellung durch p und π unmöglich."

§ 34. Die Schwesterformen.

332. *Einleitende Bemerkungen.* Wir haben uns bisher mit der Aufstellung des Systemes jener Grundformen beschäftigt, welche die Eigenschaft haben, dass alle Co- und Invarianten, die eine bestimmte Form besitzt, rationale und ganze Functionen derselben sind.

Einem solchen System gegenüber steht nun eine Reihe anderer Systeme von Formen von der Eigenschaft, dass sämmtliche Co- und Invarianten von $f = a_x^n$ zwar noch rationale Functionen derselben sind, aber nicht mehr ganze. Dies ist von vornherein einzusehen. Denn die Form f besitzt zunächst $(n + 1)$ Constante. Vier derselben können durch lineare Transformationen bestimmte Zahlenwerthe annehmen; die ursprüngliche Form hängt alsdann von den $n - 3$ transformirten Constanten und der Transformationsdeterminante ab, d. i. von $n - 2$ Parametern. Es muss also bereits zwischen $n - 1$ Invarianten der Form f eine Relation bestehen. Nehmen wir die beiden Variabeln x_1 und x_2 als zwei weitere Parameter hinzu, so hängt jede Covariante der Form f von n willkürlichen Grössen ab; demnach sind auch stets $n + 1$ Covarianten von f durch eine Relation verknüpft, deren Coefficienten nur numerische Constante sind. Wenn nun das vollständige System von f aus s Formen besteht, so müssen zwischen denselben $s - n$ Relationen existiren. Jede Covariante lässt sich aber durch die s Formen rational und ganz darstellen. Eliminirt man ver-

möge der $s-n$ Relationen aus jeder solchen Darstellung $s-n$ bestimmte Formen, ein Process, der immer rational ausführbar ist, aber im Allgemeinen zu einer gebrochenen Function führt, so ist jede Covariante durch eine rationale und gebrochene Function von n bestimmten Covarianten dargestellt. Diese n ausgewählten Covarianten bilden in diesem Sinne ein System, und die Aufgabe, ein solches System von Formen herzustellen, ist auf unendlich mannigfaltige Weisen lösbar, da ja auch die s Formen des vollständigen Systemes nicht a priori fest sind, sondern stets durch andere ersetzt werden können. Der einfachste Fall eines solchen Systemes von n Formen ist jener, in welchem der Nenner dieser rationalen Functionen eine Potenz von f ist, während die Zähler Aggregate von Producten ganz bestimmter Covarianten sind.

Wir werden uns hier nur mit diesem einfachsten Falle beschäftigen und verweisen wegen der allgemeinen Untersuchungen auf Clebsch: „Binäre Formen“, siebenter Abschnitt. Hier sei nur noch erwähnt, dass die Aufgabe, jene Formen zu ermitteln, durch welche sich alle Formen des Systems rational ausdrücken lassen, im innigsten Zusammenhange steht mit der typischen Darstellung von Formen, sowie mit der Aufgabe, Covariantenrelationen herzustellen, wie auch aus diesen einleitenden Betrachtungen hervorgehen mag (vgl. auch Nr. 335).

333. *Jedes symbolische Product ist gleich einer rationalen Function von Covarianten, deren Nenner eine Potenz von f ist.* Um ein beliebiges symbolisches Product P durch eine rationale Function von Formen darzustellen, deren Nenner eine Potenz von f ist, können wir auf folgende Weise verfahren. Wir denken uns zunächst dasselbe in Symbolen von $f=a_x^n=b_x^n=c_x^n$ etc. allein dargestellt und erinnern uns, dass wir früher gesetzt hatten:

$$f_1 = a_x^{n-1} a_1 = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

$$f_2 = a_x^{n-2} a_2 = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Es ist dann in Analogie mit $a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2$ auch $f_x = f_1 x_1 + f_2 x_2$, und andererseits ist $f_1 x_1 + f_2 x_2$ nach dem Euler'schen Satze auch identisch mit $f=a_x^n$. Jeder Klammerfactor (ab), (cd) etc. des symbolischen Products lässt sich aber nach dem Identitätssatze ersetzen durch

$$(ab) = \frac{b_x(af) - a_x(bf)}{f_x}. \tag{1}$$

Enthält das symbolische Product P ν solcher Klammerfactoren, so geht

dasselbe durch Substitution ihrer Werthe (1) in einen Quotienten über, dessen Nenner eine Potenz von f ist, und dessen Zähler ein Aggregat von Producten ist, die sich aus Factoren a_x, b_x, c_x ... erster Art, und Klammerfactoren (af), (bf), (cf) ... etc. zusammensetzen, während Klammerfactoren vom Typus (ab), (ac), (bc) ... etc. nicht mehr vorkommen. Das Symbol a kann also beispielsweise nur mehr in einer Form vorkommen wie:

$$\psi_k = a_x^{n-k}(af)^k, \tag{2}$$

deren unsymbolische Bedeutung die folgende Untersuchung klar legen soll.

334. *Alle Formen ψ haben die Form f als Factor.* Zunächst wollen wir zeigen, dass jede Form ψ in die Factoren $f \cdot u$ zerfällt, wo u ein Aggregat von symbolischen Producten ist. Dies ist für $k = 0$ und $k = 1$ von vornherein ersichtlich. Denn für $k = 0$ hat man

$$\psi_0 = a_x^{n-0}(af)^0 = a_x^n = f \cdot u, \text{ wo } u_0 = 1;$$

für $k = 1$ folgt

$$\psi_1 = a_x^{n-1}(af)^1 = a_x^{n-1}\{a_1 b_2 b_x^{n-1} - a_2 b_1 b_x^{n-1}\}$$
$$= (ab)\, a_x^{n-1} b_x^{n-1} = 0 = f \cdot u_1, \text{ wo } u_1 = 0.$$

Wir setzen nun voraus, der Satz gelte bereits für $k = \varrho$, und zeigen, dass er alsdann auch für $k = \varrho + 1$ giltig ist. Es sei demnach:

$$\psi_\varrho = a_x^{n-\varrho}(af)^\varrho = f \cdot U_\varrho.$$

Die erste Polare von ψ_ϱ wird:

$$(n-\varrho)\, a_x^{n-\varrho-1} a_y (af)^\varrho + \varrho\, a_x^{n-\varrho}(af)^{\varrho-1} \cdot (n-1) b_x^{n-2} b_y (ab)$$
$$= n f_y + \text{Const.} \times f \cdot U_{\varrho_y}.$$

Ersetzen wir hierin y_1 durch f_2 und y_2 durch $-f_1$, so erhalten wir, wenn wir jene Grösse, die dadurch aus U_{ϱ_y} wird, mit M bezeichnen:

$$(n-\varrho)\, a_x^{n-\varrho-1}(af)^{\varrho+1} + \varrho(n-1)\, a_x^{n-\varrho}(ab) b_x^{n-2}(af)^{\varrho-1}(bf)$$
$$= 0 + \text{Const.} \times f \cdot M. \tag{3}$$

In dieser Identität ist das erste Glied links eine Form ψ und zwar gerade die nächstfolgende Form $\psi_{\varrho+1}$ (vom Factor $n - \varrho$ abgesehen). Das zweite Glied rechts besitzt den Factor f; können wir also zeigen, dass der zweite Term links ebenfalls diesen Factor enthält, so ist der zu führende Beweis erbracht. Nun ist aber:

$$a_x^{n-\varrho} b_x^{n-2}(ab)(bf)(af)^{\varrho-1} = a_x^{n-\varrho} b_x^{n-\varrho} \cdot (ab)(bf)(af)^{\varrho-1} b_x^{\varrho-2}$$
$$= a_x^{n-\varrho} b_x^{n-\varrho}(ab)(bf)(af) \cdot b_x^{\varrho-2}(af)^{\varrho-2}$$
$$= \frac{1}{2}\, a_x^{n-\varrho} b_x^{n-\varrho}(ab)(bf)(af) \cdot \{(af)^{\varrho-2} b_x^{\varrho-2} - (bf)^{\varrho-2} a_x^{\varrho-2}\}.$$

Die in der Klammer stehende Differenz besitzt den Factor

$$(af)\,b_x - (bf)\,a_x = f_x\,(ab) = f\cdot(ab).$$

Es besitzt daher in der That der zweite Term links in (3) den Factor f und damit auch der erste Term, was zu beweisen war.

335. *Definition der Schwesterformen.* Jede Form ψ_k zerfällt also in das Product $u_k \cdot f$; die Formen

$$u_k = \frac{a_x^{n-k}\,(af)^k}{f}$$

nennen wir „Schwesterformen" (formes associées) der Form f. Die Anzahl der Schwesterformen einer Form f ist n, oder wenn wir f mit einschliessen gleich $n+1$, denn k kann nur die Werthe 0, 1, 2, ... n annehmen. Indess ist, wie wir schon oben gesehen haben, $u_0 = 1$, $u_1 = 0$.

Es ist ferner:

$$u_2 = \frac{1}{2}\,(f,\,f)^2 = \frac{1}{2}\,H.$$

Denn man hat:

$$a_x^{n-2}\,(af)^2 = a_x^{n-2}\,(af)\cdot(ab)\,b_x^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2}\,a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,(ab)\,\{(af)\,b_x - a_x\,(bf)\}$$

oder
$$(af)^2\,a_x^{n-2} = \frac{1}{2}\,a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,(ab)^2\cdot f = \frac{1}{2}\,(f,\,f)^2\cdot f.$$

Hieraus erhält man u_3, wenn man von dieser Gleichung die erste Polare bildet und wie in Nr. 334 (3) y durch f_2, y_2 durch $-f_1$ ersetzt. Dann kommt:

$$(n-2)a_x^{n-3}(af)^3 + 2a_x^{n-2}\,(af)\cdot(n-1)(bf)\,b_x^{n-2}(ab) = (n-2)f\cdot((f,f)^2,f).$$

Der zweite Term links verschwindet, da er durch Vertauschung von a mit b nur sein Zeichen ändert; demnach wird:

$$a_x^{n-3}\,(af)^3 = f\cdot((f,\,f)^2,\,f) = f\cdot T$$

$$u_3 = T = ((f,\,f)^2,\,f).$$

Auf analoge Weise findet man der Reihe nach:

$$u_4 = \frac{1}{2}\,(f,\,f)^4\cdot f^2 - \frac{3}{4}\left\{(f,\,f)^2\right\}^2$$

$$u_5 = (f,\,f)^4\cdot f^3 - (f,\,f)^2\cdot((f,\,f),\,f)$$

$$u_6 = \frac{1}{2}\,(f,f)^6\cdot f^4 - \frac{15}{4}(f,f)^4\cdot(f,f)^2\cdot f^2 + \frac{45}{8}\left\{(f,f)^2\right\}^3 + 10\left\{((f,f)^2,f)\right\}^2$$

u. s. w.

Diese Formen u_ϱ sind es also, durch welche sich jede Covariante von f rational darstellen lässt. Insbesondere bilden sie die typischen

Coefficienten, wenn die Form f selbst durch sie ausgedrückt werden soll. Zu dem Zwecke hat man nur $f(y)$ durch die lineare Substitution

$$\xi = f_1 y_1 + f_2 y_2 = f_y$$
$$\eta = - x_2 y_1 + x_1 y_2 = (xy)$$

vom Modul $\Delta = f_1 x_1 + f_2 x_2 = f$ zu transformiren und erhält dann

$$f^{n-1} \cdot f(y) = u_0 \xi^n + \binom{n}{1} u_1 \xi^{n-1} \eta + \binom{n}{2} u_2 \xi^{n-2} \eta^2 + \cdots u_n \eta^n .$$

So erhält man beispielsweise für $n = 4$

$$f^3 \cdot f(y) = u_0 \xi^4 + 4 u_1 \xi^3 \eta + 6 u_2 \xi^2 \eta^2 + 4 u_3 \xi \eta^3 + u_4 \eta^4$$
$$= \xi^4 + 3 H \xi^2 \eta^2 + 4 T \xi \eta^3 + \left(\frac{i}{2} f^2 - \frac{3}{4} H^2\right) \eta^4 .$$

Will man nun irgend eine Covariante P von f durch die Schwesterformen $u_0 u_1 \ldots u_n$ darstellen, so genügt bereits deren Anfangsglied, das im Falle einer Invariante mit dieser zusammenfällt. Man ersetzt alsdann im Anfangsglied die ursprünglichen Coefficienten $\bar{a}_0\, \bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n$ durch die typischen $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{H}{2}$ etc. und dividirt mit einer passenden Potenz von f. So ist in unserm Beispiele $n = 4$ die Form j keine Schwesterform. Wenn wir daher in der Determinante

$$j = 6 \begin{vmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 \end{vmatrix}$$

die Coefficienten $\bar{a}_i$ durch die Schwesterformen u_i ersetzen und mit f^3 dividiren, so kommt:

$$j = \frac{1}{f^3} \left\{ \frac{3}{2} i H f^2 - 3 H^3 - 6 T^2 \right\} .$$

Man erkennt zugleich in dieser Gleichung jene einzige Relation, welche zwischen den fünf Covarianten von $f = a_x^4$ bestehen muss. (Vgl. auch Nr. 162 und Clebsch, a. a. O., 7. Abschnitt.)

336. *Stellung der Schwesterformen zum vollständigen System von f.* Betrachtet man die Nr. 335 gegebenen Darstellungen der Schwesterformen $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ genauer, so sieht man, dass diese sieben Formen ganze und rationale Functionen von f, von Ueberschiebungen zweiten Grades $(f, f)^{2k}$ in den Coefficienten von f und von Ueberschiebnngen dritten Grades $((f, f)^{2k}, f)$ sind. Nachdem nun bereits Hermite im Jahre 1854, Crelle's Journ. Bd. 52 seine grundlegenden Gedanken über associirte Formen und typische Darstellung veröffentlicht hatte, unterwarf später Clebsch diese Begriffe einer allgemeinen

Untersuchung und fragte sich insbesondere auch, welche Stellung das einfachste System von associirten Formen $u_0 u_1 \ldots u_n$ zum vollen System von f einnehme. Dabei zeigte sich, dass, was eben die ersten sieben Formen schon vermuthen lassen, jede Form u_i eine ganze und rationale Function

1) der Form f selbst,
2) der Formen $(f, f)^{2k} = G_{2k}$,
3) der Functionaldeterminanten $((f, f)^{2k}, f) = H_{2k}$

ist. Die Anzahl dieser Formen $f, G_{2k}, H_{2k}, k = 1, 2 \ldots n$ ist in der That gleich der Anzahl der Schwesterformen $u_0 u_1 \ldots u_n$ und es handelt sich nur, Recursionsformeln herzustellen, welche die Formen f, G_{2k}, H_{2k} einerseits mit den Formen u_ϱ andererseits in Beziehung setzen. Bestätigt sich die eben aufgestellte Behauptung, so können wir folgenden Satz aussprechen:

„Jede Covariante und Invariante von f ist eine rationale gebrochene Function der $(n+1)$ Formen f, G_{2k}, H_{2k}, deren Nenner eine Potenz von f ist.“

337. *Recursionsformeln für G_{2k} und H_{2k}.* Um die gesuchten Beziehungen aufzustellen, verfahren wir ganz nach der schon im Eingange dieses Paragraphen gegebenen allgemeinen Methode. Wir ersetzen in den Formen

$$G_{2k} = (ab)^{2k} a_x^{n-2k} b_x^{n-2k}$$

$$\begin{aligned} H_{2k} &= (ab)^{2k} (a_x^{n-2k} b_x^{n-2k}, c_x^n) \\ &= \frac{1}{2} (ab)^{2k} (b_x^{n-2k} a_x^{n-2k-1} c_x^{n-1} (ac) + a_x^{n-2k} b_x^{n-2k-1} (bc) c_x^{n-1} \\ &= (ab)^{2k} (ac) a_x^{n-2k-1} b_x^{n-2k} c_x^{n-1} \end{aligned}$$

den Klammerfactor (ab) durch $\frac{b_x (af) - a_x (bf)}{f}$, und die Grösse $(ac) c_x^{n-1}$ durch (af). Dann erhalten wir:

$$G_{2k} \cdot f^{2k} = a_x^{n-2k} b_x^{n-2k} ((af) b_x - (bf) a_x)^{2k}$$

$$H_{2k} \cdot f^{2k} = a_x^{n-2k-1} b_x^{n-2k} (af) ((af) b_x - (bf) a_x)^{2k}.$$

Entwickelt man rechts nach dem binomischen Lehrsatze und ersetzt sofort $(af)^\varrho a_x^{n-\varrho}$ durch $f \cdot u_\varrho$, so kommt:

$$\begin{aligned} G_{2k} \cdot f^{2k} = u_{2k} \cdot f^2 - \binom{2k}{1} u_{2k-1} \cdot u_1 f^2 + \binom{2k}{2} u_{2k-2} \cdot u_2 \cdot f^2 \\ - \cdots (-1)^k \binom{2k}{k} u_k^2 \cdot f^2 \cdots - \binom{2k}{1} u_1 \cdot u_{2k-1} \cdot f^2 + u_{2k} \cdot f^2; \end{aligned}$$



